上界法及其在塑性加工的应用

王振范　编著

东北工学院出版社

前　言

在锻造、轧制、挤压、拉拔等塑性加工领域中，塑性加工力学是十分重要的理论基础。它可以确定塑性加工成型的力能参数、工艺参数及其影响因素，也可以建立数学模型并对塑性加工过程进行模拟。

上界法是塑性加工力学的重要组成部分。它是 20 世纪 40 年代末 50 年代初由 A. A. Mapkoff, R. Hill, W. Proger 等人对塑性和刚塑性材料，从数学角度进行极值定理证明之后而逐步发展到解决塑性加工问题的。60 年代以后，Г. Я. КУН 等人又以流函数和保角映射的形式进行了上界法解析。工藤则提出了上界元法解析，之后 R. P. Mcpermott, A. N. Bramley 和木内学等人发展了这种方法。

近年来，上界法之所以受到重视，是由于计算机的发展对功率函数的积分、多变量的优化提供了方便条件。特别是上界法对三维变形力学问题、非对称变形的各种加工问题、加工界限的确定、孔型及模腔的充满过程、变形行为的预测、复合材料加工的解析等方面的开发，使得上界法在应用范围、解析精度和灵活性等都得到了大大改善，而且与其它方法相比，在许多方面还具有独特的优点。

本书共分九章：第 1,2 章主要简介变形力学数学基础和上界理论。第 3,4,5,6 章主要介绍各种解析方法、步骤和简例。第 7,8,9 章则是上界法解析在塑性加工中的应用。为了自学方便，还给出了一些典型的计算框图和可供参考的 FORTRAN 计算程序。

本书是为金属压力加工专业本科生选修课及研究生课所

编写的教材，也可作为有关从事塑性加工的研究人员、技术人员和教师的参考书。由于本人水平有限，可能有错误和不足之处，欢迎批评指正。

作者

1990 年 10 月

目　录

第 2 章　上界法的理论基础

第 3 章　上界法解析

第 5 章　上界元法解析

第 6 章　泛用速度场的上界法解析

第 7 章　上界法在轧制中的应用

第 8 章　上界法在挤压拉拔中的应用

第 9 章　上界法在锻造加工中的应用

第 1 章　变形力学数学基础

变形力学基础包括应力张量与应变张量、静力微分平衡方程与应力边界条件，几何方程与体积不变条件，物理方程与塑性条件等。这些都是上界理论的基础。有关数学问题主要是结合具体情况进行交待。

§ 1-1　应力张量与应变张量的表示

本节主要介绍一下应力张量与应变张量的下标记号与求和约定的表示。

在数学上，对于含有 3 个独立变量的 a_1,a_2,a_3 可以标记为 a_i，其中 $i=1,2,3$。如果一点的三个位移分量为 u_1,u_2,u_3 或标记为 u_x,u_y,u_z，则位移就可采用 u_i 的方法表示。如果一点的斜面上单位力的分量为 p_x,p_y,p_z，则可表示为 p_i，式中 $i=x,y,z$。

同样，对于 9 个分量的集，则可用两个下标来表示，因为每个下标可取三个值。如 a_{ij}就表示为 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33}$ 9 个分量。而含有 27 个量的集，就可用 3 个下标来表示，如 a_{ijk}。含有 81 个量的集可用 4 个下标表示，如 a_{ijkl}等。

大家知道，一点的应力状态可由 9 个分量 $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{zz},\tau_{xy},\tau_{yx},\tau_{yz},\tau_{zy},\tau_{zx},\tau_{xz}$来表示。若令 $\sigma_{11}=\sigma_{xx},\sigma_{22}=\sigma_{yy},\sigma_{33}=\sigma_{zz},\sigma_{12}=\tau_{xy},\sigma_{21}=\tau_{yx},\sigma_{23}=\tau_{yz},\sigma_{32}=\tau_{zy},\sigma_{31}=\tau_{zx},\sigma_{13}=\tau_{xz}$，那么采用上述方

法表示该点的应力张量，可写成 σ_{ij}。即

$$\sigma_{ij}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{Bmatrix} \tag{1-1}$$

同理，应变张量和应变速度张量可写成

$$\varepsilon_{ij}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{Bmatrix} \tag{1-2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_{11} & \dot{\varepsilon}_{12} & \dot{\varepsilon}_{13}\\ \dot{\varepsilon}_{21} & \dot{\varepsilon}_{22} & \dot{\varepsilon}_{23}\\ \dot{\varepsilon}_{31} & \dot{\varepsilon}_{32} & \dot{\varepsilon}_{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz}\\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz}\\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz}\end{Bmatrix} \tag{1-3}$$

§1-2 应力边界条件与微分平衡方程

一、应力边界条件

变形物体是在外力作用下开始变形的，外力是如何通过边界传递到内部，外力和内部应力又是什么样关系，这可通过任一点的斜面上单位外力分量 p_x, p_y, p_z 与该点的 9 个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$间的关系方程来表示。已经学过，在外力作用下处于平衡的变形体，必须满足该点的应力边界条件，即

$$\left.\begin{aligned}p_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n\\ p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n\\ p_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

或

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \tag{1-5}$$

式中 l,m,n 为方向余弦。

在数学上，当同一项中有一个下标出现两次时，则对此下标从 1 到 3 求和，并限定在同一项中不能有同一下标出现三次或三次以上为求和约定。如

$$\left.\begin{aligned}
a_i b_i &= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + u_2 b_2 + a_3 b_3 \\
a_{ii} &= \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\
a_{ij} b_j &= \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3 \\
a_{ij} b_i c_j &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_i c_j \\
&= a_{11} b_1 c_1 + a_{12} b_1 c_2 + a_{13} b_1 c_3 \\
&\quad + a_{21} b_2 c_1 + a_{22} b_2 c_2 + a_{23} b_2 C_3 \\
&\quad + a_{31} b_3 c_1 + a_{32} b_3 c_2 + a_{33} b_3 c_3 \\
a_{ii}^2 &= \sum_{i=1}^{3} a_{ii}^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 \\
(a_{ii})^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ii}\Big)^2 = (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2 \\
a_{ij} b_{ij} &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{ij} \\
&= a_{11} b_{11} + a_{22} b_{22} + a_{33} b_{33} \\
&\quad + 2(a_{23} b_{23} + a_{31} b_{31} + a_{12} b_{12})
\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

这里把式中同一项内不重复出现的下标称为自由脚标。用自

由标号表示的一般项，可取 1,2,3 中的任一值。在同一方程，各项的自由标号应相同。如 $x_i=c_{ij}y_j(i,j=1,2,3)$可写成

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 \\ x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 \\ x_3 &= c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

所以，应力边界条件公式(1-4)可表示成如下形式

$$p_i = \sigma_{ij}n_j \tag{1-8}$$

式中，n_j 为 $j=1,2,3$ 时的方向余弦 l,m,n。

二、边界摩擦条件

外摩擦是两个接触物体相对移动时，在接触表面上发生的机械阻力。由于变形金属与工具间存在正压力和相对滑动或滑动趋势，则两者接触界面间将产生摩擦力作用。摩擦应力是应力边界条件的一种，它是计算变形力或功率的主要部分之一。通常采用的边界摩擦规律有三种：

1. 库仑摩擦规律

$$\tau_f = fp \tag{1-9}$$

式中，τ_f 为摩擦应力；p 为单位正压力；f 为摩擦系数，是一常数，故称常摩擦系数规律。金属压力加工中冷变形时，采用这种摩擦条件。

2. 常摩擦应力规律

$$\tau_f = k \tag{1-10}$$

式中，k 为变形材料的剪切屈服应力。常摩擦应力规律相当于库仑摩擦规律 $p=\sigma_s$ 时，$f=0.5$ 的情况，即 $\tau_f=fp=0.5\sigma_s=k$。k 为一常数，故称常摩擦应力条件。多用于热加工过程。

3. 常摩擦因子规律

$$\tau_f = mk \tag{1-11}$$

式中，m 为摩擦因子，可以用圆环压缩试验确定。一般 m 值在 0～1.0 之间，冷加工取小值，热加工取大值，全粘着时 m 取 1.0。

对于 f 与 m 之间的关系可采用塔尔诺夫斯基(ТаРНОвСКИЙ)经验公式，

$$m = f + \frac{1}{8}\frac{R}{h}(1 - f)\sqrt{f} \tag{1-12}$$

$$m = f[1 + \frac{1}{4}n(1 - f)\sqrt[4]{f}] \tag{1-13}$$

式中，R，h 为镦粗圆柱体的半径和高度；n 为 $l/\bar{h}$ 或 $\bar{b}/\bar{h}$ 之中的较小者，l 为轧制时接触弧长的水平投影，$\bar{h}$ 和 $\bar{b}$ 分别为变形区的平均厚度和宽度。如果已知平均单位压力，也可根据 $\tau_f = mk = fp$ 的关系确定 m 值，即 $m = fp/k$。对于(1-12)式适用于镦粗变形，(1-13)式则适用于轧制变形。

三、应力微分平衡方程

应力微分平衡方程是由变形体内单元体的力的平衡关系推导而得。即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0\\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

求和规律也适用于含有导数的项，如

$$
\left.\begin{aligned}
a_{i,i} &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \\
a_{ij,j} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3} \\
a_{i,jj} &= \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_3^2}
\end{aligned}\right\} \tag{1-15}
$$

这里应该注意，求和约定是指对重复下标求和，即在 $a_{i,i}$中对 i 求和，$a_{ij,j}$中对 j 求和，$i,j=1,2,3$，式中“,”表示微分符号。

这样，应力微分平衡方程式(1-14)写成求和约定形式为

$$
\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{1-16}
$$

式中，F_i 为体积力（包括惯性力和重力）。如果忽略体积力的影响，可写成

$$
\sigma_{ij,j} = 0 \text{ 或 } \mathrm{div}\sigma_{ij} = 0 \tag{1-17}
$$

对于多孔质渗流材料，则应力微分平衡方程为

$$
\sigma_{ij,j} + F_i = (\varphi p)_i = 0 \tag{1-18}
$$

式中，p 为孔内流体压力；φ 为孔隙率。

四、正交曲线坐标及其变换

在研究塑性加工变形的各种问题时，为了简化或适应具体变形条件，往往采用不同的正交曲线坐标系，如采用柱面坐标、球面坐标、双极坐标等。这就需要将直角坐标系的各种关系式转换成曲线坐标系的形式。

1. 正交曲线坐标