弹性及塑性理論

上 册

应用力学教研組
蔣詠秋编

西安交通大學

1962. 5

上册 目录

第一部分 彈性理論

第一部分 彈性理論

第一章 緒 論

§1－1 彈性理論的任务

彈性理論是固体力学的一个分支。固体力学包括物理部分及理論部分。前者是用实驗的方法研究固体（包括金属及非金属材料）的力学性质，如强度、彈性、塑性、疲劳、蠕变等。这样在实驗資料的基础上可总結出固体变形（包括彈性变形及塑性变形）和破坏过程的基本規律。这对建立固体力学的理論部分和解决强度問題很重要。固体力学的理論部分是根据上述基本規律和力学原理用数学方法建立起来的理論。它是研究固体在外力作用下所产生的变形和应力。固体力学理論部分又可分成彈性理論和塑性理論。

彈性理論是研究平衡状态或运动状态下的彈性体受外力作用所产生的应力和变形。当彈性体处在平衡状态，这便是彈性靜力学問題，如果它有加速度則属于彈性动力学問題。这門課程主要研究彈性靜力学問題。

塑性理論是研究物体在彈性极限以外的应力和变形。很多重要的金属材料当外力逐漸加大时先产生彈性变形，再进入塑性变形阶段，最后变成断裂和破坏。所以塑性理論是彈性理論的自然发展。

从上面彈性理論的定义来看，它和材料力学的任务是一致的，但是两者之間也有一定的区别的。首先，它們的出发条件不同。在材料力学中除了一些必要的基本假設以外，还根据不同的研究对象，为了簡化問題而添加了一些所謂“附加假設”，例如研究梁的弯曲时，引用了横截面保持为平面的假設。所得的結果是横截面上的正应力按直綫規律变化。在彈性理論中研究同一問題时，就无需引用平面假設。相反地，我們可以用彈性理論来校核平面假設的正确性，并由此判明，如果梁的高度并不远較跨度为小，而两者是属于同阶大小，則横截面上的正应力并不按直綫規律变化。又如在材料力学中計算有孔的拉杆时，通常就假設拉应力在淨截面上均匀分

布，彈性理論指出，淨截面上的拉应力远不是均匀分布，而在孔边发生高度应力集中，孔边的最大拉应力可能比平均拉应力大出好几倍。由以上二例可以看出材料力学計算的結果只在一定的范圍內才和实际的情况出入不大，在此范圍以外就不能应用。其原因就是它所采取的一些附加假設不能和某些条件下的情况相一致。因此，在彈性理論中拚棄了这些附加假設。所以說，这兩門科学的出发条件是不同的。

另一方面，彈性理論和材料力学解决問題的范圍也不同。前者是比后者更为有力的一件武器。許多材料力学不能解决的問題，如非圓断面杆件的扭轉問題，应力集中問題，接触应力的問題，平板和薄壳等的計算問題都必須用彈性理論的方法来解决。

因为彈性理論要比材料力学要求更严格，更深入地研究更复杂的問題，所以也就需要更完备的数学工具。目前彈性理論中还有很多实用价値的問題未能解决，主要的原因是数学上的困难，这就必須借助于实驗应力分析法如偏光彈性法和电阻应变法等。

§1－2　彈性理論的基本假設

如果認为彈性理論不需要假設，这是完全錯誤的，恩格斯在“自然辯証法”一书中曾經写道：“只要自然科学在思維着，它的发展形式就是假設”。彈性理論研究的对象是物体，物体有各种各洋，并且是千变万化的；因而，作为一門科学，要想找出一般的規律和計算方法，势必将千变万化的現象加以簡化和概括，这就不能离开假設，当然，这些假設必須是根据实际由实踐中得来，而不是主观忆测。

彈性理論的几个重要的基本假設如下：

1．假設物体是完全彈性的。所謂彈性，是物体在产生变形的外力被除去之后能恢复原形这一性質。所謂完全彈性，指的是物体能完全恢复原形而沒有任何剩余的变形。对多数工程材料而言，在外力不大时（应力不超过彈性极限）这一假設基本上与实际情况是符合的。当超出了此一范圍时即属于塑性理論研究的范疇，

2．假設物体是連續的，即認为物体是由一种連續性的介質充滿了該物体的所佔空間而沒有一点空隙。

事实上，物体是由无数不連續的微小顆粒（分子及原子）所組成，在自然状态下，顆粒之間也存在着相互作用的內力（吸力及斥力）保持它們

之間的距离不变。在外力作用下就使顆粒之間的距离发生变化，从而物体有了变形，同时顆粒之間的內力也产生了变化。

由于組成物体的顆粒数目是无数的，假如考虑每个顆粒和它周圍粒子之間的相互作用力来建立彈性理論，在实际上是不可能的，所以我們不用这种所謂“顆粒彈性理論”，也就是說，不从物体顆粒构造出发，而采用介質为連續的假設。从物体在变形前后都保持連續的这一概念出发，我們可以把物体的应力、应变和位移都可用它所佔空間座标的連續函数来表达。

从对物体的宏观来看，这一假設是完全可以允許的。而且事实証明了根据这一假設所得的彈性理論的結果是符合实驗結果的。

3. 假設物体內幷无初应力，也就是說，物体在未受外力和沒有溫度变化的时候其內部幷无应力。因此如果物体中有初应力，則这种初应力幷沒有包括在我們的計算結果中。

4. 假設物体是均匀的，也就是說，整个物体是同一材料做成的。这样，整个物体的所有各部分都具有相同的物理性質，因而物体的容重、彈性模数、泊松系数等都是常数，而不是位置坐标的函数。不具备这种性質的物体叫非均匀彈性体。

5. 假設物体是各向同性的，即物体的物理性質在所有各方面都相同，不具备这种性質的物体称做各向異性体，木料和竹料是各向異性体。

我們知道固体一般分为晶体及非晶体兩种。非晶体如玻璃、橡胶等是各向同性的。晶体是各向異性的，但象金屬和合金一类材料是多晶体构成的，因为它有大量的小晶体以各种不同的方向杂乱地混合起来，在外表上統观起来，也就說，考虑到各个杂乱排列的小晶体的統計平均值是各向同性的。

6. 假設物体是服从虎克定律，即認为在溫度不变的条件下应力和应变呈綫性关系。对大多数金屬材料及非金屬材料而言，在外力不大时这一假設基本上与实驗結果相符的。当然，对于一些与虎克定律偏离較大的材料如鑄鉄及混凝土等应用这一假設将引起較大的誤差。

7. 假設物体的位移及变形很小，也就是說，与物体的尺寸比較起来，可以将变形及位移当作微量看待，而在同一方程式中高次的微量可以忽略不計。

由納維（1821）、哥西（1822）、及泊松（1829）所建立起来的彈性理論，就是以上述基本假設为基础建立起来的，我們称为古典彈性理論。

同时由于采取了服从虎克定律以及小变形小位移的假定，得到全部彈性理論基本方程是綫性的，所以古典彈性理論又称做綫性彈性理論。

我們知道一切假設都是有条件的，随着条件的改变，有些假設就必須放棄或另建立新的假設，这样就成了新的理論。例如对于各向異性体，我們就不能再应用各向同性的假設而建立了各向異性彈性理論；又如不服从虎克定律或具有大变形的物体，我們就必須抛棄上述第6或第7項假設而建立了非綫性彈性理論。在本課程中只研究古典彈性理論范圍的問題，也就是說，以后的一切公式只适用于完全彈性的、連續的、均匀的、无初应力的、各向同性的，并且服从虎克定律和具有小变形的物体。

§1－3 彈性理論的方法

把上述基本假設和力学原理通过数学方法結合起来就可得出彈性理論的基本方程組。解决彈性理論問題是寻找符合給定的外力及边界条件而又适合前述基本方程組的解，这样的解称为彈性理論的精确解。这里所謂精确是相对的，对每一个基本假設和实际情况的出入所引起的偏差并沒有消除。

当我們处理某些物体形状和受力情况有一定限制的特殊問題时，往往可以把彈性理論的基本方程組簡化成仅仅适合于这类問題的特殊方程，在簡化的过程中不再增加新的假設，只是限制方程式的适用范圍，因此所得的解答也是精确的。

在求精确解的过程中往往会遇到数学上的困难，所以直到今天，对于工程技术上还有許多重要的彈性理論問題得不到精确解，因而彈性理論的应用还有它的局限性。每当找到一个有力的数学方法，彈性理論的局限就消除了一些，数学和力学的相互促进的历史也正說明了这点。

虽然数学方法对彈性理論如此重要，但是决不能忽視物理概念，相反的，应特别重視。往往有一些彈性理論的問題，直接求解基本方程有困难，由于对問題的物理方面有深入了解，可先假定一部分解答，而其他部分在解基本方程的过程中求出。这种半物理半数学的解法在彈性理論是常用的。

有时，某种彈性理論的特殊方程和另一种物理現象的数学方程在形式上完全一样，往往后者的解答很容易通过实驗求得，而比較困难的彈性理論特殊方程就可借助于这个解答而获得解决，这种方法叫比拟法。

当彈性理論的精确解得不到时，我們可以用各种近似解法或数値解法

来求出彈性理論基本方程組的近似解。

应該看到，近年来由于电子計算机的迅速发展，使得彈性理論中原来难于解决的問題也得到了解决。

解决彈性理論数学上困难的另一途徑，在处理某些特殊問題时，可在基本假設之外，增加变形几何形态的工作假設，这样就使彈性理論的方程式簡化到可以求解的程度。当然这种工作假設应有理論根据且为实驗所証实的。例如在薄板及薄壳的弯曲計算中，引进了关于平板（或壳体）直綫素的假設：在变形前垂直于中間平面（或中間曲面）的直綫素，在变形后仍保持直綫并垂直于弯曲面，这样就使薄板及薄壳的理論大为簡化，解决了工程上一系列重要問題。在这一方面，彈性理論和材料力学之間的区别就微不足道了。我們对这一类有附加假設的彈性理論称为应用彈性理論。

最后，我們应該提到研究彈性理論，应理論和实驗并重。用实驗应力分析的方法来测定实物或模型的应力、应变或位移，不仅能驗証理論，而且可有效的来解决許多物体形状或載荷复杂的彈性理論問題，往往用数学分析法是无能为力的。

§1－4　彈性理論的历史概述

恩格斯告訴我們："科学的兴起与发展从开始便是由生产所决定的"。由于农业灌溉的需要，城市和大建筑物的产生以及商业和交通的发展，便发展了力学。

在很早以前，素以动劳著称的我国人民，已經在劳动中累积了許多关于固体力学方面的知識。他們在房屋建筑、桥梁和船舶設計及建造方面有着惊人的成就，显示出他們在合理使用材料方面的杰出貢献，例如留傳至今的赵州桥是隋代(公元581—618年)天才工程师李春建造，該桥跨度达37公尺。山西应县佛宫寺木塔，高达66公尺，是在1056年建造的。宋代偉大建筑师李誡所著的营造法式（1102年），是世界上早期最完备的建筑著作，其中有許多規定都符合近代固体力学的理論。

作为一門科学，固体力学的研究始于十七世紀初叶，伽利略（1564—1642年）进行了悬臂梁的弯曲試驗来研究梁的承載能力。他断言梁折断时繞固定端平面內的一根軸而轉动。由于他把固定端当作剛体来处理，无法确定这一根軸的位置。

1660年虎克通过实驗提出"彈性物体的伸长与拉力成正比"的虎克定

律，为固体力学理論研究提供了必要的物理基础。

伽利略所提出的問題，在一百多年的时間里，經过了許多人的研究，直到1776年才由庫倫根据平面截面假設获得了現在材料力学中梁的弯曲理論。同时他还介决了圓杆的扭轉問題。在这一期間，詹姆斯、伯努利、研究了梁的彈性曲綫，欧拉介决了压杆稳定問題。他們还研究过板和壳的振动問題。

18世紀力学的发展为彈性理論基础的建立創造了条件。我們看到：由梁横截面上内力的分布自然会导致应力状态理論，彈性曲綫方程及板和壳振动的研究是采用位移表示的彈性理論一般方程的預兆。

研究彈性理論一般方程的第一人是納維。他在1821年根据了牛頓关于物质构造的观点推出了以分子位移表示的普遍方程，其中只含有一个彈性常数。1822年哥西用統观的方法研究了各向同性体的彈性理論，他的結果和納維粗糙的微观方法不同，指出彈性体（各向同性的）应有二个独立的彈性系数。

各向同性彈性体的独立的彈性系数是一个还是二个呢？这个問題引起了人們长期的爭論。后来由于物理学的进展，用原子学說代替了陈旧的牛頓关于物质构造的观点，使納維的普遍方程失去了物理基础，又經格林和郭尔文从能量观点进行的理論研究和韦尔查姆等的实驗，一致肯定了各向同性彈性体有二个独立的彈性系数，于是哥西的理論获得了普遍的接受。

19世紀前期彈性理論的研究是与工程实踐脫节的，所以发展比較緩慢。到了19世紀后期，由于經济和技术的发展，要求对机器及結构进行强度計算。当时流行的方法是采用材料力学的簡单公式或者只依靠实驗和經驗来决定杆件的尺寸，不能滿足客观要求。1855—1856年森維南发表了关于柱体扭轉和弯曲理論的論文。他用半物理半数学的联合解法来解繁冗的彈性理論方程，他的論文和实驗完全吻合，給彈性理論为工程实踐开辟了广闊途徑。接着1862年艾雷解决了平面应力問題，1882年赫芝解决了接触問題，克希霍夫在1850年及以后解决了平板的平衡和振动問題，1874年爱隆提出了薄壳等一系列工作，把彈性理論飞跃地向前推进。

彈性理論在生产实踐中得到愈来愈多的应用是从20世紀开始。由于車輛、造船、航空、导彈、火箭高溫高压高速的动力設备、重型机械、精密仪表及水工建筑等生产部門的迅速发展，技术上的进度日新月異，向彈性理論經常提出各种各样的問題、使彈性动力学問題、板壳和稳定問題、各

向異性彈性理論及非綫性彈性理論等各方面获得了普遍的丰收。由于技术的进步在很多情况下对計算理論的精确性提出更高的要求，而材料力学簡单公式的近似应用常显得过于粗略，愈来愈多的实际問題要求用彈性理論来解决。但是彈性理論的精确介只在少数簡单情况下才能求得。因此求解彈性理論的各种近似解法如变分法，差分法等就得了发展，实驗应力分析的方法也获得了很大的进展。

从彈性理論发展的历史可以看到：科学的发展归根結底是取决于生产的发展。如果理論研究不以发展生产为目的，非但不能促进生产与技术的进步也难于导致理論的发展。

§1－5 苏联在彈性理論方面的成就和我国力学事业的发展

苏联十月革命的胜利，开辟了人类历史的新紀元。从此，苏联就进入了在經济、科学、文化等各方面前所未有的繁荣昌盛时期。現在苏联人民正在胜利地迈向共产主义的同时，又在探索与开展宇宙空間的事业中，作出了无与倫比的貢献。

苏联学者在彈性理論方面的成就也超过了所有資本主义国家而属于世界的最前列。例如伽辽尔金在薄板与厚板方面、高里琴維則和符拉索夫在薄壳理論方面、符拉索夫和烏曼斯基在薄壁构件理論方面、穆士海利什維利在彈性理論平面問題方面，舒泰依尔曼和伽林在彈性动力学方面、沙文在应力集中方面、列赫尼茨基在各向異性彈性理論方面，拉赫馬屠林在彈性动力学方面、諾沃日諾夫在非綫性彈性理論方面，以及列本逊、伯潑柯維奇和魯利叶等在彈性理論的許多方面都有卓越的成就。

解放后十三年来，我国力学事业在党的領导下已經逐漸成长起来。成立了专門的研究机构，建立了許多实驗室，已有几十所高等学校設置了力学专业，已經和正在通过各种方式培养大批力学人才。在彈性理論的科学研究方面也做了不少工作。特别从1958年大跃进以来，由于研究工作密切結合了生产，有更大的发展，参加人数之多是空前的，研究的課題方面也极为广泛，主要有：在水力机械方面，研究了水輪机轉子的設計，叶片强度及渦壳的强度，在大型建筑方面，进行了壳体屋頂的研究；在水工建筑方面研究重力坝的应力分析，在振动或溢洪的影响下坝的振动問題及輸水管的应力分析等。

一九六一年一月召开的党中央八届九中全会公报指出“鉴于农业生产

連續兩年遭到了严重的自然災害，1961年全国必須集中力量加强农业战綫貫徹执行国民經济以农业为基础，全党全民大办农业，大办粮食的方針，加强各行各业对农业的支援，尽最大努力爭取农业生产获得較好的收成”。因此，我們力学工作者必須响应党的号召，积极支援农业。在农业的技术改造中有許多力学問題要我們深入生产中去和工人农民一道研究解决，例如为了发展化肥，高压容器是生产中不可缺少的工具，我們应研究各种高压容器的应力分布并确定其計算方法，以便找出最合理設計的方案。再如农村人民公社迫切需要小型的低水头水輪机作为动力的来源，我們应研究如何提高水輪机和泵建的效率。又如提高拖拉机的出力，其中有許多应力分析和强度的問題要研究解决。可以預期，随着我国农业水平的提高，力学事业必得到进一步发展。

第二章　应力状态理論

§2－1　外力

任何物体所承受的外力均可分为体积力及面力兩种。

体积力是分布于物体全部体积上的外力，如物体在重力場中所受的重力，在磁場中所受的磁力，旋轉时所产生的离心力等都是体积力。

我們来考慮一个体积为 τ，表面积为 S 的物体，图2－1。物体各点的位置用直角座标来表示。

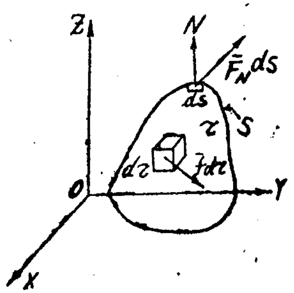

图 2－1

令矢量 $\overline{f}$ 表示每单位体积所受的体积力，它是物体各点座标 x，y，z 的函数，因为各点的体积力的分布是不均匀的。

作用在物体的一个体积素 $d\tau$ 的体积力的合力是

$$\overline{f}d\tau, \quad 或 \quad \overline{f}dxdydz$$

它在座标軸上的投影是

$$f_x dxdydz, \ f_y dxdydz, \ f_z dxdydz$$

式中 f_x，f_y 及 f_z 为矢量 $\overline{f}$ 在座标軸上的投影，它們都是物体各点座标的函数。

面力是作用在物体表面的外力，可以是分布力也可以是集中力（即分布于很小的面积上的外力）。物体与气体、液体或另一种物体相接触所受到的力都是面力。（本課程中所提到的“物体”是指固体，而且是彈性体）。

設 ds 为物体表面上的面积素，它的外法綫为 N，图2－1，矢量 $\overline{F}_N$ 为作用在 ds 上的单位面积上的面力，我們把它称为表面应力，它是物体表面上各点座标的函数。作用在 ds 上的面力是

$$\overline{F}_N ds$$

在一般情况下，$\overline{F}_N$ 的方向并不和 ds 的外法綫一致。在直角座标中，$\overline{F}_N$ 可

以分解为 x_N，y_N，z_N 三个分量，它們也都是物体表面上各点座标的函数。

§2-2 应力矢量

設一物体在体积力及面力作用下处于平衡状态，假想它被一平面截断成兩部分，图2-2，由于这兩部分仍处于平衡状态，在截面上必然有某种力存在，这种力就是物体被分开兩部分相互作用的弹性力，或称內力。由于截面上的內力分布是不均匀的，我們用单位面积上的內力，即应力，来表示內力的分布。

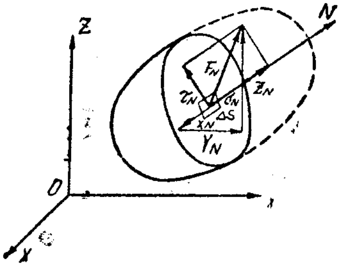

图 2-2

設 Δs 为截面上所取的一个微小单元面积，它的外法綫为 N，如图2-2所示。$\overline{\Delta P}$ 是作用在 Δs 上內力的合力，則在 Δs 上的平均应力为

$$(\overline{F}_N)_{\text{平均}} = \frac{\overline{\Delta P}}{\Delta s}$$

当所选取的面积 Δs 趋近于零时，則方向为 N 的单元面积上的应力为

$$\overline{F}_N = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overline{\Delta P}}{\Delta s} = \frac{\overline{dP}}{ds},$$

$\overline{F}_N$ 的方向和 $\overline{\Delta P}$ 的极限相一致，因为应力是有方向的，所以称为应力矢量。在一般情况下，应力矢量 $\overline{F}_N$ 并不和截面的法綫方向相一致，我們可以把它分为兩个分量，一个是垂直于截面的方向（外法綫方向），另一个是平行于截面。前者称为正应力用 σ_N 表示，后者称为切应力，用 τ_N 表示。显然，它們之間有下列关系（图2-2）：

$$\left.\begin{aligned} F_N^2 &= \sigma_N^2 + \tau_N^2 \\ \sigma_N &= F_N \cos\,(\overline{F}_N,\ \overline{N}) \end{aligned}\right\} \qquad (2-1)$$

式中 $(\overline{F}_N,\ \overline{N})$ 代表应力矢量 $\overline{F}_N$ 和外法綫 N 之間所夾的角度。

应力矢量 F_N 也可以分成平行于座标軸方向的三个分量，它們之間的关系（图2-2）：

$$\left.\begin{aligned} x_N &= F_N \cos(\overline{F}_N,\ \overline{x}) \\ y_N &= F_N \cos(\overline{F}_N,\ \overline{y}) \\ z_N &= F_N \cos(\overline{F}_N,\ \overline{z}) \end{aligned}\right\} \qquad (2-2)$$

式中 $(\overline{F_N}, \overline{x})$，$(\overline{F_N}, \overline{y})$ 及 $(\overline{F_N}, \overline{z})$ 依次为 $\overline{F_N}$ 与 x，y，z 軸之間所夹的角度。

§2－3 物体內一点的应力状态

所謂一点的应力状态，即是通过一点的各个截面上的应力情况。

通过物体的一点 M 分别用一个垂直于 x，y，z 軸的平面把它截断成兩部分，依次如图2－3(i)、(ii)、(iii)所示。各个截面上的应力都分解为一个正应力和兩个切应力。和上节的規定一样，正应力用字母 σ 代表，切应力用字母 τ 代表。为了表明正应力的作用面和作用方向，再加上一个脚标。例如 σ_x 代表作用在垂直于 x 軸的面上，同时也作用在 x 方向的正应力。剪应力附有兩个脚标，前一个脚标表明作用面垂直于那一个座标軸，后一个脚标表明作用方向沿着那一个座标軸。例如 τ_{xy} 代表作用在垂直于 x 軸面上而沿 y 軸方向上的剪应力，如图 2－3(i) 所示。

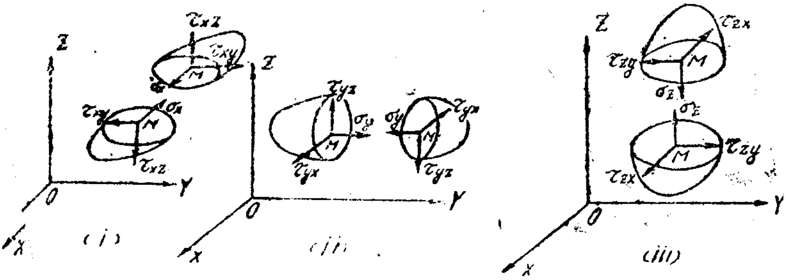

图 2－3

为使同一截面所切开的兩个面上的应力的正負号一致起見，对正应力及切应力的正負号作如下的規定：

(1) 外向法綫与座标軸正的方向一致时，該面为正面，反之为負面；

(2) 面上的应力（包括正应力及切应力）的方向与座标軸的方向一致时为正，反之为負。

(3) 負面上应力的方向与座标軸負的方向一致时为正，反之为負。

这样图2-3 所示的应力均为正値。同时，根据这一規定，正的正应力必为拉应力，負的正应力为压应力。

由图 2-3 可以看出，通过物体任一点的 M 所作的三个互相垂直平面

上共有九个应力分量，即

$$
\begin{matrix}
\sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\
\tau_{yx}, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\
\tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z
\end{matrix}
$$

若这九个应力分量都已知，則过这一点M的任意平面上的应力矢量都可用这九个应力分量来表示。現在証明如下。

設在物体內一点M处切下一个微小的四面体 $MABC$，如图 **2－4** 所示。它的三个面分别和x，y，z軸相垂直，另一个面ABC是任意的，它的外法綫为N。假定l，m，n为平面ABC外法綫的方向余弦，自M点到該平面的垂直距离是h。

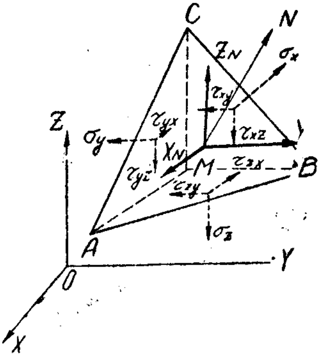

图 2－4

設ABC的面积是Δs，則$MABC$的体积是

$$\Delta V=\frac{1}{3}h\Delta s,$$

而平面MBC，MCA，MAB的面积分别是Δs_1，Δs_2，Δs_3。

$$\Delta s_1=l\Delta s$$

$$\Delta s_2=m\Delta s$$

$$\Delta s_3=n\Delta s$$

設在$MABC$中的体积力的三个分量为f_x，f_y，f_z，ABC面上的应力矢量的分量为x_N，y_N，z_N，則考虑 方向的平衡，我們有

$$f_x\Delta V+x_N\Delta s+(-\sigma_x)\Delta s_1+(-\tau_{yx})\Delta s_2+(-\tau_{zx})\Delta s_3=0$$

即

$$f_x\frac{1}{3}h+x_N-\sigma_x l-\tau_{yx}m-\tau_{zx}n=0$$

当$h\to 0$时，即得

$$x_N=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}$$

同样从考虑y，z方向的平衡着手，我們可得

$$y_N=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n \qquad (2-3)$$

$$z_N=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n$$

由此已經証明：若已知物体內一点的九个应力分量則过这一点的