高等数学教学参考书

高等数学
典型问题与方法

张志平　　编著

河南科学技术出版社

高等数学教学参考书

高等数学
典型问题与方法

张志平 编著

河南科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：典型问题与方法／张志平编著. －郑州：
河南科学技术出版社， 2006.9
ISBN 7-5349-3553-9

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 102808 号

出版发行：河南科学技术出版社
地址：郑州经五路 66 号　　邮编：450002
电话：（0371）65737028
责任编辑：张晓东
责任校对：王建平
版式设计：河大印务
印　　刷：京瓷快印　　印刷厂：开封河大印务有限公司
经　　销：全国新华书店
幅面尺寸：787mm×1092mm　　印张：12.5　　字数：288 千字
版　　次：2006 年 8 月第 1 版　　2006 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1－2,000
定　　价：32 元

编者的话

高等数学（微积分）越来越受非数学专业的学生重视，但要想学好它并不容易，特别是对于考研的学生来说，“数学”是其考研过程中一道不易越过的“坎”。

作者已从事多年高等数学（微积分）的教学工作，并从1998年开始辅导非数学专业学生考研的数学（主讲高等数学（微积分），也讲过两年线性代数），在数学学院主要讲授数学分析及辅导我院学生考研。在辅导学生考研的过程中，许多考生强烈要求把我的讲义印发给他们，因此，通过整理以前的讲义，于2002年形成了本书的初稿，并油印了几百本，在一年两期的考研数学辅导班中使用了 4 年，取得了很好的效果。本书是在初稿的基础上，根据近几年考研命题的特点、增加了一些新的题型及新题、并融入了本人讲授数学分析的一些经验编写而成的。适于正在学习高等数学（微积分）的读者，正在复习高等数学（微积分）准备考研的读者以及从事这方面教学的年轻教师使用。

高等数学（微积分）中题是无穷的，而题型是有限的，就是这有限的题型对考生来讲还是有点多，而本书只总结了对考生来说最实用最有效的题型。

本书共分8章23节，其中节的分法与一般教材不同，目的是便于考研者复习。本书的编写主要侧重于以下三个方面（也是本书的特点）：一是对课本中不易理解和掌握的概念、结论及方法作了进一步的说明（每节的第一部分）；二是全面、系统地总结归纳了高等数学（微积分）问题的典型类型（特别是针对考研）、每种类型的解法与技巧，再选取典型而又有相当难度的全国历届考研数学试题及部分高校高等数学竞赛试题作为例题，进行逐层分析，分类讲解（每节的第二部分）；三是每节的最后都配有一些综合杂例，这样一方面可以让读者对高等数学各个分支之间的关系有所了解，从而提高其综合运用能力，另一方面也适应了近几年考研命题中综合题比较多的特点。

全书以解题方法为中心，在对例题进行讲解时，特别注意系统讲述解题思想与解题方法，而不是题目堆砌或单纯的题解。每章的最后都配有一定量的练习题（这些题绝大部分是历年的考研试题），以便读者对本章所学方法进行练习。

感谢所有在本书出版过程中给予我帮助的朋友们。由于水平和时间限制，书中一定还有不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

作　者

2006年7月于河南大学

目　　录

第一章　函数、极限、连续

§1.1　函数的概念与性质

一、有关概念、结论及应注意的问题

1.对函数定义要注意其两要素及函数的表示方法.

2.几个常用的分段函数: 1° $f(x)=|x|$; 2° sgn x; 3° $[x]$; 4° (x); 5° $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 有理数},\\ 0, & x\text{ 无理数}.\end{cases}$

3.函数的几种性质:

1° 单调性:

（1）单调性和函数所讨论的区间有关.

（2）判断单调的方法：用定义；用导数.

（3）单调性在证明数列收敛及证明某些不等式时常用.

2°有界性:

（1）注意：上界、下界、有界、无界的概念.

（2）函数是否有界与区域有关，无界函数与无穷大有区别，记住一些常用的有界、无界函数.

（3）判断有界的方法：I.不等式放缩；II.求最值；III. 闭区间上连续；IV.用极限.

3° 周期性:

（1）结论：T 为$f(x)$ 的周期，则$\dfrac{T}{|a|}$ 为$f(ax+b)$ 之周期，T_1 与T_2 分别为函数$f(x)$ 与$g(x)$ 之周期，则T_1 与T_2 之最小公倍数为$f(x)\pm g(x)$之周期.

（2）求周期之方法：用定义；　用已知函数之周期.

（3）周期性在积分中、级数中、函数延拓中有用.

4°奇偶性:

（1）当函数的定义域对称时，才考虑其是否具有奇偶性.

（2）对于有奇偶性的函数，可使积分简化、画图简化.

（3）判别法: 用定义；　用性质.

（4）结论：对称区间上的函数，总可表示为奇偶函数之和$f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

4.复合函数:

1°复合方法:

（1）非分段函数直接代入；

（2）分段函数分段讨论.

2° 当两个函数复合时，能否复合看外函数的定义域与内函数的值域之交集是否为空集，若为空集不能复合，否则可以.

5.反函数：

1° 性质：

（1）$y=f(x)$ 与$y=f^{-1}(x)$ 的图象关于$y=x$ 对称.

（2）若$y=f(x)$ 与$y=g(x)$ 互为反函数，则$f(g(x))=x$.

（3）若都可导，则$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}, x=f^{-1}(y)$.

（4）严格单调函数存在反函数.

2° 求法：（1）从$y=f(x)$ 中解出x;　　（2）分段函数分段解.

二、典型题型及方法

1. 求函数定义域.

方法：1° 由实际问题决定：如极限函数、图表函数.

2° 自然定义域：函数由解析式给出，定义域是使函数有意义的自变量的取值范围，求这类定义域主要是解不等式. 常遇到以下几种情况：

（1）分母$\neq 0$;

（2）根号下非负；

（3）一些特殊函数的特殊要求.

3° 复合函数求定义域的方法：先求最外层函数的定义域，以此作为第二层函数的值域求出其定义域…… 依此类推.

例1.（88, I, II）已知$f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且$\varphi(x)\geq 0$, 求$\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解：$\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x\Rightarrow\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. $\because \ln(1-x)\geq 0\Rightarrow x\leq 0$, $\therefore \varphi(x)$ 的定义域为$(-\infty,0]$.

例2. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-nx}-2^{nx}}{2^{-nx}+2^{nx}}$，求其定义域.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-nx}-2^{nx}}{2^{-nx}+2^{nx}}=\begin{cases}-1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x<0.\end{cases}$　　$\therefore f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

2. 函数特性的判定.

例3.（90 三，四）设$f(x)=x\tan x\cdot\mathrm{e}^{\sin x}$，则$f(x)$是　　（　　）

(A) 偶函数　(B) 无界函数　(C) 周期函数　(D) 单调函数

解：x 非周期，$\mathrm{e}^{\sin x}$ 非奇偶. 但 $\tan x\mathrm{e}^{\sin x}$ 为周期函数, 所以答案只能是（B）.

例4.（02 一，四）设$f(x)$ 连续，则下列函数中必为偶者　(　　)

(A) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　(B) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

解：(1) 取特值$f(x)=x$;　(2) 证$F(-x)=F(x)$. 答案为（D）.

例5.（04 三，四）函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列那个区间内有界.

(A) (-1, 0)　(B) (0, 1)　(C) (1, 2)　(D) (2, 3)

解：$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$，$\therefore$ 选（A）.

3. **求函数表达式.**

方法：1° 利用函数相等或"无关特性".

2° 微分方程或极限.

例6.（03 二）已知$y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是$y'=\dfrac{y}{x}+\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的解，则 $\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的表达式为　(　　)

(A) $-\dfrac{y^2}{x^2}$　(B) $\dfrac{y^2}{x^2}$.　(C) $-\dfrac{x^2}{y^2}$　(D) $\dfrac{x^2}{y^2}$

解：把$y=\dfrac{x}{\ln x}$ 代入方程得：$\varphi(\ln x)=-\dfrac{1}{(\ln x)^2}$，　$\therefore \varphi(\dfrac{x}{y})=-\dfrac{y^2}{x^2}$. 故选（A）.

4. **分段函数的复合与求值.**

方法：分段讨论.

例7.（97 二）$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0,\\ x+2, & x>0;\end{cases}$　$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\ge 0.\end{cases}$, 则 $g(f(x))$ 等于(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

解1：对自变量进行讨论: 当$x<0$ 时，　$f(x)=x^2>0\Longrightarrow g(f(x))=f(x)+2$; 当$x\ge 0$ 时，　$f(x)=-x\le 0\Longrightarrow g(f(x))=2-f(x)$, 故选(D).

解2：对$f(x)$ 进行讨论：$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x); & f(x)\le 0\\ f(x)+2. & f(x)>0\end{cases}$

由f 的定义知 $x<0$ 时，　$f(x)>0$;　$x\ge 0$ 时，　$f(x)\le 0$. 故选(D).

解3: 取特殊值法:

x	$f(x)$	$g(f(x))$	A	B	C	D
-1	1	3	√	×	√	√
1	-1	3	×	√	×	√

因此，应选(D).

例8. （92 二） $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则$f(-x)$ 等于 (　　)

(A) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$ (B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\ge 0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$ (D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\ge 0\end{cases}$

解: 方法类似于例8（略），答案(D).

§1.2 数列极限

一、有关概念、结论及应注意的问题

1. 性质及相关结论:

1° 四则运算法则只能在极限存在的情况下使用.

2° 极限存在一定唯一.

3° 若$x_n\to a(n\to\infty)\Rightarrow$任意子列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，必有$x_{n_k}\to a(k\to\infty)$（用此结论可证数列极限不存在）.

4° 单调有界定理：适用于递归数列，做题时关键是证数列单调.

5° 夹逼定理：$a_n\le b_n\le c_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

(1) 注意使用条件：$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$ 不等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.

(2) 使用时放缩不易过大.

6° 两个重要极限:

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\frac{1}{n})/\frac{1}{n}=1$; ② $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

7° 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 则:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a$. ($a_i>0$, $i=1, 2\cdots, n$)

2. 证明数列极限存在的方法:

1° 单调有界定理.

2° 夹逼定理.

3° 函数极限与数列极限的关系.

二、典型题型与方法

1. 递归数列（即x_n 由x_{n-1} 或x_{n-2} 所定义）的极限问题.

方法：用单调有界定理.

技巧：(i) 先假设极限存在，求出极限a;　　(ii) 在知道a 的情况下证$\{x_n\}$ 单调有界.

例1. (96 一) 设$x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$, 证$\{x_n\}$ 的极限存在并求极限.

解1:　(令$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 则，$a=\sqrt{6+a}\Rightarrow a=3$ 或$a=-2$(舍))

$x_{n+1}-3=\sqrt{6+x_n}-3=\dfrac{x_n-3}{\sqrt{6+x_n}+3}$, 若$x_n>3$, 则$x_{n+1}>3$. $\because x_1=10$, $\therefore\{x_n\}$ 有下界3.

又　$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-x_n=\dfrac{6+x_n-x_n^2}{\sqrt{6+x_n}+x_n}=\dfrac{(x_n+2)(3-x_n)}{\sqrt{6+x_2}+x_n}<0.$

$\therefore\{x_n\}$ 递减. 由单调有界定理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，在$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边令$n\to\infty$ 得$a=3$.

解2:　(显然$x_1>x_2$, 猜想$\{x_n\}$ 递减)

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}$, 因此$x_{n+1}-x_n$ 与x_n-x_{n-1} 同号，并由$x_1>x_2$，可知$\{x_n\}$ 单减$\because x_n\geq 0$,　$\therefore\{x_n\}$ 极限存在.

解3: $|x_{n+1}-3|=\dfrac{|x_n-3|}{\sqrt{6+x_n}+3}\leq\dfrac{1}{3}|x_n-3|\leq\dfrac{1}{3^2}|x_{n-1}-3|\leq\cdots\leq\dfrac{1}{3^n}|x_2-x_1|$.

令$n\to\infty$, 得$x_n\to 3$.

例2.（02, II）设 $0<x_1<3$,　　$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$. $n=1, 2\cdots$

证明：$\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

(分析：设其极限为a, 则 $a=\sqrt{a(3-a)}\Rightarrow a=0$ 或 $a=\dfrac{3}{2}$. 又$x_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(x_n+3-x_n)=\dfrac{3}{2}$, 且$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\dfrac{(3-2x_n)x_n}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geq 0$ 所以，$\{x_n\}$ 增，其极限为$\dfrac{2}{3}$）.

证明：略

注：还有一类较难的递归数列$\{x_n\}$，需证$\{x_{2n}\}$ 与$\{x_{2n+1}\}$ 一个增一个减.

2. 对数列极限概念、性质的理解.

技巧：充分理解有关概念及性质，特别是数列极限的四则运算性质.

例3.（98 二）设x_n, y_n 满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$, 则下列断言正确者　　(　　)

(A) 若$\{x_n\}$ 发散, 则$\{y_n\}$ 发散　　(B) 若$\{x_n\}$ 无界，则$\{y_n\}$ 必有界

(C) 若$\{x_n\}$ 有界，则$\{y_n\}$ 必为无穷小　　(D)$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小，则$\{y_n\}$ 必为无穷小

解: 若$x_n=(-1)^n$, $y_n=0$ 时，则A错.

若$x_n=1, 0, 3, 0, 5, 0\cdots$, $y_n=0, 2, 0, 4, 0, 6\cdots$, 则B 错.

若$x_n=0$, $y_n=1$, 则C 错. 因此只有D对.

例4.（99 二）$\forall\varepsilon\in(0,1),\exists N$, 使得当$n\geq N$ 时，恒有$|x_n-a|\leq 2\varepsilon$ 是$\{x_n\}$ 收敛于a的(　　)

(A) 充分但非必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 即非充分又非必要条件

解: 本题是考察对数列极限定义的理解情况，选(C).

3. 求n 项和之极限.

方法：1° 利用定积分的定义：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f\left(\dfrac{i}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx.$

2° 用夹逼定理：使用时放缩不易过大，目的是由多项变为一项或两项.

注: 1° 与2° 两种方法常共同使用.

3° 利用级数求和.

4° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n.$

5° 这里常用到以下几个公式：

(1)$1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$,　　(2)$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

(3)$1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$,　　(4)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$.

例5. （98 一） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right).$

$$\because \frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+1}<\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{1}{i}}<\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n},\ \therefore \sum_{n+1}^{n}\frac{1}{n+1}\sin\frac{i}{n}\pi<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{1}{i}}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{i}{n}\pi.$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

例6. （02 二） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\dfrac{i}{n}\pi}=$__________.

解: 原式$=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+\cos x\pi}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$

例7. （95 二） $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right).$

解: $\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+n}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+1}$

$$= \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}$, $\therefore\ I = \frac{1}{2}$.

4. 求n 项积之极限.

方法：1° 取对数化为n 项和.

2° 分子分母同乘一因子，发生连锁反应，消中间项.

3° 因式分解，消中间项.

4° 用夹逼定理.

5° 用单调有界定理.

6° 用公式 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n (a_n > 0)$.

例8.（99 三）设$f(x) = a^x$,（$a > 0, a \neq 1$）求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln(f(1)\cdot f(2)\cdots f(n))$.

解： 原式$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln f(i) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \ln a = \ln a \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln a$.

例9. 求$I = \lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$.

解：$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$

$$= (1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n}) \to \frac{1}{2}(n\to\infty).$$

例10. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})(|x|<1)$.

解： 分子分母同乘以$1-x$, 则

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$= \frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$= \frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \to \frac{1}{1-x}(n\to\infty).$$

例11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$.

解：$b_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} > a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$, 且 $0 < a_n \le \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \to 0$

$\therefore a_n \to 0(n\to\infty)$

5. 未定式的极限问题.

方法：(1) 利用两个重要极限.

(2) 化为函数极限的情形（用洛必达法则）.

(3) 根式有理化.

例12.（98 四）求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$.

解：令$x=\frac{1}{n}$，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}.$$

例13.（98 二）$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$ (1^∞ 型).

解：
$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}(\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{2}{n}})^n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}})^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}})^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n}=\mathrm{e}^4.$$

注：数列极限不允许直接用洛必达法则，但在运算过程中可以使用等价代换.

三、综合杂例

例14.（99 二）设$f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

证$\{a_n\}$ 极限存在.

分析：$f(x)$ 单调，想到a_n 单调，用单调有界定理.

解：
$$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}f(k)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$
$$=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x(\because\ f(x)\geq f(n+1)\ x\in[n,n+1])$$
$$\leq f(n+1)-f(n+1)=0,$$

$\therefore$ $\{a_n\}$ 单调减少.

又
$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\geq\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}f(k)=f(n)\geq 0,$$

$\therefore$ $\{a_n\}$ 有下界，　$\{a_n\}$ 的极限存在.

§1.3　函数极限

一、有关概念、结论及应注意的问题

1. 性质及有关结论.

1° 对四则运算法则要注意使用条件：极限存在且不是未定式时才能使用.

2° 结论：极限存在$\Longleftrightarrow$左、右极限存在且相等.

本结论常用于：(i) 证极限不存在;　　(ii) 求分段函数在分段点的极限问题.

3° 夹逼定理：夹逼定理注意适用条件.

4° 保号性：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, $A>B \Longrightarrow$ 存在$U(x_0,\ \delta)$，使得$\forall x\in U(x_0,\ \delta)$ 有

$$f(x)>g(x).$$

(2) 若$0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\geq g(x)$ 且$x\to x_0$ 时，二者极限存在，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\geq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

5° 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在x_0 的邻域$U(x_0,\ \delta)$ 使得f在$U(x_0,\ \delta)$ 内有界

2. 无穷小量与无穷大量.

1° 无穷大量与无穷小量阶的比较及等价代换，在解题中非常有用.

2° 等价代换：乘除能用，加减使用起来要慎重. 几个常用的等价代换公式为：

(1) $\sin x\sim x$;　　(2) $\tan x\sim x$;　　(3) $1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$;

(4) $e^x-1\sim x$;　　(5) $\ln(1+x)\sim x$;　　(6) $(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$. $(x\to 0)$

3° 无穷小与极限可互相转换，无穷小与无穷大也可互相转换.

3. 求极限的主要工具：

1° 用运算法则及连续性.

2° 单调有界定理.

3° 夹逼定理.

4° 等价代换.

5° 洛必达法则.

6° 泰勒公式与中值定理.

7° 无穷小与无穷大之转换.

8° 已知结果：(1) 重要极限;　　(2) 无穷小× 有界量=无穷小.

二、典型题型与方法

1. 未定式（待定型）的极限问题.

$\dfrac{0}{0}$,　$\dfrac{\infty}{\infty}$,　$\infty-\infty$,　$0\cdot\infty$,　1^∞,　∞^0,　0^0.

主要工具：洛必达法则.在使用时要注意以下几个问题：

(A) 注意使用条件：不是$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不能用，$\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$时可用，否则不能用;

(B) 在使用时随时简化所求极限式：如用等价代换，非0或∞因子提出等；

(C) 可多次使用.

1° $\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型.

解题步骤：(1) 用恒等变型（因式分解，根式有理化，分子、分母、同乘或同除一个因子，变量代换等），使所求极限式化简或化为定式；

(2) 对于那种极限存在但非0 非∞ 的因式，按运算法则从中提出另算；

(3) 用等价代换；

(4) 用洛必达法则；

(5) 用拉格朗日中值定理或者泰勒公式（带皮阿诺余项）.

注：在遇到$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型时要注意以下两个问题：

(i) 有时要讨论是$x \to +\infty$ 或是$x \to -\infty$；　　(ii) 多使用“∞”与“0”之转换.

例1. (99 二)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解：　根式有理化

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\ln(1+x)-x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\frac{1}{\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x)-x}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

例2. (01 二) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ ________.

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

例3. (92 一) 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}\left(1-\sqrt{1-x^2}\sim\frac{1}{2}x^2\right)$.

解：　$\displaystyle\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)=1.$

例4. (97 二)　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解：

$$
\text{原式}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1.
$$

例5. (92 四) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$ (直接用洛必达法则).

解: 原式 $\xlongequal{\text{洛必达}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos(x-1)}\cdot\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\sin(x-1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

2° $\infty-\infty$型

方法：用通分，根式有理化，分子、分母同乘某式，变量代换等方法化为$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{\infty}{\infty}$.

例6. (05 三，四) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x})$.

解: 原式 $\xlongequal{1-\mathrm{e}^{-x}\sim x\text{不能用}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x(1-\mathrm{e}^{-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$

例7. (93 二) 求$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

解1：(根式有理化) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(x^2+100-x^2)}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1}$

$$=-50.$$

解2：（变量代换）原式$\xlongequal{x=\frac{1}{t}} \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{1-\sqrt{1+100t^2}}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{200t}{\sqrt{1+100t^2}}}{2t}$

$$=-50.$$

例8. (04 三，四) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2})$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2})=1+\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\xlongequal{\text{洛必达}}1+\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=1+\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$=1+\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=1+\frac{1}{3}.$$

3° $0\cdot\infty$ 型

方法：$0\cdot\infty$ 化为$\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}$ 或$\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}$，用1° 中方法即可.

原则：对数与反三角函数不下放，有时用变量代换也可达到此目的.

例9. (89 二) 求$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\mathrm{ctg}\,2x$.

解: 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

例10. (96 二) 求$\lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\dfrac{3}{x})-\sin\ln(1+\dfrac{1}{x})]=$________.