农村应用数学

华中师范学院数学系
《农村应用数学》编写[redacted]

序　　言

在伟大的批林批孔运动推动下，在我院、系党组织的领导下，我系71级部分工农兵学员和部分教师，遵照毛主席**“教育必須为无产阶級政治务服，必須同生产劳动相結合”**和**“教材要彻底改革”**的教导，在教育革命实践中，以农业“八字宪法”为纲，根据科学种田和农业“四化”的需要，编写了这本《农村应用数学》。我们的想法是：农业是发展国民经济的基础，要使农业大上快上，就要象大寨那样抓党的基本路线，抓科学种田。而科学种田，最主要的就是要贯彻落实毛主席提出的农业“八字宪法”——土、肥、水、种、密、保、管、工，因为这八个字全面地，高度地概括了农业生产中的客观规律，辩证地反映了各项生产措施的内在联系；其中每一个字都代表一项农业增产的基本措施。正如贫下中农所说：“八字宪法是个宝，农业增产少不了。”由于我国农业生产迅速发展，为数学和其他学科在农业上的应用开辟了广阔的天地，提出了更高的要求。在贯彻“八字宪法”实现农业“四化”中，数学不仅可以发挥作用，而且大有可为。因此，打破旧的数学教材体系，编写以“八字宪法”为纲，密切联系农业实际的教材，不仅是必要的，而且是可能的。

打破旧体系，编写为无产阶级政治服务的新教材，是教育革命中的一项重要任务，对于我们来说，困难确实不少。但是，我们深深懂得，搞不搞得好，关键在路线。路线对了头，困难就低头。在毛主席的教育革命路线指引下，我们实行开门编书，坚定不移地走“五·七”指示的道路，虚心向工人、贫下中农学习，向一切有实践经验的战士学习。通过广泛的调查研究，我们对编写《农村应用数学》有了一个比较明确的设想，概括为一句话，就是“以纲带目，三个结合”。纲，就是“八字宪法”，目，就是科学种田和农业“四化”中提出的数学问题。三个结合是：第一，以普及为主，普及与提高相结合。既介绍“八字宪法”涉及到的一般测、绘、算问题，也介绍农业科学试验中常用的数学方法，例如优选法，回归分析法，方差分析法，规划法，正交设计法等。第二，从实际出发，理论与实际相结合。遵循**“实践——理論——实践”**的公式，强调从实践中提出问题，把实际问题抽象为数学模型，并运用数学方法分析问题和解决问题。第三，为农业服务与促进教育革命相结合。在编写过程中，我们在学习贫下中农和实际工作者的丰富经验的基础上，结合数学专业知识和有关参考资料，按照“八字宪法”的八个字，编写了土地规划，合理施肥，小型水利规划，选种计算和品种试验的方差分析，合理密植，植保测算，田间管理中的气象预报、作物布局和试验设计，常用农机有关计算等八章内容。主要供我系工农兵学员学习，也可供广大中学教师、知识青年和农业技术人员参考。

初稿完成以后，虽多次征求意见，并作了几次修改，但由于我们的水平有限，一定还有不少缺点和错误，恳切地希望读者批评指正。

华中师范学院数学系《农村应用数学》编写组

一九七五年元月

目　录

序　言

第一章　土地规划……（1）

　§1　面积计算……（1）

　§2　平整土地……（9）

　§3　合理使用土地——亩产比法介绍……（21）

第二章　合理施肥……（28）

　§1　积肥造肥计算……（28）

　§2　施肥量计算……（31）

　§3　化肥菌肥生产中最优方案的选择……（37）

第三章　小型水利规划设计……（48）

　§1　小型水库规划设计……（48）

　§2　渠道规划设计……（63）

　§3　合理用水……（83）

　§4　小型水电站的水能计算……（90）

第四章　选种计算和品种试验的方差分析……（97）

　§1　选种的有关计算……（97）

　§2　品种试验的方差分析……（100）

第五章　合理密植……（117）

　§1　根据株行距确定种植密度……（117）

　§2　农作物估产……（121）

　§3　根据产量结构和指标确定株行距……（126）

　§4　密植的合理布局举例……（127）

第六章　植保测算……（133）

　§1　农药配比的有关计算……（133）

　§2　虫情测报经验公式的求法……（135）

　§3　历期预测法……（150）

第七章　田间管理中的气象预报、作物布局和试验设计……（153）

　§1　农业气象预报……（153）

　§2　农作物的合理布局……（161）

　§3　田间试验中的正交设计……（167）

第八章　常用农机有关计算……（187）

　§1　农机田间作业有关计算……（187）

　§2　水泵运用的有关计算……（192）

　§3　皮带传动有关计算……（205）

第一章　土地规划

"土"是指深耕，改良土壤，土壤普查和土地规划.

土壤是农作物生长的基础，作物生活所必需的养分和水分都需要从土壤里吸取．只有合理深耕，改良土壤，搞好农田基本建设，因地制宜种植作物，才能充分发挥土壤的作用，达到增产的目的．本章主要介绍土地规划中的有关测算．

§1　地积测算

一　地积计算

对于规则形状的田地，可直接按规则图形的面积公式计算地积．但是，通常遇到的田地，一般都是不规则的，因此，计算地积时，必须**"对于具体事物作具体的分析"**，设法将不规则的转化为规则的进行计算．下面介绍几种常用的地积计算方法．

1　公式法

对于近似于规则图形的田地，可按所近似的规则图形的面积公式进行计算．例如，勾股形、牛角形均近似于三角形，可按三角形面积公式计算．农村中流传着的计算口诀："三角、勾股、牛角形，底边折半与高乘"就是这个意思．

图 1-1

2　分割法

有些田地，形状虽不规则，但却可以分割成近似于规则形状的几块．这时便可用分割法计算地积．如图 1-2 所示的大鼓形，可以分割成两个近似于梯形的图形，按梯形面积公式计算其面积，即得

$$S\approx\left(\frac{a+c}{2}\right)\frac{h}{2}+\left(\frac{c+b}{2}\right)\frac{h}{2}.$$

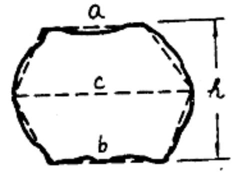

图 1-2

关于大鼓形的地积计算，劳动人民在实践中总结成如下的口诀："中广加上两半梢，得出结果乘半高"．用 c 表示大鼓形的中广，a 与 b 表示它的两梢，h 表示它的高，写成

公式便是

$$S\approx\left(c+\frac{a+b}{2}\right)\frac{h}{2}.$$

这就是前一公式的简化形式.

3 割补法

有些不规则的田地，可以把它割补成一个或几个近似于规则形状的田地，从而可以利用相应的公式来计算.

割补时，要尽可能使割去部分和补进部分的地积相近，贫下中农的经验是："割凸补凹化规则，借助目测和步测". 这就是说，把凸出的部分割去，补在凹进的部分，但不能出入太大，应该借助目测和步测，使割补两者基本相近.

如图1-3，将Ⅰ割下补Ⅱ，将Ⅲ割下补Ⅳ，这时原来形状的田地，便可转化为矩形田地来计算地积.

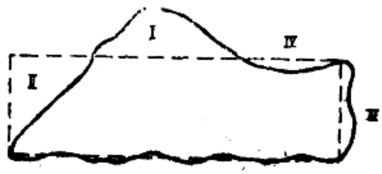

图 1-3

4 均值法

对于有些极不规则的田地，例如钟形、蛇形（图1-4）等，一般用取平均值的方法来处理. 即将田地横量几次，竖量几次，分别取平均值作为长和宽，然后长宽相乘，便得地积.

(a)　　(b)

图 1-4

5 方格法

对于已绘出平面图的田地，可直接用方格法计算地积. 比方，利用已绘出的生产大队或小队的平面图来计算大队或小队田地的总面积. 其方法是：用一张刻有厘米方格的玻璃板或透明纸片，复盖在平面图上，数出图形占有的满格和半格（凡不满格的都作半格，如发现这种折合与实际情况出入较大，可按实际情况进行折合），而后按图中比例算出地积.

设一个方格的面积是1厘米^2，比例尺为1:1000，则

$$\frac{\text{实际面积}}{\text{相应图形面积}}=\left(\frac{1000}{1}\right)^2.$$

故

一个方格表示的实际面积

$=10^6\times 1$ 厘米$^2=100$米^2

$=0.15$亩.

若图形占有 m 个满格和 n 个半格，则

$$田地实际面积=\left(m+\frac{n}{2}\right)\times 0.15(亩).$$

例如，图 1-5 的闭合曲线内部（阴影部分），占有满格 26 个，半格 20 个，故闭合曲线内部的

$$地积=\left(26+\frac{20}{2}\right)\times 0.15=5.4(亩).$$

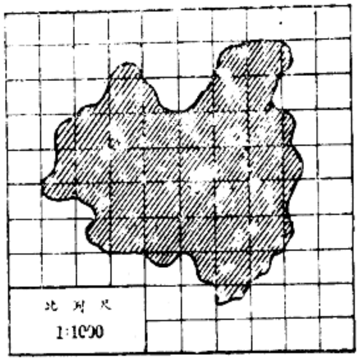

图 1-5

总之，对于不规则田地的地积计算，都是以"**分析事物的矛盾**"，"**促成事物的转化**"为指导思想，把它转化为近似于规则田地的地积来解决.

二 地积丈量

地积计算中涉及的数据，往往需要通过丈量土地得出. 丈量土地时，常用的工具有卷尺、步弓和曲尺.

1 卷尺丈量

卷尺丈量是农村最常用的一种丈量方法，不仅可以准确、方便地量出被测线段的长度，而且也可以用于测量垂直距离.

用卷尺测量三角形田地的高时，劳动人民在生产实践中采用了一种土方法：如图 1-6，一个人捏住卷尺的一端，固定在三角形的一个顶点上，另一个人拉紧卷尺，在对边上左、右移动（首先依靠目测大致找一个范围），当读数为最小时，这个读数就是这条底边上的高（从直线外一点到这条直线上各点所引的线段中，最短的是垂线）.

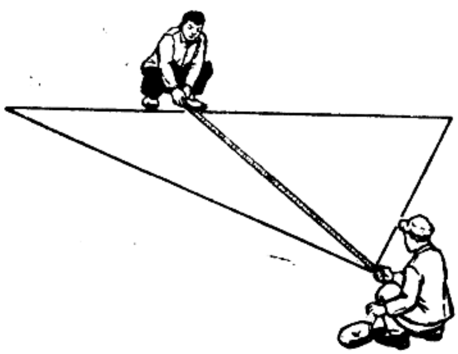

图 1-6

2 步弓丈量

步弓是一种形状象圆规的木制丈量工具（如图 1-7）. 常见的有 5 尺弓、6 尺弓和 3 尺弓几种. n 尺弓，就是弓的两脚尖之间的距离为 n 市尺. 下面以丈量长方形的地积为例，介绍步弓的测算公式（表 1-1）.

表 1-1

丈量工具	平方弓与亩间的换算关系	地积亩数计算方法	符　号　意　义
5 尺弓	1 平方弓 $=\frac{1}{240}$ 亩	$S=\frac{m\times n}{240}$	S—长方形地积
6 尺弓	1 平方弓 $=0.006$ 亩	$S=m\times n\times 0.06$	m—田长的弓数
3 尺弓	1 平方弓 $=0.0015$ 亩	$S=m\times n\times 0.0015$	n—田宽的弓数

从上表中可以看出，5 尺弓虽然使用方便，但计算却较费事；使用 6 尺弓与 3 尺弓，不仅计算费事，而且前者太长，使用不甚方便，后者太短，致使丈量次数过多，影响误差，浪费时间．我们认为，$\sqrt{15}$尺弓较为适用．以长方形田块为例，它的计算公式是：

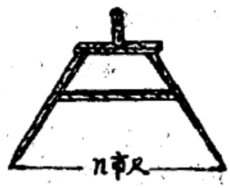

图 1-7

$$亩数=\frac{\frac{1}{2}\times 田长的弓数\times\frac{1}{2}\times 田宽的弓数}{100}.$$

这样，不仅使用方便（长度适度，$\sqrt{15}\approx 4$），而且计算简便，便于心算，只须求出田长弓数的一半与田宽弓数的一半的乘积，再将小数点向左移二位．例如，用这种步弓去测量一块长方形的田．测长，量了80次，测宽，量了50次，于是这块田的亩数便是：

$$\frac{\frac{1}{2}\times 80\times\frac{1}{2}\times 50}{100}=10(亩).$$

这是什么道理呢？设长方形的长是 m 弓，即 $\sqrt{15}m$ 尺，宽是 n 弓，即 $\sqrt{15}n$ 尺，于是

$$\begin{aligned}长方形的亩数&=\frac{(\sqrt{15}m)(\sqrt{15}n)}{6000}\\&=\frac{15mn}{6000}\\&=\frac{\frac{1}{4}mn}{100}\\&=\frac{\frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{2}n}{100}.\end{aligned}$$

$\sqrt{15}$尺又怎么得出呢？我们可以利用勾股定理，作一直角三角形，使其斜边是4尺，一条直角边是 1 尺，则另一直角边就是

$$\sqrt{4^2-1}=\sqrt{15}\text{（尺）}.$$

3　曲尺丈量

曲尺也是一种木制的丈量长度的工具（图 1-8），它适用于小块田地的测算．设长方形田地的长是长曲边的 m 倍，即 $3m$ 尺，宽是短曲边的 n 倍，即 $2n$ 尺，则

$$长方形亩数=\frac{3m\times 2n}{6000}$$

$$=\frac{mn}{1000}(亩).$$

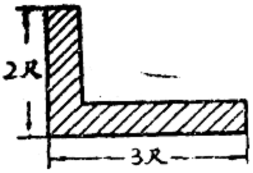

图 1-8

利用曲尺计算时，梯形田及三角形田的亩数分别是

$$S_{梯}=\frac{(a_{长}+b_{长})\times h_{短}}{2}\times 0.001;$$

$$S_{三}=\frac{a_{长}\times h_{短}}{2}\times 0.001.$$

这里，前一式中的 $a_{长}$ 和 $b_{长}$，分别是用长曲边量梯形的上底和下底所得的倍数；后一式中的 $a_{长}$ 是用长曲边量三角形底边所得的倍数；两式中的 $h_{短}$ 是用短曲边量高所得的倍数．

三　试验田截积

农业科学试验中，有时需要在一块大田内划出一定面积的试验地，这种问题就是试验田截积问题．下面我们以三角形和梯形为例，研究试验田截积的计算．

1　三角形截积

如图 1-9，怎样在 $\triangle ABC$ 中截得一个 $\triangle AB_1C_1$ 使 $B_1C_1 /\!/ BC$，且 $\triangle AB_1C_1$ 的面积等于给定的面积 S_1 呢？

设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，由 $B_1C_1 /\!/ BC$ 知

$$\triangle AB_1C_1 \backsim \triangle ABC,$$

故

$$\frac{\triangle AB_1C_1\text{的面积}}{\triangle ABC\text{的面积}}=\left(\frac{AB_1}{AB}\right)^2$$

$$=\left(\frac{AC_1}{AC}\right)^2,$$

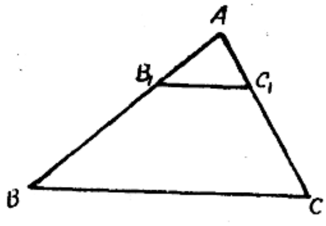

图 1-9

于是

$$AB_1 = AB\sqrt{\frac{S_1}{S}},\quad AC_1 = AC\sqrt{\frac{S_1}{S}}.$$

这样，就可根据 AB_1 和 AC_1 的长度，找到 B_1、C_1 两点，从而截得所需要的面积 S_1.

如图 1-10，如果接下去还要截取一块面积为 S_2 的梯形 $B_1C_1C_2B_2$，应该怎么截取呢？

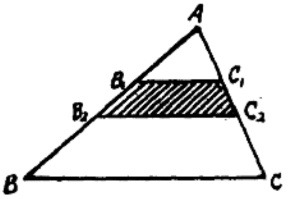

图 1-10

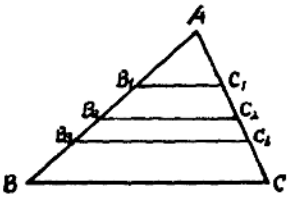

图 1-11

我们知道，$\triangle AB_2C_2$ 的面积 $=S_1+S_2$，所以在 $\triangle ABC$ 中截取 $\triangle AB_2C_2$ 时，只需令

$$AB_2 = AB\sqrt{\frac{S_1+S_2}{S}},\quad AC_2 = AC\sqrt{\frac{S_1+S_2}{S}}.$$

这时，$B_1C_1C_2B_2$ 的面积便是 S_2. 同理，如果需要以平行于底边 BC 的直线将 $\triangle ABC$ n 等分（图1-11），则可以再接着截取 S_3，S_4，$\cdots$，S_n. 这时

$$S_1 = S_2 = \cdots = S_n = \frac{S}{n},$$

而各分点应有如下关系：

$$AB_i = AB\sqrt{\frac{i}{n}},\quad (i=1, 2, \cdots, n-1);$$

$$AC_i = AC\sqrt{\frac{i}{n}},\quad (i=1, 2, \cdots, n-1).$$

根据这两个关系式便可以确定各分点 B_i 和 C_i，从而截得所需要的面积 S_i.

2 梯形截积

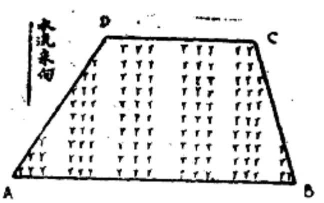

图 1-12

为使试验田通风、透光、便于灌溉和管理，试验田的沟厢通常视具体条件开为直厢或横厢. 下面介绍开为横厢或直厢的截积方法.

(1) 直厢式

如图 1-12 所示，根据水流来向，需要用垂直于 AB 的直线去截梯形 $ABCD$，使截下的部分为给定面积 S_1. 这种开厢方式称为直厢式.

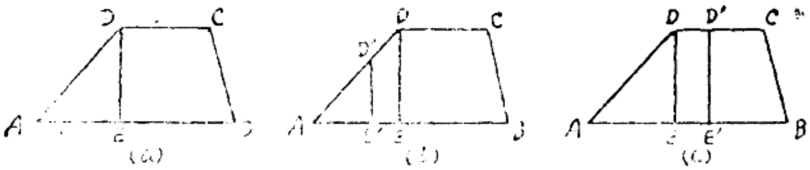

图 1-13

如图1-13，作 $DE\perp AB$，记$\triangle AED$的面积为 S_0.

1° $S_1=S_0$

这时 $\triangle AED$ 即为所求．如图1-13(a).

2° $S_1<S_0$

这时只须按三角形截积方法，在 $\triangle AED$ 中作 $D'E'\parallel DE$，使$\triangle AE'D'=S_1$．见图1-13(b).

3° $S_1>S_0$

在直角梯形 $DEBC$ 中截取一矩形 $DEE'D'$，使矩形 $DEE'D'$ 的面积 $=S_1-S_0$，也就是在 EB 上截取

$$EE'=\frac{S_1-S_0}{DE}.$$

同样，在 DC 上截取 $DD'=EE'$，这时梯形 $AE'D'D$ 即为所求．见图1-13(c).

（2）横厢式

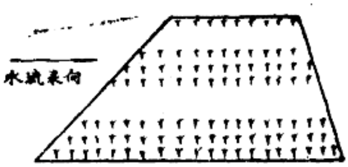

图1-14

如图1-14所示，根据水流来向，需要用平行于底边的直线去截梯形，使截下的部分为给定面积．这种开厢方式称为横厢式．横厢式截积一般又分为两种情况：一种是从小头（即通常所说的上底）截起（图1-15），另一种是从大头（即通常所说的下底）截起（图1-16）．它们的截积公式分别是：

1° 从小头截起

$$\text{应截底}=\sqrt{\text{上底}^2+\frac{2\times\text{应截面积}\times(\text{下底}-\text{上底})}{\text{高}}};$$

$$\text{应截高}=\frac{2\times\text{应截面积}}{\text{上底}+\text{应截底}}.$$

2° 从大头截起

$$\text{应截底}=\sqrt{\text{下底}^2-\frac{2\times\text{应截面积}\times(\text{下底}-\text{上底})}{\text{高}}};$$

$$\text{应截高}=\frac{2\times\text{应截面积}}{\text{下底}+\text{应截底}}.$$

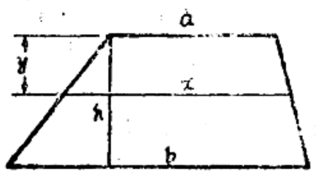

图 1-15

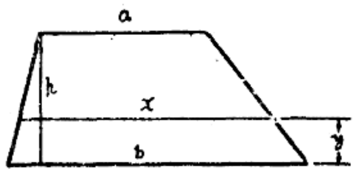

图 1 16

这些截积公式是怎样导出的呢？

设从小头截起的应截面积为 S_1，依题意，可得

$$\begin{cases} \dfrac{a+x}{2}\cdot y=S_1 \\ \dfrac{x+b}{2}\cdot(h-y)=\dfrac{a+b}{2}\cdot h-S_1 \end{cases}$$

解此方程组，得

$$x=\sqrt{a^2+\frac{2S_1(b-a)}{h}},\qquad y=\frac{2S_1}{a+x}.$$

这便是从小头截起的截积公式．

同理，可以推出从大头截起的截积公式（略）．

例 红光大队第一生产队有一块梯形田，丈量结果如图 1-17 所示（单位：米）．现计划分成相等的三块来试种不同品种的小麦，试分别用横厢式和直厢式来截积，以供选用．

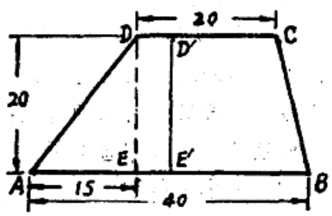

图 1-17

解 (1) 直厢式

梯形面积 $S=\dfrac{1}{2}\times(20+40)\times20$

$=600(\text{米}^2)$，

故

$$\text{应截面积}S_1=\frac{1}{3}\times600=200(\text{米}^2).$$

又因

$$\triangle AED\text{ 的面积}=\frac{1}{2}\times20\times15=150(\text{米}^2)<200(\text{米}^2),$$

故在 EB 上应截取

$$EE'=\frac{200-150}{20}=2.5(\text{米}).$$

同样，在 DC 上截

$$DD'=2.5\text{米}.$$

这时梯形 $AE'D'D$ 便是所要截的一块．其余两块截法从略．

(2) 横厢式

从小头起

$$\text{应截底}=\sqrt{20^2+\frac{2\times200\times(40-20)}{20}}\approx28.28(\text{米})；$$

$$\text{应截高}=\frac{2\times200}{20+28.28}\approx8.29(\text{米}).$$

从大头起

$$\text{应截底}=\sqrt{40^2-\frac{2\times200\times(40-20)}{20}}\approx34.64(\text{米})；$$

$$\text{应截高}=\frac{2\times200}{40+34.64}\approx5.4(\text{米}).$$

§2 平整土地

平整土地，有利于实现水利化、机械化，是确保农业增产的有力措施．在农业学大寨的群众运动中，广大贫下中农掀起了农田基本建设新高潮，他们想大的，干大的，决心重新安排山河，坡地改梯田，旱地改水田，小田并大田，大搞平整土地，建设人造平原，为适应农业机械化、水利化，促进农业大上快上，创造了条件．本节，我们将介绍有关平整土地的测量，土方计算及坡改中的一些计算知识．

一 平整土地测量

平整土地，实际上就是把小田并成大田，把高低不平的地平整成大平田，为了平整，必须先用测量仪器测出地形的高低差，以便挖高填低．

设 Q 是一块要平整的土地，靠近 Q 的边界取一条干线 AB，在 AB 上量出等长线段 $D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4, \cdots$ 通过各分点 $D_1, D_2, D_3, D_4, \cdots$ 作 AB 的垂线，从分点起在这些垂线上量取长度等于 D_1D_2 的线段，并在线段端点钉上木桩．这时相邻各木桩的联线划分地面 Q 成正方形网（图1-18）．测量时，将水准仪放在各方格中间（最好是中心），由同一点出发对四个角顶进行水准测量，把测得的读数填入下表．

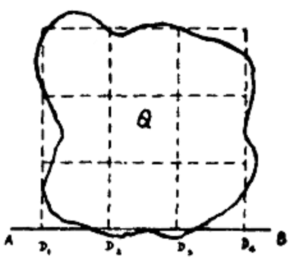

图 1-18

表1-2 （单位：厘米）

28	61	117	115	105	166
1		2		3	
126	128	184	174	164	220
					163
				4	
				227	252
296	346	174	194	207	232
7		6		5	
336	409	237	248	261	174

读数是否精确，可以这样核对：同一方格中相邻两点的读数差（高差），应当和相邻格子中相应两点的读数差相同．如对于格子 2 和 3 公共的两点有

$$174-115=164-105, \text{此即}\quad 174+105=164+115,$$

这就表明內错角上两点读数的和应当相等．得出各测点的读数后，便可算出它们的高程．

设巳知第 1 格左上角的高程为 10 米．我们知道，测点的高程等于一点的巳知高程減去这点与测点的水平读数之差．由此便知，在第 1 格內，左下角的高程是

$$10-(1.26-0.28)=9.02\ (\text{米})\ ;$$

右上角的高程是

$$10-(0.61-0.28)=9.67\ (\text{米})\ ;$$

右下角的高程是

$$10-(1.28-0.28)=9\ (\text{米})\ .$$

算出了第 1 格右边两点的高程，同时也就知道了第 2 格左边两点的高程．从这两高程出发，同样可以计算出第 2 格右边两点的高程；依次计算下去，即可得到各测点的高程，例如第 4 格右下角的高程为

$$8.54-(2.52-1.63)=7.65.$$

各测点的高程如表 1-3 所示．

表 1-3

10.00	9.67	4.69	9.08
1	2		3
9.02	9.00	9.10	8.54
			4
8.60	8.10	7.90	7.65
7	6		5
8.20	7.47	7.36	8.23

利用测点高程表便可计算各测点的填土高度或挖土深度.

设预定场地平整后，全场的高程为 9 米，那么第 1 格左上角应挖土

$$10.00-9.00=1.00\ (\text{米}),$$

记作 -1.00；第 4 格右下角应填土

$$9.00-7.65=1.35\ (\text{米}),$$

记作 $+1.35$；类似地算出各测点的挖土深度和填土高度，得表 1-4.

表 1-4

-1.00		-0.67		-0.69		-0.08
	1		2		3	
-0.02		0		-0.10		+0.46
	8		9		4	
+0.40		+0.90		+1.10		+1.35
	7		6		5	
+0.80		+1.53		+1.64		+0.77

按照这个表，将各测点的挖土深度或填土高度写在相应测点的木桩上，便可作为施工的依据.

二　土方计算

知道各测点挖土深度或填土高度后，如何估计各方格内应挖或应填的土方呢？

如图 1-19，设方格 A、B、C、D 四顶点处应挖的土深（或填高）分别为 a、b、c、d，即 $A_1A=a$, $B_1B=b$, $C_1C=c$, $D_1D=d$. 这时，柱体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积，可由一长方体的体积近似估计. 这个长方体的底是 $ABCD$，而高是平均值 $H=\frac{a+b+c+d}{4}$. 因此，挖（填）方数可由下式近似估计：

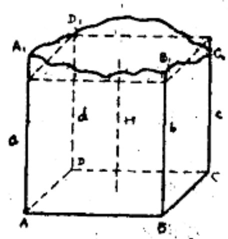

图 1-19

$$V=SlH.$$

式中 S 表示底面 $ABCD$ 的面积.

由表 1-4 可知，1、2 格应挖土，5、6、7 格应填土，这时都可按上述公式计算土方. 至于第 3、4、8、9 方格既有挖方也有填方，这些格子内应挖或应填的土方，一般依具体情况另行计算或凭经验估计（在小范围内）. 如第 4 方格内有三个桩号是填土，一个桩号是挖土，且挖土不深，这时可视实际情况取平均值

$$\frac{1.10+1.35+0.46}{3}=0.97$$

或

$$\frac{1.10+1.35+0.46-0.10}{4}\approx 0.70$$

作为高来估计土方数.

三　平整土地的标高计算

在平整土地时，为了有计划地挖高填低，事先需要预定平整后的高程（贫下中农叫它为标高）．下面是随县安居中学在开门办学中碰到的一个梯地改平畈的实际例子．

例 1　车岗大队四生产队拟将六块梯地改为平畈，测得每块地的高程及其面积如下表所示（按高程由小到大顺次编号）：

表 1-5

田块编号	1	2	3	4	5	6
高　程(米)	0	0.04	0.19	0.39	0.56	0.61
面积 ($米^2$)	864	1392	810	515	432	304

现在要求挖高填低，并使土方平衡，试求平整后的高程．

解　设预定平整后的高程为 x．如果规定填方为正，挖方为负，则填方和挖方的和为零（填、挖方平衡），即

$$864(x-0)+1392(x-0.04)+810(x-0.19)+515(x-0.39)+$$
$$+432(x-0.56)+304(x-0.61)=0.$$

解此方程，得 $x=0.194$（米）．由此可以算出填、挖方分别为

填方：$864(0.194-0)+1392(0.194-0.04)+810(0.194-0.19)\approx 385$(方)；

挖方：$515(0.194-0.39)+432(0.194-0.56)+304(0.194-0.61)\approx -385$(方)．

必须指出，按照以上标高进行平整时，实际上挖方的土将有多余，这是因为在高处挖一方土（叫做死土），一般可以填低处一立方米以上的空间（填时需要的土叫做活土）．因此，在平衡土方时，应当使挖方乘以一个大于 1 的系数．这个系数就是活土方与死土方的比率，我们称它为松散系数，用字母 η 表示．根据各地施工经验，一般 η 值在 1.1～1.2之间．

现在取松散系数 $\eta=1.2$．我们来考虑如何求出例 1 的标高．下面不妨采用试算法．先假定标高 x 属于区间[0.04，0.19)．这时，第 1、2 两块地需要平整的土方非挖方，其值非负，而第 3、4、5、6 四块地需要平整的土方为挖方，其值为负，应乘以松散系数 1.2．于是，标高 x 应满足于方程

$$864(x-0)+1392(x-0.04)+1.2[810(x-0.19)+515(x-0.39)+$$
$$+432(x-0.56)+304(x-0.61)]. \quad (1)$$

这是关于 x 的一次方程，可改写为

$$[(864+1392)+1.2(810+515+432+304)]x-[(864\times 0+1392\times 0.04)+$$
$$+1.2(810\times 0.19+515\times 0.39+432\times 0.56+304\times 0.61)]=0.$$

解之，得

$$x=\frac{(864\times 0+1392\times 0.04)+1.2(810\times 0.19+\cdots+304\times 0.61)}{(864+1392)+1.2(810+\cdots+304)}$$

$$=\frac{994.212}{4729.2}\approx 0.210.$$

这是标高的唯一可能解．由于 0.210 不属于区间 [0.04, 0.19)，即与假定相矛盾，可见上述标高 x 属于区间 [0.04, 0.19) 的假定不成立．给出几何解释就是，直线

$$y=4729.2x-994.212$$

交 OX 轴于点 $x=0.210$，这个点不属于区间 [0.04, 0.19)，即不是线段 AB 与 OX 轴的交点，而是线段 AB 的延长线与 OX 轴的交点（见图 1—20）．

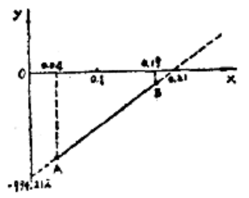

图 1-20

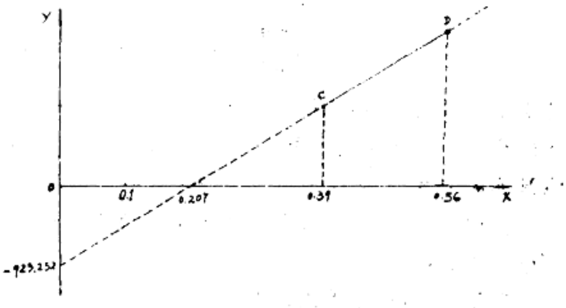

图 1-21

类似地，如果我们假定标高 x 属于区间[0.39, 0.56)，则得到

$$x=\frac{(864\times 0+1392\times 0.04+\cdots+515\times 0.39)+1.2(432\times 0.56+304\times 0.61)}{(864+1392+\cdots+515)+1.2(432+304)}$$

$$=\frac{923.252}{4464.2}\approx 0.207.$$

显然，这个假定也不成立．其几何意义见图 1－21．

再假定标高 x 属于区间[0.19, 0.39)，将得到

$$x=\frac{(864\times 0+\cdots+810\times 0.19)+1.2(515\times 0.39+\cdots+304\times 0.61)}{(864+1392+810)+1.2(515+432+304)}$$

$$=\frac{963.432}{4567.2}\approx 0.211.$$

这里，$x=0.211$ 属于区间[0.19, 0.39)，故确为所求的标高（图 1-22）．

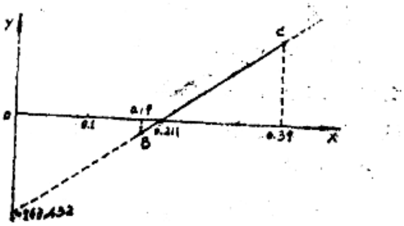

图 1－22

从以上例子我们得到启示，关于平整土地的标高计算，可以抽象为如下的数学问题．

设已给两列正数

$$h_1<h_2<\cdots<h_n,$$

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$$

和常数 $\eta>1$，要求一个正数 x，使得下列各数

$$s_1(x-h_1),\ s_2(x-h_2),\ \cdots,\ s_n(x-h_n) \tag{1-2}$$

中的非负数之和加上负数之和乘以常数 η 的积为零.

为便于问题的研究，我们在区间$[h_1,\ h_n]$上定义一个函数：

$$f(x)=\begin{cases} s_1(x-h_1)+\eta\sum\limits_{i=2}^{n}s_i(x-h_i) & (h_1\leqslant x<h_2) \\ s_1(x-h_1)+s_2(x-h_2)+\eta\sum\limits_{i=3}^{n}s_i(x-h_i) & (h_2\leqslant x<h_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sum\limits_{i=1}^{k}s_i(x-h_i)+\eta\sum\limits_{i=k+1}^{n}s_i(x-h_i) & (h_k\leqslant x<h_{k+1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}s_i(x-h_i)+\eta s_n(x-h_n) & (h_{n-1}\leqslant x\leqslant h_n) \end{cases}$$

这个函数概括了序列(1-2)中非负数之和加上负数之和乘以常数 η 的积的各种可能情形，我们称它为平整函数. 因此，我们的问题就是要求某个分段区间上的一个数 x 使得平整函数 $f(x)=0$.

显然，如果 h_i 和 s_i 分别表示平整地块的高程和面积，则满足上述条件的数 x 就是平整后的高程.

例如，例1的平整函数是

$$f(x)=\begin{cases} 864(x-0)+1.2[1392(x-0.04)+810(x-0.19)+\cdots+ \\ \qquad +304(x-0.61)] \quad (0\leqslant x<0.04) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 864(x-0)+\cdots+810(x-0.19)+1.2[515(x-0.39)+ \\ \qquad +\cdots+304(x-0.61)] \quad (0.19\leqslant x<0.39) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 864(x-0)+1392(x-0.04)+\cdots+482(x-0.56)+ \\ \qquad +1.2[304(x-0.61)] \quad (0.56\leqslant x<0.61) \end{cases}$$

它的图象如图 1-28.

平整函数具有以下重要性质：

定理1 平整函数 $f(x)$ 是严格递增的连续函数.

证明 (1) 连续性 因为$f(x)$在它定义域的各分段区间上是一次函数，故它在各分段区间上是连续的. 显然，在各分段区间的端点处也是连续的.

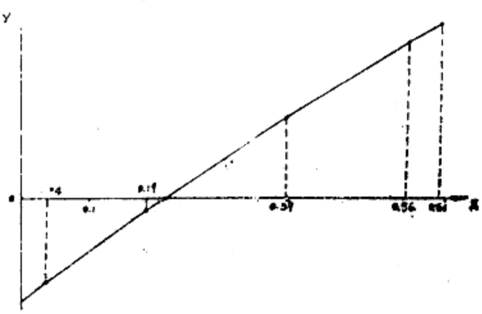

图 1-23

(2) 递增性 对于定义域内的任意一点 x：$h_k\leqslant x<h_{k+1}(k=1,2,\ \cdots,\ n-1)$，都有