

高等学校教材

数值分析

·上册·

孙庆新 等 编著

东北工学院出版社

0241
44/1

数 值 分 析

(上 册)

孙庆新 齐秉寅 张树功 编著
张利民 张 铁 阎家斌

东北工学院出版社

内 容 简 介

全书共十五章。第一章是为了帮助读者顺利学习本书的内容而编写的基础知识。第二至第十一章，着重介绍常用的计算方法及有关的理论。第十二至十五章是为了进一步提高读者的解题能力、分析能力以及在计算机上上机计算的能力，而编选的自学内容。全书共分上下两册。

该书内容丰富，取材精炼，重点突出，推导详细，数值计算例子较多。内容安排由浅入深，各节都有复习思考题，便于教学。本书可作高等工科院校非计算专业的高年级学生和研究生的教材，也可供从事数值计算的科技工作者参考。

数 值 分 析 (上册)

孙庆新 等编者

东北工学院出版社出版
(沈阳·南湖)

辽宁省新华书店发行
东北工学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张：20.25 字数：500 千字
1990 年 8 月第 1 版 1990 年 8 月第 1 次印刷

印数：1~3000

责任编辑：朱玉琰

责任校对：科 志

封面设计：唐敏智

ISBN 7-81006-104-6/O·10

定价：4.35 元

前

言

各个学科领域,各种科学技术在其开发与研究的过程中,经常要把研究的问题数学模型化,计算数学模型,分析计算数据提供的信息。在计算数学模型时,怎样选择和使用适当的计算方法,怎样正确地对待计算结果并估计误差,怎样处理和解释计算过程中的异常现象等等,都是科技工作者需要解决的问题。因此,在培养各层次科技人材时,需要有相应的教学环节培养他们的科学计算能力。由于这一原因,在各大专院校非计算数学专业的理工科的高年级学生和研究生中,现已普遍设置了《数值分析》课。

本书是作者在总结多年教学经验的基础上编写而成的。读者对象是高等院校非计算数学专业的高年级学生、研究生和进行科学计算工作的科技人员。凡具有高等数学和线性代数知识的读者,都具有学习本书的条件。

《数值分析》亦称《计算方法》。它不是计算数学的学科,而是为了使读者在较短的时间内,掌握计算数学的几个不同学科的基本内容和基本方法而设置的一门综合性课程。各章内容有一定独立性,但是我们希望读者要注意到:第一,非线性方程(组)求根、线性方程组的数值解法以及函数插值与逼近,几乎是各种科学计算的“基础性计算”。第二,在解决任一个具体的数值计算的课题时,从算法的角度看,都带有综合性,譬如计算一个偏微分方程的定解,全离散后要解一个线性方程组,半离散后常常要解常微分方程组,因此,对于只学习本书部分内容的读者,应当对有关问题作进一步的了解。

为了使读者牢牢掌握这一科学研究和工程设计中的有力工具,并在此基础上能阅读有关文献,学习一些更新、更广以及更深的内容,以促进科学技术的发展,本书力求全面系统地介绍各类数值问题的基本解法和基本理论,同时还增加了基础知识、例题选讲和程序设计方法四章辅导性的内容。全书共分两册出版。

全书共十五章,其中理论部分约需授课 90 学时,如果删去第一章 §3 至 §5 以及第十和第十一两章,则需 60 学时左右。

书中的第一章和第六至第十一章由孙庆新编写,第二至第五章由齐秉寅编写,第十二至第十五章由张树功、张利民、张铁和阎家斌选编而成。我们希望读者在阅读本书后,提出宝贵的意见。

本书在编写的过程中得到东北工学院研究生院和东北工学院出版社的支持,也得到吉林大学冯果忱、黄明游两位教授的指教,作者在此谨致谢意。

作 者

1988 年 7 月

符号说明

$\in$	元素属于...
$\notin$	元素不属于...
$\forall$	任意的
$\triangleq$	定义为...
$\cup$	集合的并
$\cap$	集合的交
$\subset$	包含于..., 被包含于...
$\top$	转置
H	共轭转置
$\perp$	正交
$\min$	最小值
$\max$	最大值
$\inf$	下确界, 下界中最大者
$\sup$	上确界, 上界中最小者
δ_{ij}	Kronecker 符号, 即
	$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$
$\text{Sgn}x$	函数符号, 即
	$\text{Sgn}x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \geq 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$
Δ	Laplace 算符, 即
	$\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
D	梯度, 即
	$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right)^T$
Δu_i	向前差分, 即
	$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$
∇u_i	向后差分, 即
	$\nabla u_i = u_i - u_{i-1}$
δu_i	中心差分, 即
	$\delta u_i = u_{i+1} - u_{i-1}$
$(\ , \)$	内积
$(\ , \)_p$	p 意义下的内积

$\ \cdot\ $	范数或模
$\ \cdot\ _p$	p 意义下的范数或模
R^n	全体 n 维实向量组成的集合
C^n	全体 n 维复向量组成的集合
$R^{m \times n}$	全体 $m \times n$ 阶实矩阵组成的集合
$C^{m \times n}$	全体 $m \times n$ 阶复矩阵组成的集合
$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	以 $d_1, \dots, d_n$ 为主对角元素的对角矩阵
$\det(A) = A $	n 阶矩阵 A 的行列式
$\rho(A)$	n 阶矩阵 A 的谱半径
$\text{tr}(A)$	n 阶矩阵 A 的迹
$C^k[a, b]$	在 $[a, b]$ 上具有连续的 1 至 k 阶导数的函数组成的集合
$L_2[a, b]$	在 $[a, b]$ 上平方可积的函数组成的集合
$H^k[a, b]$	在 $[a, b]$ 上具有 1 至 k 阶广义导数的函数组成的集合
$\text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$	由线性无关的元素 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ 的任意线性组合组成的集合
$\sum$	和
$\prod$	连乘

目 录

第一章 基础知识

§ 1 向量空间 R^n	(1)
1.1 线性相关, 基底和子空间	(3)
1.2 向量的内积	(6)
1.3 向量的模	(8)
§ 2 矩阵的基本理论	(11)
2.1 $R^{m \times n}$ 空间	(13)
2.2 基本理论	(16)
2.3 $R^{n \times n}$ 空间的范数	(23)
2.4 特征值的估计	(28)
§ 3 函数空间	(31)
3.1 L_2 空间	(31)
3.2 收敛性	(33)
§ 4* 几个导数与泛函数概念	(37)
4.1 $y=f(x)$ 的导数	(37)
4.2 广义导数	(38)
4.3 线性算子与线性泛函	(42)
§ 5 正交函数系	(45)
5.1* Sturm-Liouville 本征值问题	(47)
5.2 常用的几个正交函数系	(48)
§ 6 几个典型问题	(50)
§ 7 数值计算与误差	(53)
7.1 误差限和有效数字	(54)
7.2 误差估计的基本方法	(56)
7.3 数值计算中的注意事项	(58)

第二章 非线性方程求根

§ 1 二分法	(61)
§ 2 迭代法	(63)
2.1 迭代程序	(63)
2.2 迭代法的收敛性	(65)
2.3 迭代过程的改善	(67)
§ 3 Newton 迭代方法	(71)
3.1 Newton 迭代格式	(71)
3.2 Newton 迭代法的收敛性	(72)
3.3 Newton 迭代法的变形	(74)
习 题	(79)

第三章 解线性方程组的直接方法

§ 1 Gauss 消去法	(83)
1.1 Gauss 消去法	(84)
1.2 消去法与矩阵的初等变换	(86)
1.3 Gauss 列主元消去法	(87)
§ 2 矩阵的三角分解	(90)
2.1 系数矩阵的三角分解	(90)
2.2 解线性方程组的直接分解法	(92)
§ 3 Gauss 消去法的变形	(95)
3.1 Gauss-Jordan 消去法	(95)
3.2 对称正定矩阵的平方根法	(97)
3.3 解三对角方程组的追赶法	(99)
§ 4* 线性方程组的性态与误差分析	(102)
4.1 线性方程组的固有性态	(102)
4.2* 列主元消去法的舍入误差分析	(104)
4.3 数值解的迭代改善	(104)
习 题	(110)

第四章 解线性方程组的迭代法

§ 1 迭代方法	(120)
1.1 J 方法与 GS 方法	(120)
1.2 迭代方法的一般格式	(124)
§ 2 迭代方法的收敛性	(125)
2.1 迭代方法的收敛性及其判定	(125)
2.2 J 方法与 GS 方法的收敛性判定	(127)
§ 3 逐次超松弛迭代法——SOR 方法	(130)
3.1 SOR 方法的引出	(131)
3.2 SOR 方法的收敛性	(131)
§ 4* 分块迭代法	(135)
§ 5* 最速下降法与共轭斜量法	(138)
5.1 等价问题	(139)
5.2 最速下降法	(140)
5.3 共轭斜量法	(141)
§ 6 非线性方程组的数值解法	(145)
6.1 解非线性方程组的一般迭代法	(146)
6.2 Newton 迭代法	(148)
6.3* 拟 Newton 法	(150)
6.4* 下降法	(153)
习 题	(158)

第五章 矩阵特征值问题的数值解法

§ 1 乘幂法与反幂法	(167)
-------------------	-------

1.1 乘幂法	
1.2 反幂法	(1)
§ 2 Jacobi 方法	(176)
2.1 平面 (初等) 旋转矩阵	(176)
2.2 Jacobi 方法	(179)
2.3 改进 Jacobi 方法	(180)
§ 3* QR 方法	(181)
3.1 平面反射矩阵及其性质	(181)
3.2 QR 分解定理	(183)
3.3 QR 方法计算过程	(185)
3.4 矩阵的准三角化	(185)
3.5 带有“位移”的 QR 算法及双步的 QR 算法	(186)
3.6 QR 过程的算法步骤	(190)
§ 4* 广义特征值问题	(192)
4.1 直接约化方法	(192)
4.2 反幂法	(194)
习 题	(197)

第六章 函数的插值方法

§ 1 引 言	(203)
§ 2 Lagrange 插值多项式	(205)
2.1 插值余项	(207)
2.2 误差的事后估计	(208)
2.3 插值多项式的稳定性	(209)
§ 3 Newton 插值公式	(211)
3.1 Newton 基本插值公式	(211)
3.2 均 差	(212)
3.3 Newton 插值余项公式	(215)
3.4 差 分	(216)
3.5 Newton 插值公式的变形	(219)
3.6 反插值问题	(221)
§ 4 Hermite 插值	(222)
§ 5* 三角插值	(226)
5.1 三角函数插值	(226)
5.2 复函数的三角插值与离散的 Fourier 变换	(229)
5.3 快速 Fourier 变换 (FFT)	(230)
5.4 实序列的 FFT 算法	(233)
§ 6 分段插值多项式	(234)
6.1 分段 Lagrange 型插值多项式	(235)
6.2 分段 Hermite 型插值多项式	(238)
6.3 分段插值函数类	(241)
§ 7 三次样条插值	(241)

7.1 三次样条插值	(242)
7.2 误差估计	(246)
习 题	(248)

第七章 曲线拟合与函数逼近

§ 1 引 言	(253)
§ 2 曲线拟合的最小二乘法	(255)
2.1 函数类的选择	(256)
2.2 正则方程组	(259)
2.3 正交多项式在最小二乘法中的应用	(262)
§ 3* 函数逼近	(266)
3.1 最佳均方逼近	(266)
3.2 最佳一致逼近	(270)
习 题	(274)

第八章 数值微分与积分

§ 1 引 言	(279)
§ 2 数值微分	(280)
2.1 利用插值多项式求导	(280)
2.2 用三次样条插值函数求导	(281)
§ 3 插值型积分公式	(282)
3.1 插值型求积公式	(283)
3.2 代数精度	(287)
3.3 复化求积公式	(289)
3.4 事后误差估计	(292)
3.5 二重积分的算法	(293)
§ 4 外推算法	(293)
4.1 Richardson 外推算法	(294)
4.2 Romberg 积分	(295)
§ 5 Gauss 型求积公式	(298)
5.1 Gauss-Legendre 求积公式	(300)
5.2 Gauss-Laguerre 求积公式	(302)
5.3 Gauss-Hermite 求积公式	(302)
5.4 Gauss-Chebyshev 求积公式	(303)
5.5 Gauss 型求积公式的稳定性	(303)
§ 6 广义积分的计算	(304)
6.1 无界函数的广义积分	(305)
6.2 无界区间上的广义积分	(308)
习 题	(310)

第一章 基础知识

本章的内容由两部分组成：其中之一是从线性代数和高等数学中收集的在以后各章中常要用到的基础知识，并做适当的补充；另一部分是分析几个数值分析的典型问题。编写本章的目的是帮助读者能顺利地学习本书的内容，并能初步了解数值分析研究的主要问题。

§1 向量空间 R^n

n 维向量的概念是三维 Euclid 空间中向量表示方法的一种自然推广。取定空间直角坐标系，任何一个三维向量 x 有三个分量 x_1 、 x_2 和 x_3 。反之，一组有顺序的三个实数 x_1 、 x_2 和 x_3 可看作向量的三个分量，即对应一个向量 x 。这样，三维向量 x 与一组有顺序的实数之间是一一对应的。把这三个有顺序的实数写成列的形式或行的形式，就是列向量或行向量。记作

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

或 $x = (x_1, x_2, x_3)$

利用转置符号 T ，有

$$(x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

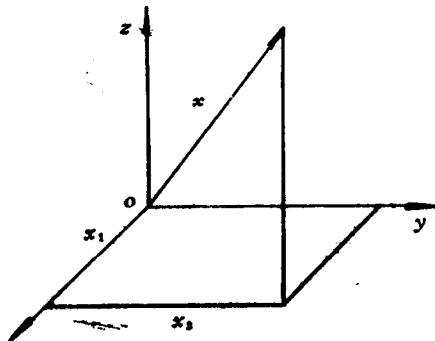


图 1-1

显然，三维空间的点 P 和向量 x 之间的关系非常密切，它们虽然不同，但是也常常用向量 x 表示点 P 。两个向量 x 和 y 相等，当且仅当它们的各个对应的分量相等。这样，向量相等

$$x = y$$

相当于

$$x_i = y_i \quad i = 1, 2, 3.$$

所有的定义在实数域 R 上的三维向量组成一个集合 R^3 。在此集合上，根据向量相加遵循平行四边形法则和向量 x 的 α 倍得到的向量 y 的分量是 x 的各分量的 α 倍，就可以在 R^3 上定义两种运算：

(1) $\forall x, y \in R^3$ ， x 与 y 的和是向量 c ，即

$$x + y = c$$

它们的分量之间有

$$c_i = x_i + y_i \quad i = 1, 2, 3.$$

(2) 任何实数 α 与向量 x 的乘积是向量 c ，记作

$$\alpha x = c$$

c 的分量由下式给出

$$c_i = \alpha x_i \quad i = 1, 2, 3.$$

根据两种运算的定义, 很容易看出这两种运算具有下列性质:

- (1) 满足交换律 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- (2) 满足结合律 $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
 $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$
- (3) 满足分配律 $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$
 $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$
- (4) 存在加法零元素和加法逆元素, 即 $\forall \mathbf{x} \in R^3$, 有
 $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
 $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

其中 $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$, $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)^T$.

- (5) 存在与数量乘法的单位元素, 即

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

性质(4)和(5)等价于 $\forall \alpha, \beta \in R, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3$, 则有

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in R^3$$

上式称作封闭性方程。

这样, 我们看到三维 Euclid 空间的特点。把它们抽象化, 也就是说, 按某种规律在集合 X 上定义和及与数量的乘积, 并要求这两种运算满足性质(1)至(5)的要求(把性质(1)至(5)当作公理), 就得到线性空间的概念。

定义 1 设 X 是一个集合。如果在 X 上能定义两个元素的加法及与实数的乘法, 并且具有(1)至(5)的性质, 则称 X 是实数域上的线性空间。也称作向量空间。

不同的数学问题, 由于研究的对象不同, 所涉及的线性空间也不相同。即不同的数学问题需要在特定的线性空间上进行讨论。有时也用到复数域上的线性空间。

例 1 n 阶实矩阵的全体组成集合 $R^{n \times n}$ 。由线性代数知 $R^{n \times n}$ 是一个线性空间。

例 2 在 $[a, b]$ 上定义的具有 1 至 k 阶连续导数的函数 $f(x)$ 的全体组成集合 $C^k[a, b]$ ($k=1, 2, \dots$)。由高等数学的有关知识得知, 它是一个线性空间。

上述例子也说明线性空间的元素不一定是向量。

把三维向量概念直接推广, 得到 n 维向量的概念。

定义 2 一个 n 维向量 $\mathbf{x}$ 是一组按顺序排列成列的 n 个实数, 即

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

数 x_i 叫作 $\mathbf{x}$ 的第 i 个分量 ($i=1, 2, \dots, n$)。

上述 n 维向量, 也叫列向量, 其转置是行向量, 即

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

当 n 取定以后, n 维向量的全体组成集合 R^n 。在此集合 R^n 上, 完全仿照三维向量那样, 去定义向量的加法及与任意实数 α 的乘积。即

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{c} \tag{1}$$

$\mathbf{c}$ 的分量由下式给出:

$$c_i = x_i + y_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\alpha x = b$$

(2)

b 的分量由下式给出:

$$b_i = \alpha x_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

读者很容易证明此二种运算满足性质(1)至(5)的要求, 因此, 称 R^n 是 n 维向量空间。我们也把 x 当作 R^n 的一个点。当 $n > 3$ 时, 已经没有直观性。

有时, 我们也用到 n 维复向量。如果向量 x 的 n 个分量是复数, 则称 x 是复向量。全体复向量组成集合 C^n 。显然有 $R^n \subset C^n$ 。对于复向量而言, 仍然可以仿照(1)和(2)去定义复向量的加法及与数量的乘法。这样, C^n 也是一个线性空间, 我们称 C^n 是定义在复数域上的 n 维复向量空间。

$x \in C^n$, 把 x 的分量换成共轭复数, 得到的向量 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ 是 x 的共轭向量, 而 $(\bar{x})^T$ 称作 x 的共轭转置向量, 记作

$$x^H = (\bar{x})^T = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

1.1 线性相关、基底和子空间

线性相关性的概念是一个重要的数学概念。在线性代数中, 曾用此概念描述 m 个 n 维向量 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 之间的关系。又知在 m 阶线性齐次常微分方程中, 不同的特征根对应的解彼此线性无关。两者涉及的线性空间不同, 前者是 R^n , 后者是 $C^m[a, b]$ 。现在, 我们在线性空间 X 中, 给出它的定义。

定义 3 设 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 是线性空间 X 的 m 个元素。则称

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \quad (3)$$

是 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的线性组合, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是线性组合的系数。如果 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, 则称这个线性组合是平凡的, 否则, 是非平凡的。

例 3 在线性空间 $C^m[a, b]$ 中取元素 $1, x, x^2, \dots, x^k$ 。由此 $k+1$ 个元素组成的形如: $\varphi(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i$, 是 $1, x, \dots, x^k$ 的一个线性组合。

例 4 取 $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, 即 e_i 仅在第 i 个分量是 1, 其它分量都是零 ($i = 1, 2, \dots, n$)。显然, $\forall x \in R^n$, 有

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

定义 4 设 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset X$ 。如果 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的非平凡的线性组合都不是零元素, 则称此 m 个元素是线性无关的。否则, 是线性相关的。

线性无关的一个等价的定义是: 如果 $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0$, 则 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ 。

因此, 要证明 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 线性无关, 只要假定 $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$, 然后证明 $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$ 即可。其次, 只要其中有零元素, 则 $x_1, \dots, x_m$ 是线性相关的。

例 5 在 R^n 中, 假定

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

则得 $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 故 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性无关。

例 6 证明 $1, x, \dots, x^k$ 是 $C^k[a, b]$ 的一组线性无关函数。

证明 如果有 $\alpha_i (i=0, 1, \dots, k)$ 使

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k = 0$$

成立。那么，在 $[a, b]$ 取 $k+1$ 个不同点 $x_j (j=0, 1, 2, \dots, k)$ ，则有线性方程组

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i (x_j)^i = 0 \quad j=0, 1, \dots, k$$

由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^k \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq k} (x_i - x_j) \neq 0$$

所以线性方程组只有零解，即 $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ ，亦即 $1, x, \dots, x^k$ 线性无关。

定理 1 设 $x_1, \dots, x_m \in X$ 线性无关。假定 y 能表示成 $x_1, \dots, x_m$ 的线性组合，则其表示唯一。

证明 假定表示方法不唯一，即

$$y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$$

$$y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m$$

两式相减得到

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_m - \beta_m)x_m = 0$$

从中得到

$$\alpha_i = \beta_i \quad i=1, \dots, m$$

矛盾。

定义 5 设 M 是 X 的非空子集，如果 $\forall x, y \in M$ ，皆有

$$\alpha x + \beta y \in M \quad (\forall \alpha, \beta \in R)$$

则称 M 是 X 的非空子空间。

例 7 由 $x_1, \dots, x_m \in X$ 的所有线性组合组成的集合 M 是 X 的一个子空间。

解 $\forall x, y \in M$ ，从

$$x = \sum_{i=1}^m a_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m b_i x_i$$

得到

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^m (\alpha a_i + \beta b_i) x_i$$

故 $\alpha x + \beta y \in M$ 。

例 7 中的 M 也称作由 $x_1, \dots, x_m$ 生成的子空间，或者说是由 $x_1, \dots, x_m$ 张成的子空间。记作 $M = \text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 。显然，对例 6 中的 $\text{Span}\{1, x, \dots, x^n\}$ 是 n 次多项式的集合，它也是 $C^k[a, b]$ 的子空间；而对例 4 则有 $\text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = R^n$ 。

定义 6 设 $A \subset X$ 是一个子空间，又设 $B \subset A$ 。如果

(1) B 的元素线性无关

(2) B 生成 A

则称 B 是 A 的基底。

如果 $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 是 A 的基底, 则 $\forall x \in A$, 有 $r_1, r_2, \dots, r_m$ 存在, 使

$$x = r_1 x_1 + \dots + r_m x_m$$

数 $r_1, r_2, \dots, r_m$ 是由 x 唯一确定的, 它们叫 x 关于 B 的分量.

在上面的讨论中, 还有一个问题需要研究, 即 X 的任一子空间是否都有基底. 这个问题比较复杂, 涉及的问题也多, 我们在下面仅就 R^n 做进一步分析. 为此, 先复习一下线性代数的有关定理.

定理 2 设 $B = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ 是子空间 $A \subset R^n$ 的基底, $b_1, b_2, \dots, b_m \in A$ 线性无关. 则存在正整数 $k, 1 \leq k \leq l$, 使 $a_k, b_2, \dots, b_m$ 线性无关.

证明 用反证法. 假定对每个 $i = 1, 2, \dots, l$, 向量 $a_i, b_2, \dots, b_m$ 线性相关. 于是, 存在不全为零的常数 $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im}$, 使

$$c_{i1} a_i + c_{i2} b_2 + c_{i3} b_3 + \dots + c_{im} b_m = 0$$

$i = 1, 2, \dots, l$, 不妨设 $c_{i1} \neq 0$. 因此,

$$a_i = \frac{-1}{c_{i1}} \left(\sum_{j=2}^m c_{ij} b_j \right) = \sum_{j=2}^m r_{ij} b_j$$

因为 B 是基底, 所以有

$$b_1 = \sum_{i=1}^l \beta_i a_i$$

从而

$$b_1 = \sum_{j=2}^m \left(\sum_{i=1}^l \beta_i r_{ij} \right) b_j$$

上式与假定矛盾.

定理 3 设 $a_1, a_2, \dots, a_m, b \in R^n$. 则有下列结论成立.

- (1) 如果 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关, 则在其中去掉几个向量后, 剩下的向量也线性无关;
- (2) 如果 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关, 则 $b, a_1, a_2, \dots, a_m$ 也线性相关;
- (3) 当 $m > n$ 时, $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关;
- (4) R^n 的任一个基底必恰由 n 个向量组成.

证明 从略.

定理 4 R^n 的任一个非空子空间 A 都有一个基底.

证明 取非零向量 $b_1 \in A$, 它是线性无关的 ($\alpha b_1 = 0 \implies \alpha = 0$). 如果 A 中无任何向量与它线性无关, 那么, b_1 是一个基底. 如果有 b_2 与之线性无关, 那么, b_1, b_2 也可能是一个基底, 否则有 b_3 , 使 b_1, b_2, b_3 线性无关. 重复进行分析, 得到 $b_1, b_2, \dots, b_m$ ($m \leq n$) 是 A 的最大线性无关向量组, 从而也是一个基底.

很容易证明非空子空间的不同基底的向量个数相同. 因此, 称非空子空间的基底的向量个数 m 是子空间的维数. 用 $\dim(A) = m$ 表示. 空子空间 A 的维数是零.

定义 7 设 $\varphi \subset R^n$ 是一子空间, 又设 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 是 φ 的子空间. 如果

$$(1) \mathscr{U} \cap \mathscr{V} = \{0\}$$

$$(2) \varphi \text{ 是由 } \mathscr{U} \cup \mathscr{V} \text{ 生成,}$$

则称 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 在 φ 中互为补子空间, 并记 $\varphi = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$.

在 R^3 中, 取 $b \neq 0$. 任何一个不含 b 在其内的平面上的所有向量, 构成一个二维子空间 $\mathscr{U}$, 而 b 生成一维子空间 $\mathscr{V}$, 并有 $R^3 = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$. 由此也知, 一个子空间的补子空间

不唯一。

我们不加证明给出下列重要定理。

定理 5 设 φ 是 R^n 的子空间。

(1) 如果 $\mathcal{U}$ 是 φ 的子空间, 则 $\mathcal{U}$ 在 φ 中至少有一个互补的子空间 $\mathcal{V}$ 。

(2) 如果 $\varphi = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, 则

$$\dim(\varphi) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V})$$

(3) 如果 $\varphi = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, 则 $\forall x \in \varphi$, 可唯一地写成 $x = u + v$, 其中 $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$ 。

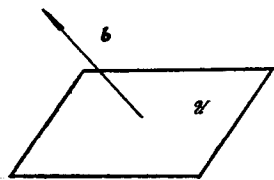


图 1-2

1.2 向量的内积

在 R^3 中, 曾经研究过两个向量的内积 (数量积), 并有

$$(x, y) = |x| |y| \cos(\widehat{x, y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

在 R^n 中, 同样可以引入内积的概念。

定义 8 设 $x, y \in R^n$, 则称

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

是 x 与 y 的内积。并记

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

由矩阵的运算, 可知

$$(x, y) = y^T x$$

根据内积的定义, 得到内积的性质:

(1) 对称性

$$(x, y) = (y, x)$$

(2) 齐次性

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

(3) 可加性

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

把 R^n 中的内积概念推广到一般的线性空间 X 中去。设 X 是线性空间。如果 $\forall x, y \in X$, 能对应一个实数 (x, y) , 并满足

$$(1) \quad (x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \iff x = 0$$

$$(2) \quad (x, y) = (y, x)$$

$$(3) \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall \lambda \in R$$

$$(4) \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

则称 X 是线性内积空间, 并称 (x, y) 是 x 与 y 的内积。

也就是说: 内积概念是一个比较广泛的概念。

显然, 对于一个具体的线性空间 X , 在其上能不能定义内积, 要具体问题具体分析。

例 8 在 $C^k[a, b]$ 中, $\forall f, g \in C^k[a, b]$ 对应一个实数

$$(f, g) = \int_a^b f g dx$$

这样, 由积分的性质知内积的四个性性质都成立. 因此, 在 $C^k[a, b]$ 上定义了一个内积.

如果考虑的对象和复数有关, 此时 $\forall x, y \in X$ 都对应一个复数 (x, y) , 并满足:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \iff x = 0$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

则称 X 是复内积空间, 称 (x, y) 是 x 与 y 的内积.

在 C^n 中, 规定

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i = y^{H} x$$

显然, C^n 也是内积空间.

长度或者说大小是三维 Enclid 空间的一个重要的几何量. 在那里, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 的长度从图 1-3 可知为 $\left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right)^{1/2} = (x, x)^{1/2}$. 今后, 均用模 (或范数), 即用

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right)^{1/2} = (x, x)^{1/2}$$

表示.

显然, 向量的模具有下列性质:

(1) 非负性, 即

$$\|x\|_2 \geq 0$$

$$\|x\|_2 = 0 \iff x = 0$$

(2) 齐次性, 即

$$\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \|x\|_2$$

(3) 满足三角不等式, 即

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

上述的模, 也叫 Enclid 模 (范数), 简称为欧氏模或二模. 把它推广到 R^n 中, $\forall x \in R^n$, 则称

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = (x, x)^{1/2}$$

是向量 x 的欧氏模或二模. 如此定义的欧氏模, 显然也满足非负性、齐次性和三角不等式.

定理 6 设 $x, y \in R^n$. 则有

$$|(x, y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad (4)$$

式 (4) 也称作 Cauchy-Schwarz 不等式.

证明

$$\because \|x + \lambda y\|_2^2 = (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) \geq 0$$

根据二次代数方程判别式有

$$(x, y)^2 \leq \|x\|_2^2 \|y\|_2^2$$

即式 (4) 成立.

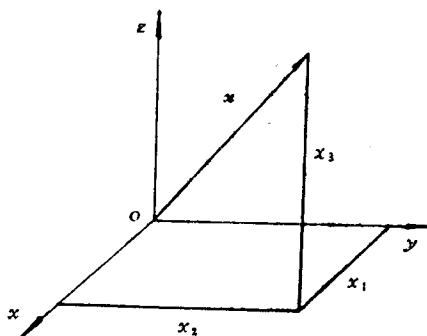


图 1-3