国家工科基地教材 · 工程数学与教学软件

概率论与数理统计

（第二版）

上海交通大学数学系 编

科学出版社
www.sciencep.com

国家工科基地教材
工程数学与教学软件

概率论与数理统计

（第二版）

上海交通大学数学系　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法，并结合计算机使学生能利用数学软件解决一些简单的概率统计问题. 内容包括随机事件及其概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析和回归分析初步等. 每个章末均有习题，供学生练习之用.

本书可作为工科、理科(非数学)类各专业本科学生的教材和相关课程教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/上海交通大学数学系编. —2 版. —北京：科学出版社，2007

国家工科基地教材·工程数学与教学软件

ISBN 978-7-03-018498-6

Ⅰ. 概… Ⅱ. 上… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 012823 号

责任编辑：姚莉丽/责任校对：张 琪

责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2007 年 2 月第 二 版 印张：18

2007 年 2 月第十二次印刷 字数：334 000

印数：45 001—51 000

定价：20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

第二版前言

本教材是《概率论与数理统计》(科学出版社,2000)的第二版.

近年来,随着科学技术的发展,概率论与数理统计在众多的学科与行业中得到了越来越广泛的应用,另一方面,对学生数学素养和应用能力的要求明显提高.在这种情况下,在多年教学实践的基础上,再版编写一本突出基本思想方法、简明扼要、便于学习和适应教学新形势的概率论与数理统计教材是十分必要的.

本教材在保持第一版特点的基础上,努力将概率论和数理统计的基本思想和方法融入各部分内容的阐述之中,力求做到科学性与通俗性相结合,在内容的处理上由具体到一般,由直观到抽象,由浅入深,循序渐进.书中对主要的内容和方法做了归纳总结,略去了一些较难或叙述较繁琐的证明.修改了一些例题和习题,以使学生能较好地掌握概率统计的基本概念和方法.

本教材课内教学需要 36～45 学时,教师可根据需要酌情选用标注“*”的章节.

本书由贺才兴教授主编.第一、四章由贺才兴撰写,第二、三章由王纪林撰写,第五～九章由童品苗撰写,第十章由刘小军修撰.希望本书更有利于学生数学素养的培养和提高,更有利于概率论教学的改革和发展.希望广大读者提出宝贵的意见.

本书的再版得到了科学出版社鼎力帮助与上海交通大学教务处及数学系领导的关心和支持,在此深表感谢.

编　者

2006 年 10 月于上海交通大学

目　　录

引　　言

客观世界中发生的现象多种多样，归纳起来不外乎两种：确定性的和随机性的. 在一定的条件下必然发生的现象，称之为确定性现象. 例如，水在 1 个大气压下温度达到 100℃时必然沸腾，温度为 0℃时必然结冰，等等. 另有一类现象，在一定的条件下，具有多种可能的结果，但事先又不能预知确切的结果，此类现象称为随机现象. 例如，在相同条件下抛掷同一枚硬币，其结果可能是国徽面朝上，也可能是国徽面朝下，并且在抛掷之前无法预知抛掷的结果.

经典的数学理论如微积分学、微分方程等都是研究确定性现象的有力的数学工具. 随着社会生产与科学技术的发展，研究随机现象的统计规律性的理论和方法获得了迅速的发展，形成了数学的一个重要分支，并被广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中. 概率论与数理统计就是现代数学理论中研究和揭示随机现象统计规律性的一门基础学科.

经典数学和概率论与数理统计是相辅相成、互相渗透的. 若视炮弹为一个质点，且不考虑阻力及其他因素的微小影响，则一枚炮弹在空中飞行的曲线——弹道曲线可归结为微分方程问题，从而得到一条确定的抛物线. 若把空气阻力按一定方式考虑进去，则仍可由微分方程的方法得到一条确定的弹道曲线. 然而，在实际发射中会发现炮弹的飞行路线与弹道曲线存在着明显的差异，这些差异正是由于飞行路线受到捉摸不定的空气阻力、炮弹本身的不均匀性及弹身振动等的影响而造成的. 概率统计的方法就是研究将这些次要因素加以考虑而造成飞行路线的不确定性的规律.

必须指出，若没有了用经典数学方法求出的弹道曲线，则考察飞行路线的偏差就毫无意义. 这说明某些概率统计的问题必须辅之以经典数学的方法；经典数学研究的某些问题又必须用概率统计的方法加以补充解决. 应正确认识两者之间这种相辅相成的关系.

第一章　随机事件及其概率

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验

在进行个别试验或观察时其结果具有不确定性，但在大量的重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，称为**随机现象**. 为对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为**试验**. 若一个试验满足下列三个特点：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以知道试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定出现的是哪个结果，

则称这一试验为**随机试验**，记为 E. 例如，

E_1：抛掷一枚硬币，观察正面和反面出现的情况；

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：对某一目标发射一发炮弹，观察弹着点到目标的距离；

E_4：记录电话交换台在上午 9 时到 10 时接到的电话呼唤次数；

E_5：测试某种型号的灯泡的寿命；

等等.

1.1.2　随机事件与样本空间

在随机试验中，可能发生也可能不发生的结果，称为**随机事件**，**简称事件**.

在一个试验中，不论可能的结果有多少个，总可以从中找出这样一组基本结果，满足：

(1) 每进行一次试验，必然出现且只能出现其中的一个基本结果；

(2) 任何事件，都是由其中的一些基本结果所组成.

随机试验中的每一个基本结果是一个随机事件，称为**基本事件**，或称为**样本点**，记为 ω.

随机事件 E 的全体样本点组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记为 Ω.

随机事件可表述为样本空间中样本点的某个集合，一般记为 A，或 B，C 等等.

所谓事件 A 发生，是指在一次试验中，当且仅当 A 中包含的某个样本点出现.

在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**. 样本空间 Ω 包含所有的样本点,每次试验它必然发生,它就是一个必然事件. 必然事件用 Ω 表示,它是样本空间 Ω 的一个子集.

在每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$. 它是样本空间的一个空子集.

下面写出 1.1.1 节中随机试验 E 的样本空间及随机事件的例子.

E_1:$\Omega=\{$(正面),(反面)$\}$.

E_2:$\Omega=\{$(1 点),(2 点),…,(6 点)$\}$.

E_3:$\Omega=\{$(弹着点到目标的距离 w 米)$\mid 0\leqslant w<+\infty\}$.

E_4:$\Omega=\{$(0 次),(1 次),…$\}$.

E_5:$\Omega=\{t$ 小时$\mid t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$.

在 E_2 中,若 A 为“出现奇数点”的事件,则 $A=\{$(1 点),(3 点),(5 点)$\}$;若 B 为“出现的点数小于 5”的事件,则 $B=\{$(1 点),(2 点),(3 点),(4 点)$\}$.

在 E_3 中,若 A 为“弹着点到目标的距离在 1 米到 3 米之间”的事件,则 $A=\{w\mid 1\leqslant w\leqslant 3\}$.

1.1.3 事件之间的关系及其运算

事件是一个集合,因此事件之间的关系及其运算可用集合之间的关系及运算来处理. 下面我们通过例 1 来加以说明.

例 1 袋中装有 2 只白球和 1 只黑球,从袋中依次任意地摸出 2 只球. 设球是编号的:白球为 1 号、2 号,黑球为 3 号. (i,j)表示第一次摸得 i 号球、第二次摸得 j 号球的基本事件,则这一试验的样本空间

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}.$$

且可得下列随机事件:

$A=\{(3,1),(3,2)\}=\{$第一次摸得黑球$\}$;

$B=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3)\}=\{$第一次摸得白球$\}$;

$C=\{(1,2),(2,1)\}=\{$两次都摸得白球$\}$;

$D=\{(1,3),(2,3)\}=\{$第一次摸得白球,第二次摸得黑球$\}$;

$G=\{(1,2),(2,1)\}=\{$没有摸到黑球$\}$.

下面我们讨论事件之间的关系及运算.

设 Ω 为某试验 E 的样本空间,$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$为随机事件.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 中的样本点一定属于 B,则称事件 B **包含**事件 A,记为 $A\subset B$.

如在例 1 中，事件 C 发生必然导致事件 B 发生，故 $C \subset B$.

显然对任意事件 A，都有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

若 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 是**相等**的，记为 $A=B$.

如在例 1 中，$G \subset C$，且 $C \subset G$，故 $C=G$.

2. 事件的和、积、差

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**和**，记为 $A \cup B$. 事件的和也称为事件的**并**. 事件 A 与 B 的和是由 A 与 B 的样本点合并而成的事件.

类似地，可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和可记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$，或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和可记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**积**，记为 $A \cap B$，也可简写为 AB. 事件的积也称为事件的**交**. 事件 A 与 B 的积是由 A 与 B 的公共的样本点所构成的事件.

类似地，可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积可记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积可记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$. 事件 A 与 B 的差是由属于 A 而不属于 B 的样本点所构成的事件.

如在例 1 中，$B=C \cup D$，$C=B \cap C$，$D=B-C$.

3. 事件的互不相容（互斥）

若 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或称 A 与 B 是**互斥**的. A 与 B 互不相容，是指事件 A 与事件 B 不能同时发生. 例如，基本事件是两两互不相容的.

在例 1 中，$A \cap B=\varnothing$，$A \cap C=\varnothing$，即事件 A 分别与事件 B 和事件 C 互不相容.

4. 对立事件

若 $A \cap B=\varnothing$，且 $A \cup B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或称 A 与 B 互为**逆事件**. A 与 B 对立，是指事件 A 与事件 B 既不能同时发生又不能同时不发生，即在每次试验中，A 与 B 有且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\bar{A}$. 显然，$\bar{A}=\Omega-A$.

如在例 1 中，A 与 B 互为对立事件，即 $\bar{A}=B$.

由定义可知,对立事件必为互不相容事件,反之,互不相容的两个事件未必为对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用**文氏(Venn)图**来直观地表示. 若用平面上的一个矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示基本事件,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,则 A 与 B 的各种关系及运算如图(图 1-1～图 1-6)所示.

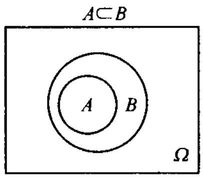

图 1-1

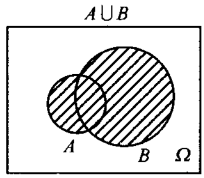

图 1-2

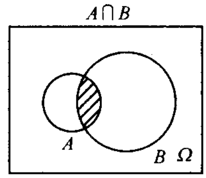

图 1-3

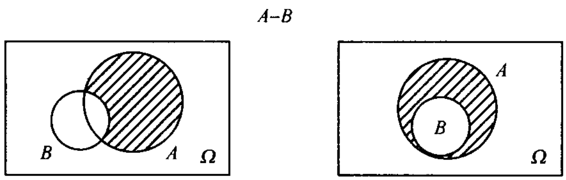

图 1-4

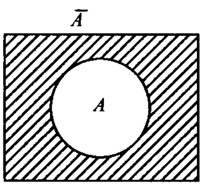

图 1-5

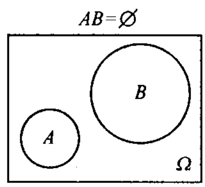

图 1-6

5. 事件的运算律

设 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$ 为事件,则有

交换律 $A\cup B=B\cup A;A\cap B=B\cap A.$

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$

分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$

德·摩根(De Morgan)律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$

一般地,对有限个事件及可列无限个事件也有

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}; \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k};$$
$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}; \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}.$$

例 2　设 A,B,C 为三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A,B,C 都发生；

(4) A,B,C 恰有一个发生；

(5) A,B,C 中至少有一个发生；

(6) A,B,C 中不多于两个发生；

(7) A,B 至少有一个发生而 C 不发生；

(8) A,B,C 恰有两个发生.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}$或 $A-B-C$.

(2) $AB\overline{C}$或 $AB-C$.

(3) ABC.

(4) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$*.

(5) $A\cup B\cup C$，或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$.

(6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$，或$\overline{ABC}$.

(7) $(A\cup B)\overline{C}$，或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}$.

(8) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

例 3　试求事件“甲种产品滞销，且乙种产品畅销”的对立事件.

解　设 A 表示“甲种产品畅销”，B 表示“乙种产品畅销”，则由题意，有

$$\overline{\overline{A} \cap B} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{B} = A \cup \overline{B},$$

即所求对立事件为“甲种产品畅销或乙种产品滞销”.

1.2　概率的定义及其运算

除必然事件与不可能事件外，任一随机事件在一次试验中都有发生的可能性，人们常常通过实际观察来确定某个事件发生的可能性的大小. 例如遇到某种天气，人们常会说“今天十之八九要下雨”，这个“十之八九”就是表示“今天下雨”这一事件发生可能性的大小. 这是人们通过大量实践所得出的一种统计规律，即已经历过 n 次这种天气，下雨的天数在这 n 天中所占比例大约是$\frac{8}{10}$到$\frac{9}{10}$. 一般地，人们希望

* 若 A 与 B 为互不相容事件，则 $A\cup B$ 可记为 $A+B$.

用一个适当的数字来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小. 这是就下雨所讨论的随机事件发生的频率与概率.

1.2.1 频率

定义 1.1 设在相同的条件下,进行了 n 次试验. 若随机事件 A 在这 n 次试验中发生了 n_A 次,则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$.

频率具有如下性质:

1° 对任一事件 A,有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

2° 对必然事件 Ω,有 $f_n(\Omega)=1$;

3° 若事件 A,B 互不相容,则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B).$$

一般地,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_n(A_i).$$

事件 A 发生的频率表示 A 发生的频繁程度. 频率越大,事件 A 发生得越频繁,即 A 在一次试验中发生的可能性越大. 但是,频率具有随机波动性,即使同样进行了 n 次试验,n_A 却会不同. 但这种波动不是杂乱无章的,在第五章大数定律中,我们将看到若增加试验次数 n,则随机波动性将会减小. 随着 n 逐渐增大,频率 $f_n(A)$ 也就逐渐稳定于某个常数 $P(A)$. 这样,常数 $P(A)$ 客观上反映了事件 A 发生的可能性的大小.

历史上著名的统计学家蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)曾进行过大量掷硬币的试验,所得结果如下:

试验者	掷硬币次数	出现正面的次数	出现正面的频率
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

可见出现正面的频率总在 0.5 附近波动. 随着试验次数的增加,它逐渐稳定于 0.5. 这个 0.5 就能反映正面出现的可能性的大小.

每个事件都有这样一个常数与之对应. 这就是说频率具有**稳定性**. 因而可将事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时所逐渐趋向稳定的那个常数 $P(A)$ 定义为事件 A 发生的概率. 这就是概率的**统计定义**.

1.2.2 概率的统计定义

定义 1.2 设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 n_A. 若当试验次数

n 很大时，频率$\frac{n_A}{n}$稳定地在某一数值 p 的附近摆动，且随着试验次数 n 的增加，其摆动的幅度越来越小，则称数 p 为随机事件 A 的**概率**，记为 $P(A)=p$.

由定义，显然有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \quad P(\Omega)=1, \quad P(\varnothing)=0.$$

概率的统计定义本身存在着很大的缺陷，即定义中的“稳定地在某一数值 p 的附近摆动”含义不清，如何理解“摆动的幅度”？或多或少地带有人为的主观性. 是否能抓住一个事件所对应的客观上表示该事件发生可能性大小的一个数，及它所固有的性质来作为概率的定义呢？概率的公理化定义解决了这一问题.

1.2.3　概率的公理化定义

定义 1.3　设随机试验 E 的样本空间为 Ω. 若按照某种方法，对 E 的每一事件 A 赋于一个实数 $P(A)$，且满足以下公理：

1°　**非负性**：$P(A) \geqslant 0$；

2°　**规范性**：$P(\Omega)=1$；

3°　**可列(完全)可加性**：对于两两互不相容的可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots,$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由概率的定义可以推得概率的如下一些性质.

性质 1　不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing)=0$.

证　因为令 $A_n=\varnothing, n=1,2,\cdots$，且 $A_iA_j=\varnothing, i \neq j$，则 $\varnothing=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，于是

$$P(\varnothing)=P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing),$$

从而由 $P(\varnothing) \geqslant 0$，得 $P(\varnothing)=0$.

性质 2　概率具有有限可加性，即若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证　因为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n=A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots,$$

所以由概率的可列可加性及性质 1，得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3　对任何事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证　因为