

錢令希著

超靜定結構學

上海科學技術出版社

內 容 提 要

本書於1951年初版，內容包括緒論、結構形變、超靜定結構、連續梁與剛構、剛構房屋、桁架次應力、柱比法及變梁常數、拱、連續拱、空腹桁架、餘能理論等十一章。著者參考中外專家名著，結合教學經驗，把超靜定結構的理論和實用作一有重心有系統的介紹，精簡而有啟發性，並有若干創作性，近年出版的許多書籍中，常將本書引用為參考資料。

超 靜 定 結 構 學

錢 令 希 著

上海科學技術出版社出版

(上海南京西路2004號)

上海市書刊出版業營業許可證出088號

上海勞動印刷廠印刷 新華書店上海發行所總經售

開本 787×1092 1/27 印張 12 28/27 插頁 2 字數 223,000

(原中科院、科技版共印10,000冊)

1968年10月新1版 1959年4月新1版第3次印刷

印數 3,501—7,500

統一書號: 15119·550

定價: (十四) 1.85 元

序

這本書是寫給土木工程系和水利工程系大學三四年級同學讀的。可以作為新學程中結構學(二)和(三)的教材。

從事於結構工程的設計和教學工作十多年了，這份題靜定結構學的資料，幾經同事們朋友們和同學們的指正和提示意見，使它逐漸充實起來，早就該作一番有系統的修整和改進。自從改革了學制，因為同學高漲的學習情緒，和自己也感覺有這需要，曾將講義整理過一次。最近有幾位工程界的工作者挽人索取這份講義，使我感到這樣一本書對於從事實際工作者也會有需要。同時以往那種原封的採用外國教本的現象，也不該再予繼續，因此就決定來一次比較徹底的整理，因為要修整的地方很多，所以幾乎是易稿一次，這便是寫這本書的動機。

本書的內容，竭力想做到精簡和帶有啓發性。在簡短的篇幅中，想有系統的介紹一條大道給讀者可以邁步前進。在教學中，常有這樣的現象，就是依據一本或幾本厚厚的西文書，在有限的學期中，只能挑揀幾章來教，有些材料太囫圇，有些問題却又永遠沒有機會去理會，不免有些斷章取義的弊病。那些書可能寫得很好，祇是材料沒有處理得當，沒有顯著的重心，這樣在教學上就一定減低了效率。

因此，本書就挑定了一個重心，那就是在目前比較最為進步的“不平衡力分配法”(包括彎矩，剪力或推力等分配法)和它主要的輔助

工具“柱比法”。在最初幾章中，著者致力先將超靜定結構理論作一個適當而帶一般性的敘述，並闡述一些關於結構性能的討論，然後在第四章中再轉入重要的彎矩分配法。爲了連繫實際問題，所以緊接着就寫了如何分析一座多層剛構房屋的結構（第五章），和論述了桁架次應力問題（第六章）。到這裏，根據著者的經驗，恰好是一學期教學的材料，這些應是土木和水利兩系關於結構學理論的必修部份（三年級下學期）。以下五章是結構工程組必修和他組選修的資料，取捨或補充/可由教者來酌定。

第七章闡述了柱比法，這是一個最有效的工具，掌握了它，彎矩、切力或推力分配法才可以無往而不利。第八章用柱比法處理拱的分析，表現了如何可以把各項計算組織得非常緊湊簡明。在過去，柱比法的對象僅是由梁件組成的剛構，在這裏，本書提出了如何推廣到桁架剛構的方法，一樣的簡易，使這方法成爲更完美的工具。第九章談連續拱的分析，介紹了兩個方法，可以看出在分配法和柱比法的合作下，如何靈活的去解決這複雜而有代表性的問題。第十章是空腹桁架的分析，這是高次超靜定結構的一種典型，首先介紹一種 $3X$ 方程法，這是利用舊的一般性方法而達到最爲精到的境地，使結果相似於用三彎矩方程來分析連續梁。接着介紹的是著者和胡海昌君所提出的調整分配法，這說明在掌握了分配法和柱比法的物理意義以後，可以如何的發揮高度靈活的技巧，使很複雜的問題精簡到爲大家都能應付。比較這兩個方法，可以體會到新的道路不但精簡得多，而每一計算和步驟，都很容易看出他們的物理意義。是的，在講授超靜定結構這樣一門功課，問題不在介紹很多的各種不同的方法，讓學者迷亂在許多公式和細節之中，却是應

該研究和選擇那個是最適當和最切合實際的方法，不但要能掌握這方法，並且要通過它，來瞭解所處理問題的結構性能。因為這緣故，很多教授們和專家們，在教學中或工作中，也常選擇了這代表新方向的分配法一途。

前十章的理論都建築在一個共同的基礎上，就是材料要符合虎克定律，並附帶着可以應用疊加原理的條件。這是目前結構力學中大部問題所處的範圍。但是必然的，工程技術和材料的進步，一定會要求跳出這個範圍。目前是有些處理這種個別問題的方法，在“中國科學”(一卷二期)發表的拙著“餘能理論”是想提出一個有一般性的理論，現在附在最後，希望讀者在完畢以前各章後，還有餘暇的話，也來研究研究這一課題，這樣他將看到結構力學還有一個有待發展的新領域。餘能理論可能是一條走得通的路，也可能祇有一些理論上的興趣，而另外還有別的康莊大道可以發現。這些要看我們努力的結果了。這簡短的一章，不必當作必修的材料，祇供作參考研究的資料而已。

現在已把本書的內容介紹了一個大概，其中除了在首幾章敘述了各種解決問題的一般性方法外，以後我們就集中在上述選定的重心上了。當然，在超靜定結構理論中，有許多重要的思想和方法，我們沒有提到，這並不是它們不重要，祇是因為他們不在我們選定的路線上。

想做到內容精簡和敘述有啓發性，這是寫這書時的目標，沒有能適當的達到，這是因為著者的學識和修養還不夠，不過請相信他的確向這目標盡了力的。假定這書尚有可取之處，那末多年來，浙大的同事們和同學們在教學中，反映和提示的意見，是最應該感謝的。

尤其是有兩位同學必需在這裏一提，那是胡海昌君（現在科學院數學研究所工作）和潘家鏐君（現在燃料工業部工作），他們在學校的時候，對這門功課喜愛而努力，曾經常的提供很多寶貴的意見，不論是在教材內容和教學方法上，使我更接近了讀者的思想。還有樂秀文，潘家鏐和葛維堡諸同學，在公餘之暇非常認真的爲本書作抄寫和括圖的工作，是一併應該致謝的。

最後，我體味到，寫一種教本的責任是十分沉重的，工作中應該很審慎嚴肅。著者個人的努力是很有限的，這書可以商榷，改良和修正的地方一定很多，我誠懇的請求專家們和讀者們，爲這本書提出你們寶貴的意見。這不但幫助了著者進步，也是有益於其他讀者們的。

著 者

1951年2月於杭州浙江大學。

總 目

第一章	緒論	1
第二章	結構形變	8
第三章	超靜定結構一般性分析法	49
第四章	連續梁與剛構	80
第五章	剛構房屋之分析	128
第六章	桁架次應力	155
第七章	柱比法及變梁常數	173
第八章	拱	209
第九章	連續拱	244
第十章	空腹桁架	278
第十一章	餘能理論	318

目 錄

第一章	緒論	1
1—1	結構平衡條件	1
1—2	靜定與超靜定結構	1
1—3	超靜定結構分析之基本概念	2
1—4	超靜定結構若干特質	4
1—5	超靜定次數	5
第二章	結構形變	8
2—1	線變位與角變位	8
2—2	虎克定律與疊加原理	9
2—3	應變與應變能	10
2—4	馬氏互等定理	12
2—5	結構形變分析方法	16
2—6	虛功法求梁結構之變位	17
2—7	虛功法求桁架結構之變位	22
2—8	虛功法求結構因某部形變而發生之變位	23
2—9	卡氏第一定理求結構之變位	26
2—10	梁結構變位特種分析法(一)——彎矩面積法 以求梁之相對變位	30
2—11	梁結構變位特種分析法(二)——共軛梁法以	

求梁之實際變位	33
2-12 桁架變位特種分析法(一)——維氏變位圖以 求桁架相對變位	38
2-13 桁架變位特種分析法(二)——摩氏轉動圖以 求桁架實際變位	43
2-14 剛架節點之相對線變位	46
第三章 超靜定結構一般性分析法	49
3-1 形變幾何法	49
3-2 最小應變能法——卡氏第二定理	55
3-3 混合結構之性能	58
3-4 混合結構之性能(續)	63
3-5 交叉腹桿桁架之性能	64
3-6 一般性分析方法之改進	66
3-7 超靜定力之感應圖	68
3-8 靜定式之選擇	71
3-9 靜定式之選擇(續)	74
3-10 變位逆算法	76
第四章 連續梁與剛構	80
(甲)變位逆算法	
4-1 定義與假設	80
4-2 端彎矩正負符號	81
4-3 固定端彎矩	82
4-4 端彎矩之逆算方程式(M 與 θ , Δ 之關係)	85

4—5	平衡條件(求解 θ 及 Δ 之聯立方程式)	87
-----	---	----

4—6	剛構節點之獨立相對線變位	94
-----	------------------------	----

(乙) 彎矩分配法

4—7	彎矩分配法之物理概念	97
-----	----------------------	----

4—8	梁端抗彎剛度及彎矩分配係數	99
-----	-------------------------	----

4—9	傳遞係數	100
-----	----------------	-----

4—10	分析等截面梁之一般法則	100
------	-----------------------	-----

4—11	彎矩分配法之校核	104
------	--------------------	-----

4—12	簡支端之特殊處理法	106
------	---------------------	-----

4—13	剛架之側移	109
------	-----------------	-----

4—14	彎矩分配之精簡法	114
------	--------------------	-----

4—15	剛架之側移性能	120
------	-------------------	-----

4—16	剪力分配法	124
------	-----------------	-----

第五章 剛構房屋之分析 128

5—1	初步設計	128
-----	----------------	-----

5—2	計算之精確度	129
-----	------------------	-----

5—3	產生最大值之荷重分佈狀況	131
-----	------------------------	-----

5—4	近似彎矩分配法——二次分配法	133
-----	--------------------------	-----

5—5	彎矩係數	134
-----	----------------	-----

5—6	剛構房屋分析示例	135
-----	--------------------	-----

5—7	剛構中柱之分析	144
-----	-------------------	-----

5—8	多層剛構屋架在側力作用下之分析	147
-----	---------------------------	-----

5—9	風應力第一近似分析法	147
-----	----------------------	-----

5—10	風應力第二近似分析法	149
------	----------------------	-----

5-11 側移估計法	151
第六章 桁架次應力	155
6-1 定義及分類	155
(甲)因節點剛固性而產生之主桁架次應力	
6-2 概念及主要假定	156
6-3 分析法之一——變位逆算法	160
6-4 分析法之二——彎矩分配法	161
6-5 其他原因之次應力	163
6-6 副桿對於次應力之影響	165
6-7 討論	165
(乙)側支撐架次應力	
6-8 橫梁及豎桿之次應力	168
(丙)橫支撐架次應力	
6-9 橫梁次應力	169
6-10 橫支撐架次應力	172
第七章 柱比法及變梁常數	173
7-1 前言	173
7-2 基本原理	173
7-3 舉例	170
7-4 超靜力之計算	181
7-5 柱比法計算表	184
7-6 靜定彎矩圖之選擇	184
7-7 集中轉動之處理	190

7—8	截面移動之處理	193
7—9	鉸接之處理	196
7—10	變梁之特性常數	198
7—11	變梁之特性常數(續)	203
7—12	變梁之近似常數	204
7—13	柱截面之核點特性	296
第八章	拱	209
8—1	前言	209
8—2	拱骨分段方法	209
8—3	靜定式及靜定彎矩 m_0	210
8—4	超靜定彎矩 m_i	211
8—5	超靜力 F	212
8—6	應力種類	213
8—7	呆荷重應力	214
8—8	活荷重應力	214
8—9	溫度升降及拱骨縮短等之應力	218
8—10	應力感應圖示例	219
8—11	拱骨分析示例	225
8—12	拱骨分析一般性方程式	229
8—13	拋物線拱	232
8—14	雙鉸拱及單鉸拱	236
8—15	拱背上部結構及拱之次應力	237
8—16	拱背結構之分析	238
8—17	桁架固定端拱之分析(柱比法推廣至桁架剛構)	240

第九章 連續拱 244

(甲)墩頂分配法

- 9—1 概念 244
- 9—2 墩頂分配法之步驟 244
- 9—3 拱及墩之各常數 246
- 9—4 示例 249

(乙)中和點分配法

- 9—5 概念 251
- 9—6 變位之搬移 251
- 9—7 靜定結構之中和點 252
- 9—8 超靜定結構之中和點 254
- 9—9 中和點分配法之步驟 255
- 9—10 拱及墩之各常數 257
- 9—11 拱骨壓縮收縮溫度升降及支座沉陷等引起之應力 260
- 9—12 示例 261
- 9—13 連續拱之應力感應圖 266
- 9—14 示例(續) 270

第十章 空腹桁架 278

- 10—1 概述 278

(甲)三 X 方程法

- 10—2 概念 280
- 10—3 腹桿反彎點之位置 283
- 10—4 彈性方程式之建立 285

10—5	實例	292
10—6	應力感應圖	300

(乙) 調整分配法

10—7	概念及步驟	300
10—8	剛腹端彎矩	302
10—9	節間抗彎剛度及節間傳遞係數	307
10—10	腹桿修正抗彎剛度	309
10—11	對稱空腹桁架分析法之一(調整彎矩分配法)	310
10—12	對稱空腹桁架分析法之二(調整變位逆算法)	312
10—13	本法可能之推廣	315

第十一章 餘能理論 318

11—1	前言	318
11—2	餘能之定義	318
11—3	定理(一)	320
11—4	定理(二)	320
11—5	定理(三)	321
11—6	定理(四)——最小餘能原理	322
11—7	定理(五)——最大餘能原理	323
11—8	受扭之圓軸	323
11—9	受彎曲及直接應力之直梁	324
11—10	受彎曲之曲梁	325
11—11	形變統一方程式	327
11—12	餘能法求結構之變位及應力	329
11—13	結語	332

第一章

緒論

1-1 結構平衡條件 結構在力系作用之下必須能維持平衡。此力系當包括一切作用於結構上之外力，即所有荷重及支承反力。倘將結構某部份隔離，則在隔離之截面上，必有其他部份給予之反力，此項反力即結構在此截面上之內應力或聯繫力，其與隔離體其他外力，又必須能維持平衡。故平衡條件實為結構力學之最重要基礎。

按任何力系均可合成一單力及一力矩，平衡條件即要求此單力及力矩均等於零，亦即：

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0, \\ \Sigma M_x &= 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0\end{aligned}$$

其中 X, Y, Z 為各力沿三座標軸方向之分力。 M_x, M_y, M_z 為各力對三座標軸之力矩。在平面力系中，平衡條件可簡化成下列三方程式：

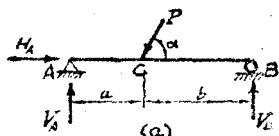
$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M = 0$$

其中 M 為各力對於力系平面任一點之力矩。

1-2 靜定與超靜定結構 任何維持平衡之結構必須滿足上述平衡條件。凡能由平衡方程即可解求結構之支承反力及截面內應力者，定名為“靜定結構”。凡平衡方程尚不足解求全部反力和內

應力者，定名為“超靜定結構”。其不足解求之部份稱為該結構之超靜定部份。此類結構之反力或內應力雖必須滿足平衡條件，但

其數值及性質尚有若干其他條件控制之。



例如圖 1-1(a) 所示簡支梁，在外力 P 作用下有三個平衡條件：

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma M_B = 0,$$

即足以求解全部反力及內應力，故為靜定結構。

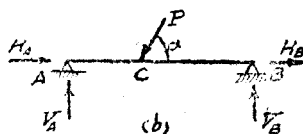


圖 1-1

圖 1-1(b) 所示梁有反力四個，倘僅為滿足平衡條件：

$$\Sigma X = 0: H_A + H_B = P \cos \alpha$$

$$\Sigma M_B = 0: V_A = \frac{P \sin \alpha \cdot b}{a + b}$$

$$\Sigma Y = 0: V_B = P \sin \alpha - V_A$$

上式 $\Sigma X = 0$ 無法求解 H_A 及 H_B ，因此 H_A 及 H_B 為結構之超靜定部份。僅須 H_A 或 H_B 之一，結構即可在外力下平衡，故 H_A 或 H_B 之一可稱為贅餘反力。

1-3 超靜定結構分析之基本概念 前節圖 1-1(b) 梁之 H_A 及 H_B ，由 $\Sigma X = 0$ 之平衡條件，可知 H_A 或 H_B 之一可取任何數值，例如 H_A 可以等於零，亦可等於 +8，-30 甚至無窮大，平衡條件總可滿足。事實上 H_A 必有某一定數值，蓋 AC 段有壓力為 H_A ，則必有彈性縮短 Δ ，而 CB 段有拉力 $H_B = P \cos \alpha - H_A$ ，必有彈

性伸長 Δb , Δa 及 Δb 均為 H_A 之函數, 由於結構之連續性幾何條件, 吾人必須有:

$$\Delta a - \Delta b = f(H_A) = 0$$

此說明超靜定結構之反力, 除平衡條件外, 尚有形變幾何條件控制之。在數學觀點上, 此類結構之未知數多於平衡方程數, 故單為滿足平衡條件, 可能有無限答案, 但因形變幾何條件可補足方程數目, 故使答案變為唯一。

反觀圖 1-1(a) 之靜定梁, 則因 B 支承在水平方面可以自由移動, 故形變幾何條件可以隨時自動滿足, 反力可單獨由平衡條件決定之。

由此, 吾人已窺見超靜定結構之分析, 除力之平衡外, 尚須考慮形變之幾何問題。此為研究超靜定結構途徑之一。在第三章中將述及其另一途徑, 即結構在力系作用下, 因發生內應力而各部均有應變, 故為抵抗外力, 結構必發生應變能(或稱內功), 是項能量為反力及應力之函數。吾人可證明在結構材料彈性限度內, 此項應變能必趨於最小可能值, 此應變能之條件亦可供給不足之方程數, 以解決超靜定結構之分析。兩途出發觀點雖迥然不同, 而所得結果一致。現代超靜定結構分析方法, 雖多新猷, 然基本精神不外上述兩途。現代方法之主要改進乃在避免解算繁瑣之聯立方程式, 而採用逐次漸近法, 如克勞斯氏(H. Cross)之彎矩分配法乃從形變幾何觀點出發。蘇斯威爾氏(R. V. Southwell)之逐次放鬆法(Relaxation Method)乃從應變能之觀點出發。前者將於本書中詳細述及。

不論從幾何或應變能之觀點研究超靜定結構, 如何分析結構之