高等教育自学考试新版

数学教材辅导系列

高等数学（工本）习题详解

陈兆斗 邢永丽 编著

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

课程代码：0023

高等教育自学考试新版　数学教材辅导系列

高等数学（工本）习题详解

附：高等数学（工本）自学考试大纲

陈兆斗　邢永丽　编著

清华大学出版社
北京

内 容 提 要

本书包括2006年高等教育自学考试新版数学教材《高等数学(工本)》中每章的内容提要和全部习题的详细解答，具体内容包括：空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程、无穷级数等. 本书相当于普通高等院校“高等数学”下册的习题辅导. 本书在编写过程中充分考虑到自考生自学时的困难，解题过程更为详尽.

本书是自考生学习“高等数学(工本)”课程必备的教学辅导书，也可作为普通高校学生的学习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(工本)习题详解/陈兆斗，邢永丽编著. —北京：清华大学出版社，2006.12
(高等教育自学考试新版数学教材辅导系列)
ISBN 7-302-13912-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.①陈…②邢…　Ⅲ.高等数学－高等教育－自学考试－解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第117435号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：佟丽霞
文稿编辑：霍志国
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　**印张**：17.75　**字数**：373千字
版　　次：2006年12月第1版　2006年12月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-13912-1/O·577
印　　数：1～4000
定　　价：25.00元

Word from Publisher 出版说明

根据近年来我国高等教育发展的新形式以及高等教育自学考试多年来的实践经验，2002年全国高等教育自学考试指导委员会数学专业委员会组织专家，经过反复讨论重新拟定了高等教育自学考试某些专业数学课程考试大纲，同时也组织各高校的专家按照新的数学考试大纲编写了“全国高等教育自学考试指定教材公共课程”系列中的新版数学教材，包括《高等数学（工专）》、《高等数学（工本）》、《线性代数（经管类）》、《概率论与数理统计（经管类）》等.

为了使广大的自考生更好地学习上述课程，编写上述新版数学教材的主编组织起来编写了“全国高等教育自学考试新版数学教材辅导系列”，包括《高等数学（工专）习题详解》、《高等数学（工本）习题详解》、《线性代数（经管类）习题详解》、《概率论与数理统计（经管类）习题详解》等，这套丛书包括上述新版数学教材中每章的内容提要和全部习题的详细解答，既可以和上述新版数学教材配合起来使用，也可以作为单独的辅导书来使用.这套丛书的作者都是在各个高校从教多年的数学教师，有从事高教自考助学的丰富经验.所以无论在新教材还是在与之配套的习题解答中，作者都能很准确地把握新大纲中对于考核知识点、难度、能力层次等项要求，并能对于广大自考生自学中的难点与困惑作出详细的注释和解答.

我们相信，这套系列丛书的推出将有利于指导广大自考生的自学活动，帮助他们走上自学成才的成功之路.

清华大学出版社

2006年10月

PERFACE

前言

2002年全国高等教育自学考试指导委员会组织专家，经过反复讨论重新拟定了工业工程专业本科的自考课程“高等数学（工本）”自学考试大纲.与旧大纲相比，新大纲中不再含有一元微积分的内容，其主要内容为：空间解析几何、向量代数、多元微积分、无穷级数和微分方程.它相当于普通高校工科专业“高等数学”课程下册的内容，这也是此次大纲修订的一项重要改革.

2006年根据新版考试大纲主编的教材《高等数学（工本）》（陈兆斗，高瑞主编）已正式出版，为了给自考生自学此门课程提供帮助和指导，我们编写了本书.

本书的主编陈兆斗教授不仅是新教材《高等数学（工本）》的主编，还亲自参与了此门课程考试大纲的修订工作.在本书的编写过程中，我们对教学的难点写得尽量详细，使得课堂教学的细微之处也能在书中得以体现.在空间解析几何和多元积分学的习题中，配有大量的图形以便培养读者的空间想象力.

在使用此书时希望读者注意以下几个方面：

（1）教材中的习题应先由读者自行独立解答，然后再对照此书中的解答，找出其中的差异.

（2）读者在学习第1章（空间解析几何与向量代数）的过程中应多做一些画图练习，以培养自己的空间想象力，这一章的内容是多元积分学的基础.在做重积分、曲线积分和曲面积分的习题时，每一题都应画图，以便巩固空间几何的知识.

（3）此门课程内容的基础是一元微积分，读者在自学的过程中应随时复习一元微积分学的有关知识.

（4）读者在做习题的计算时，不能仅满足于会计算，而且要算得十分熟练.本书中介绍了一些计算上的技巧和方法，读者在做习题时应注意使用这些方法.

本书的第1，2，3，6章由陈兆斗教授编写，第4，5章由邢永丽副教授编写.我们希望，凭借我们对广大自考生状况的深刻了解以及多年的教学经验而编写的

这本习题解答能使读者学业有成.更恳请读者和同行教师能对书中的缺点和错误不吝赐教，我们将不胜感谢.

请读者通过电子邮箱：zkchxy@163.com与我们联系.

陈兆斗　邢永丽

2006年8月

CONTENTS

目录

Chapter 1

空间解析几何与向量代数

内容提要

本章的主要内容是向量和空间图形的方程表示.要求熟练掌握向量的各种运算并理解其几何意义;熟练掌握常用的曲面方程.这些内容都是学习多元微积分的前提.在学习的过程中,读者应多做一些画图练习,以培养自己的空间想象力.

一、空间直角坐标系

(1) 空间中三个数轴 x 轴、y 轴、z 轴,它们相互垂直,交于公共的原点 O,且构成右手系.这样的三个数轴称为空间直角坐标系.

(2) 每两个数轴构成一个平面,称为坐标面.它们分别是 xOy、yOz 和 xOz 坐标面.

(3) 三个坐标面将空间分为八个部分,称为八个卦限.各个卦限的标号见图 1-1.

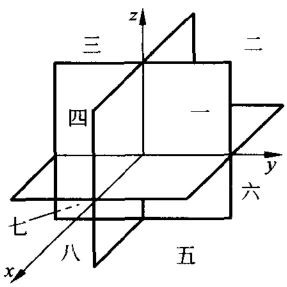


图 1-1

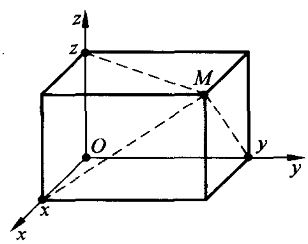


图 1-2

(4) 对于空间的点 M,过 M 分别做垂直于 x,y,z 轴的平面,它们与这三个坐标轴交点(也称为在坐标轴上的投影点)的坐标依次为 x,y,z(图 1-2).则(x,y,z)称为点 M 的坐标.

(5) 空间中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别,点 $P(x,y,z)$与原点的距离为$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

二、向量代数

1. 具有大小和方向的量称为向量,只有大小的量称为数量(实数). 向量可以用有向线段或单个黑体字母来表示如$\overrightarrow{AB}$或$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{i}$等.

2. 向量$\boldsymbol{a}$的长度称为向量的模,记为$|\boldsymbol{a}|$;模为1的向量称为单位向量;长度为零的向量称为零向量,记为$\boldsymbol{0}$. 两个向量的夹角θ,规定$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

3. 与x,y,z三个坐标轴同方向的单位向量分别记为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称为基本单位向量.

4. 非零向量$\boldsymbol{a}$分别与x,y,z三个坐标轴正向的夹角α,β,γ称为$\boldsymbol{a}$的方向角;$\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$称为$\boldsymbol{a}$的方向余弦.

5. 若$\boldsymbol{a}$在x,y,z三个坐标轴上的投影分别为a_x,a_y,a_z,则$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,记为$\{a_x,a_y,a_z\}$,称为向量$\boldsymbol{a}$的坐标;对于给定的点$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.\end{aligned}$$

6. 向量的线性运算

给定向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$及数量$\lambda$,可定义向量的加法$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$及数量乘法$\lambda\boldsymbol{a}$,统称为向量的线性运算,满足以下运算律:

1) 加法交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2) 加法结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

3) 数量乘法结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,其中$\lambda$与$\mu$是数量;

4) 数量乘法对于数量加法的分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

5) 数量乘法对于向量加法的分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

7. 向量的数量积

给定向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$,它们的数量积定义为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,其中$\theta$是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角. 数量积满足下列运算律:

1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

2) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$,其中$\lambda$是数量;

3) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

8. 向量的向量积

给定两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$,它们的向量积定义为一个向量,记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,满足:

1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中$\theta$是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角;

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向垂直于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所在的平面,并且与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$符合右手法则.

向量积满足下列运算律:

1) 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$;

2) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$,其中$\lambda$是数量;

3) 左分配律 $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$,

右分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

9. 向量及其坐标的有关公式

给定向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 及数量 λ，则有

1) $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$，$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$；

2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$，其中 θ 是两个向量的夹角. 于是可推知

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

4) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是它们对应的坐标成比例，即 $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

5) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

6) 若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位化向量，它表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 并有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$. 此时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^0&=\left\{\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\right\}\\&=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

三、空间中的曲面与曲线

1. 给定曲面 S 及三元方程 $F(x,y,z)=0$. 如果曲面 S 上点的坐标都满足方程；反之，方程的解所对应的点都在 S 上，则称 S 为方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面.

两个方程 $F_1(x,y,z)=0$ 和 $F_2(x,y,z)=0$ 表示同一个曲面的充分必要条件是它们为同解方程.

2. 空间中的曲线 C 可以看作两个曲面的交线，它的一般方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

空间曲线 C 也可表示为参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\quad a\leqslant t\leqslant b.\\z=z(t),\end{cases}$

3. 旋转面方程

一条平面曲线 C 绕它所在平面的一条直线 L 旋转一周所生成的曲面称为旋转曲面（旋转面）. 曲线 C 称为旋转曲面的母线，直线 L 称为旋转曲面的旋转轴.

yOz 平面上的曲线 C：$\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴的旋转面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$；绕

y 轴的旋转面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$. 类似可得其他坐标面上的曲线绕坐标轴的旋转面方程.

4. 柱面方程

平行于定直线 L 并沿定曲线 C 移动的直线 l 所生成的曲面称为柱面，动直线 l 在移动中的每一个位置称为柱面的母线，曲线 C 称为柱面的准线.

以 xOy 平面上的曲线 C：$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$. 同理方程 $g(y,z)=0$ 和 $h(x,z)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

5. 曲线在坐标面上的投影

在空间曲线的方程 C：$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 中，经过同解变形分别消去变量 x,y,z，则可得到 C 在 yOz，xOz，xOy 平面上的投影曲线，分别为：$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} G(x,z)=0, \\ y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

四、空间中的平面与直线方程

1. 平面方程

1）点法式：给定空间中的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及非零向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，则经过点 P_0 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

$\boldsymbol{n}$ 称为平面的法向量.

2）一般式：$Ax+By+Cz+D=0$，其中 A,B,C 不全为零.

3）截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，此时平面在 x,y,z 轴上的截距分别为 a,b,c.

4）两个平面之间的关系

设两个平面 Π_1 与 Π_2 的法向量依次为 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ 和 $\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$. Π_1 与 Π_2 的夹角 θ 规定为它们法向量的夹角（取锐角）. 这时，

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

两个平面平行的充要条件是：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$；

两个平面垂直的充要条件是：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

2. 直线方程

1）一般式：将直线表示为两个平面的交线，即

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

2) 若直线 L 经过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与方向向量 $\boldsymbol{v} = \{l, m, n\} \neq \boldsymbol{0}$ 平行，则 L 的方程为

① 对称式：
$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

② 参数式：
$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad -\infty < t < +\infty. \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

3) 两条直线之间的关系

设两条直线 L_1 和 L_2 方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$，$\boldsymbol{v}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$，$L_1$ 与 L_2 的夹角 θ 规定为它们方向向量的夹角(取锐角). 于是，

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|} = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

L_1 与 L_2 平行的充要条件是：$\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

L_1 与 L_2 垂直的充要条件是：$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

3. 直线与平面的关系

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{v} = \{l, m, n\}$，平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$. L 与 Π 的夹角 θ 规定为 L 与它在 Π 上投影直线 L' 的夹角(锐角). 这时，

$$\sin\theta = \frac{|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{n}|} = \frac{|lA + mB + nC|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

L 与 Π 垂直的充要条件是：$\dfrac{l}{A} = \dfrac{m}{B} = \dfrac{n}{C}$.

L 与 Π 平行的充要条件是：$lA + mB + nC = 0$.

五、二次曲面

由三元二次方程所表示的曲面统称为二次曲面. 通常使用截痕法来判断二次曲面的形状. 一些常用的二次曲面的标准形式如下.

1. 球面(图 1-3)：球心在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 R 的球面方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

例如，球心在原点，半径为 R 的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

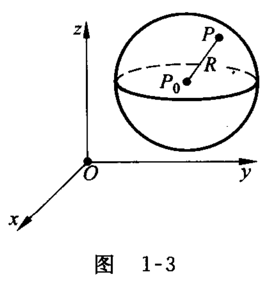


图 1-3

2. 椭球面(图 1-4)：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$，其中 $a > 0, b > 0, c > 0$.

例如，$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$，$x^2+2y^2+3z^2=12$ 等.

3. 椭圆抛物面（图 1-5）：$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$，其中 $a>0,b>0$. 例如，$z=x^2+y^2$，$-z=x^2+y^2$ 等.

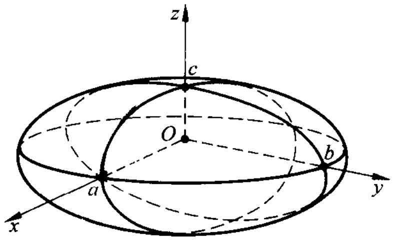


图 1-4

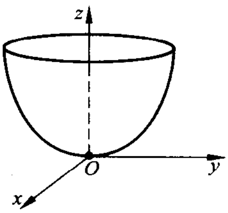


图 1-5

4. 椭圆锥面（图 1-6）：$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$，其中 $a>0,b>0$. 例如，圆锥面 $z^2=x^2+y^2$.

5. 单叶双曲面（图 1-7）：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>0,b>0,c>0$. 例如，$x^2+y^2-z^2=1$.

6. 双叶双曲面（图 1-8）：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$，其中 $a>0,b>0,c>0$. 例如，$z^2-x^2-y^2=1$.

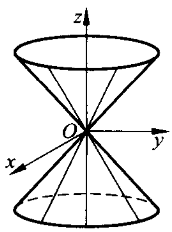


图 1-6

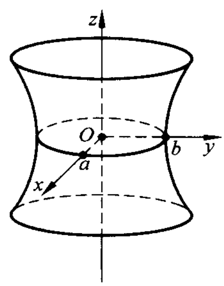


图 1-7

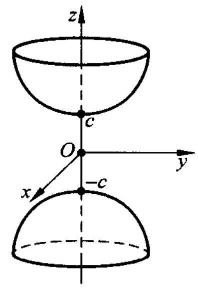


图 1-8

习题详解

习题 1-1 空间直角坐标系

1. 研究空间直角坐标系各个卦限中点的坐标特征，指出下列各点在哪个卦限：$A(1,-2,3)$；$B(2,3,-4)$；$C(2,-3,-4)$；$D(-2,-3,1)$；$E(1,2,4)$.

解 对于空间中的点 $P(a,b,c)$，它在各个卦限时的坐标特征见下页表.

卦　　限	坐标特征
一	$a>0,b>0,c>0$
二	$a<0,b>0,c>0$
三	$a<0,b<0,c>0$
四	$a>0,b<0,c>0$
五	$a>0,b>0,c<0$
六	$a<0,b>0,c<0$
七	$a<0,b<0,c<0$
八	$a>0,b<0,c<0$

于是，点 A,B,C,D,E 分别在第四、五、八、三、一卦限.

2．研究在各个坐标平面和坐标轴上点的坐标各有什么特征；指出下列各点在哪个坐标平面或坐标轴上：$A(3,4,0)$；$B(0,4,3)$；$C(3,0,0)$；$D(0,-1,0)$；$E(0,0,7)$.

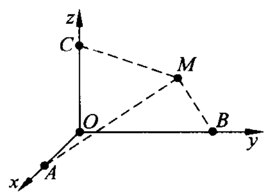
解　坐标平面和坐标轴上点的坐标特征见下表.

点的位置	xOy 平面	yOz 平面	xOz 平面	x 轴	y 轴	z 轴
坐标特征	$(a,b,0)$	$(0,b,c)$	$(a,0,c)$	$(a,0,0)$	$(0,b,0)$	$(0,0,c)$

于是，点 A,B 分别在 xOy，yOz 平面上；点 C,D,E 分别在 x，y，z 轴上.

3．点 (a,b,c) 关于各坐标平面、各坐标轴、坐标原点的对称点的坐标是什么？

解　过空间中的点 M 向各个坐标轴作垂线，垂足分别为 A,B,C（题图 1-1），这三个点在各个轴上的坐标分别设为 a,b,c. 由点的坐标定义可推知 (a,b,c) 就是点 M 的坐标. 根据对称的几何意义，很容易推知：



题图 1-1

(1) 关于 xOy,yOz,xOz 平面的对称点分别是 $(a,b,-c)$，$(-a,b,c)$，$(a,-b,c)$；

(2) 关于 x,y,z 轴的对称点分别是 $(a,-b,-c)$，$(-a,b,-c)$，$(-a,-b,c)$；

(3) 关于原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

4．求点 (a,b,c) 在各个坐标平面及各个坐标轴上的投影点的坐标.

解　与第 3 题同样的考虑，根据投影点的几何意义可得：在 xOy、yOz、xOz 平面上的投影点分别是 $(a,b,0)$，$(0,b,c)$，$(a,0,c)$；在 x,y,z 轴上的投影点分别为 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$.

5．求顶点为 $A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$，$C(5,1,11)$ 的三角形各边的长度.

解　由空间中两点间的距离公式可得

$$|AB| = \sqrt{(11-2)^2+(3-5)^2+(8-0)^2} = \sqrt{149};$$
$$|AC| = \sqrt{(5-2)^2+(1-5)^2+(11-0)^2} = \sqrt{146};$$
$$|BC| = \sqrt{(5-11)^2+(1-3)^2+(11-8)^2} = 7.$$

6. 求点 $A(4,-3,5)$ 到各个坐标轴的距离.

解 点 A 在 x,y,z 轴上的投影点分别为 $P(4,0,0)$,$Q(0,-3,0)$,$R(0,0,5)$.各个投影点到 A 的距离就是 A 到相应的坐标轴的距离. A 到 x 轴的距离为 $|AP|=\sqrt{(4-4)^2+(0+3)^2+(0-5)^2}=\sqrt{34}$;$A$ 到 y 轴的距离为 $|AQ|=\sqrt{41}$;A 到 z 轴的距离为 $|AR|=5$.

注 由此可以归纳出点 (a,b,c) 到 x,y,z 轴的距离分别为 $\sqrt{b^2+c^2}$,$\sqrt{a^2+c^2}$,$\sqrt{a^2+b^2}$.

习题 1-2 向量代数

1. 利用向量的运算律化简下列向量的线性运算:

(1) $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$;

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$;

(3) $(m-n)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(m+n)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解 (1) $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a})+(2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}+4\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{b}$.

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}$.

(3) $(m-n)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(m+n)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(m-n)\boldsymbol{a}+(m-n)\boldsymbol{b}-(m+n)\boldsymbol{a}+(m+n)\boldsymbol{b}$
$=-2n\boldsymbol{a}+2m\boldsymbol{b}$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,计算 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=(2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})-(-3\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})=5\boldsymbol{i}-11\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$.

3. 给定向量 $\boldsymbol{a}=\{3,5,-1\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,2,3\}$,$\boldsymbol{c}=\{4,-1,-3\}$,求:

(1) $2\boldsymbol{a}$;(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$;(3) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$;(4) $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$.

解 (1) $2\boldsymbol{a}=2\{3,5,-1\}=\{6,10,-2\}$.

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\{3,5,-1\}+\{2,2,3\}-\{4,-1,-3\}=\{1,8,5\}$.

(3) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}=\{6,10,-2\}-\{6,6,9\}+\{16,-4,-12\}=\{16,0,-23\}$.

(4) $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=\{3m,5m,-m\}+\{2n,2n,3n\}=\{3m+2n,5m+2n,-m+3n\}$.

4. 给定点 $A(-3,-3,3)$ 及 $B(3,4,-3)$,求与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量.

解 $\overrightarrow{AB}=\{6,7,-6\}$,则 $|\overrightarrow{AB}|=11$. 将向量 $\overrightarrow{AB}$ 单位化:$\overrightarrow{AB}^0=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right\}$. 此时 $\overrightarrow{AB}^0$ 是与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量,$-\overrightarrow{AB}^0=\left\{\frac{-6}{11},\frac{-7}{11},\frac{6}{11}\right\}$ 是与 $\overrightarrow{AB}$ 反向的

单位向量. 所以$\overrightarrow{AB}^0$ 和$\overrightarrow{AB}^0$ 即为所求.

5. 给定点 $A(4,0,5)$及点 $B(7,1,3)$,求与$\overrightarrow{AB}$同向的单位向量.

解 此时 $\overrightarrow{AB}=\{3,1,-2\}$,$\overrightarrow{AB}$ 的单位化向量即为所求,$\overrightarrow{AB}^0=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right\}$.

6. 设向量的方向余弦分别满足:(1)$\cos\alpha=0$;(2)$\cos\beta=1$;(3)$\cos\alpha=0,\cos\beta=0$. 试问这些向量与坐标轴的关系如何?

解 如果非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦是 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,而 α,β,γ 分别是 $\boldsymbol{a}$ 与 x,y,z 轴的夹角.

(1) 当 $\cos\alpha=0$ 时,说明 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角为$\frac{\pi}{2}$,则 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 x 轴.

(2) 当 $\cos\beta=1$ 时,由$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 可知 $\cos\alpha=0,\cos\gamma=0$. 这说明 $\boldsymbol{a}$ 既垂直于x 轴又垂直于z 轴,从而 $\boldsymbol{a}$ 平行于 y 轴. 再由 $\cos\beta=1>0$ 知,它与 y 轴的夹角为零,即与 y 轴同向.

(3) 当 $\cos\alpha=0,\cos\beta=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 既垂直于 x 轴又垂直于 y 轴,又由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$可知 $\cos\gamma=\pm1$,此时 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的夹角为 0 或 π,即 $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴平行.

7. 求向量 $\boldsymbol{a}=\{1,\sqrt{2},1\}$的单位化向量 $\boldsymbol{a}^0$,并求 $\boldsymbol{a}$ 与各个坐标轴的夹角.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦是 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则 α,β,γ 分别是 $\boldsymbol{a}$ 与 x,y,z 轴的夹角. $\boldsymbol{a}$ 的单位化向量为 $\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right\}$. 于是

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\alpha=\frac{\pi}{3};\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\beta=\frac{\pi}{4};\quad \cos\gamma=\frac{1}{2},\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

8. 证明下列结论:

(1) $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量且 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则$|\boldsymbol{b}|=|\lambda|$.

证 (1) 先证必要性.

由 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 可知$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$,则$|\lambda|=0$ 或$|\boldsymbol{a}|=0$,这等价于 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

再证充分性.

当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,无论何种情况都有 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

从而(1)的结论成立.

(2) 由 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量,得$|\boldsymbol{a}|=1$,于是$|\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=|\lambda|$.

习题 1-3 数量积与向量积

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{3,2,-1\}$,$\boldsymbol{b}=\{1,-1,2\}$,求:(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;(2)$5\boldsymbol{a}\cdot3\boldsymbol{b}$;