数学的性质与作用

华罗庚

科学技术出版社

数学的性質和作用

华 罗 庚

科 学 技 术 出 版 社

1959年·北京

本 書 提 要

本書作者华罗庚先生列举了許多的例子，通俗地向讀者介紹和闡明了数学的性質和作用，指出了这一門古老而又年青的学科發展的生命力，它的內容是丰富而有趣的。至于它具有的抽象性，并不是空洞的，而是从長期生产实踐中提煉出来的，表示出不同事物現象的共同性質。数学的第二个特点是精确性。因此，数学可以用来說明和計算其它自然科学中各方面的問題，从而使它們發展得完整和严格；同时，数学本身又从其它科学中吸取營养，丰富自己。通过閱讀本書，使我們对数学这一門科学有一正确的認識。

数学的性質和作用

华　罗　庚

*

科学技术出版社出版

（北京市西直門外郝家灣）

北京市書刊出版業營業許可証出字第 091 號

北京五三五工厂印刷

新华書店科技發行所發行　　各地新华書店經售

*

开本：787×1092 1/32　印張：$1\frac{5}{8}$　字数：12,000

1959 年 12 月第 1 版　1959 年 12 月第 1 次印刷

印数：15,055

总号：1437　統一書号：13051·290

定价：（7）8分

从数数到微积分

数学，苏联科学工作者称为科学中的皇后和仆人的学科，也是我国古代最有光輝成就的学科之一。

数学是一門既古老而又年青的学科。說古老，是指它是和人类文明同时开始的一門学問；說年青，到今天它仍然还是十分活跃地貫穿到各个科学部門之中起着重要作用，并且仍然不断地出現新分支的一門学問。历史上有許多科学技术的方法被新的所代替而退出了舞台，但是数学上的不少古已有之的原則到今天依然被采用着。燧人氏鑽木取火的方法今天已經普遍地不用了；但是一直到今天，人們在幼年学習的时候，数数的方法，还是扳着手指一、二、三、四、五……地数，和古代的方法沒有两样。識数已經成为人类的必須知識，如果一个人被人認为不識数，那将是一件十分不光彩的事，“唉！这个小孩七岁了，还不識数！”这是很不好听的話，这就極够父母操心的了。

大家不要以为数数是小事，从历史来看人类学会数数并不是一件容易事，根据許多社会科学的学者，对一些不久前还处于原始公社制度各个不同阶段的民族进行了調查，有些民族甚至于还沒有大于二或三的那些数的名称，有些民族虽然能够多数几个，但是很快也便完了，他們把較大的数簡單地称为“許多”或者“无数地”。由此可見，数数这看来似乎是一件很容易的事，一而十，十而百，百而千，千而万，也正是人类經过了長期逐漸累积起来的成果。

数数是数学的开始，也就出現了数学的一个重要特征——

抽象。不管是苹果也好，树木也好，牛羊也好，星星也好，月圆月缺的次数也好，花开花謝的回数也好，而一、二、三……正是它們的共性，这是数学中抽象性質的最初一步出現，它也是几千年数学發展中主要性質之一。

四五二十，不管它是五匹馬的腿数也好，四个小孩的左手手指数也好，这一句口訣抽象地概括了这些性質。

人类社会有了进展，数学也就跟着进展，它所推进的形式，有些像一棵在壮健生長着的不老松，用新的树層使老干变粗，長出新枝，枝叶往上長，根又往下深。数学在自己的發展过程中把新的材料添加到已經形成的領域之中，形成新的方向，升到新的抽象高度，并在基础方面更加深化。数学的發展的主要的特点，就是一層一層叠上去的，而不是"平鋪"的情況。由不够减而添了負数，由除不尽而出現分数，但这都是自然数的扩充而不是被取消或被另一种数所代替。在这里，我并不是説数学中完全沒有被取消的部分，如結繩記数的方法，数豆子算賬的方法，現在都不用了，而我这兒所指的是主要的概念和方法的实質。

社会进展了，到了农业社会，需要定四时，测田亩，因而产生了可以用来算天文地理的几何学。

几何学的起源一般説是这样的："几何学是埃及人發現的，从测量土地中产生的，因为尼罗河水泛濫，經常冲去田界，因为这一需要而产生了几何学。"实質上，从我国古代的数学史上来看，这种似乎沒有尼罗河便沒有几何的説法是不能完全令人信服的。恩格斯在"反杜林論"中对于数学有这样的叙述，他説："和其他所有科学一样，数学是从人們的实际需要上产生的，是从丈量田地面积和衡量容积，从計算时間，从制造工作中产生的。"这样就説明了异时异地，只要社会需要量田地，算容积，

就会产生几何学，而不必拘泥于仅在尼罗河畔才能出現几何学这一点了。

定四时是农业的一个关鍵性問題，及时播种必然依賴于寒来暑往的知識，我国古代早就有了輝煌的成就，我們可用孟子的一句話来說明当时数学發展的情况，“天之高也，星辰之远也，苟求其故，千岁之日至可坐而致也，”日至就是指冬至夏至，坐而致也就是說可以坐在那兒便算出了，也就是說可以坐在那兒算出千年之后的夏至冬至，冬至夏至定了，不失农時就有把握了，这对当时的社会生产起有很重要的作用是極显然的事实。

隨着社会的發展，数学也前进了一步，比如很多的商业往还，遇到了更多更煩的計算問題，因而出現了代数学，代数学的特点是更进一步的抽象，有了更广泛的概括性。誰都有这样的經驗，在学算术的时候，鷄兎問題或龟鶴問題是算术中比較困难的；还有大小和尚分饅头、皇帝金冠摻了銀子的問題（阿几米得問題），这些各式各样的問題也是很伤脑筋的。但是用心思考的学生，却有可能自觉地看到这些問題是根据同一原則来解决的。学了二元一次联立方程这些問題的相似性就变成为等同性了，形式与实質都成为一样的了。不要小看二元一次联立方程，它包括了无数个算术上难题的解決方法，把瑣瑣碎碎的絞脑汁的四則难题的思考方法統一起来了。一个概念的引进，节省了无数的个别思考，并且化难为易。

代数的特点就是脫离了具体数学，在一般形式上来考察算术运算，他比算术大大地提高了一步，概括性更强了，应用的范圍也就更广泛了！

到了十六世紀，在欧洲自然科学所研究的中心問題有了变化，由于实踐的需要和科学本身的發展，必須研究运动，必須

研究各种变化过程或各种变化着的量之間的互相依賴的关系，因而数学走上一个新时代，这就产生了变量与函数的概念。这也就是我国数学为什么从古代的領先地位，而后来变成落后的主要原因，由于我国的社会長期地停滞在封建制度之下，生产实踐中并沒有大量地出现对研究变量的要求。因此，虽然有不少卓越的数学家，像祖冲之等，看到了極限概念，而沒有能够产生出研究变量的数学。

变量数学的建立中，第一个决定性的步驟是：解析几何学的創立，这是十七世紀前半叶的事（笛卡兒在1631年刊布他的名著"几何学"）。

回顧一下那个时代的社会情况：当时欧洲过渡到新的資本主义的生产方式，有一系列的科学部門需要整个地改进；那正是伽利略他們奠定現代力学基础的时候，自然科学領域里都累积了实驗数据，改善了观察方法，創立了新理論来代替旧理論的时代；那也正是哥白尼在天文学方面的学説取得胜利的时候；远洋航行也急需天文学和力学的知識；为了描繪这些隨着时間变化而变化的現象，就需要变量与函数的概念。

更确切地說，开普勒（1571—1630）發現了行星是沿橢圓軌道繞着太阳运动的事实；伽里略确定了拋出物体是依拋物綫运动的事实（略去空气阻力等），橢圓与拋物綫这些几何圖形正是进一步發展的原始材料，而笛卡兒的方法正是統一地解决这些迫切問題的。总之，这个方法是以往的数学發展所准备好的，也是由于当时的科学与技术的要求所引起的。

解析几何是几何与代数的結合，有了它可以用几何的圖形来表达代数公式，也可以用代数方程来刻划几何圖形，使几何与代数互相啓發，互相促进。就是到今天还是有不少代数学工作者从几何直覺中吸取方法。而几何学工作者也經常把問題代

数化了，然后再运用代数工具化简或寻求潜在的几何意义。在一般的教学中更是常用代数几何互相啓發的方法，来增强学生对数学的認識。

微积分是变量数学發展的第二个决定性的步驟，这是牛頓与莱布尼茨在十七世紀后半叶的偉大貢献，这是近代分析学的誕生，是数学史上的一件大事。微积分比解析几何更进了一步，一方面固然它統一地处理了历史上各种求切綫、求面积、求体积的公式。并且远远地超过了那些处理方法，主要的是引进了極限概念。解析几何所研究的对象畢竟是几何圖形或者是变量間的依存关系，而微积分却可以表示一瞬間的动态，这样才能刻划出物体运动規律。例如，牛頓的第二定律就可以刻划成为：动量的变化速度与力成正比。这里，所說的动量的变化速度，就是指动量的微分。

所以有人說：牛頓为了發展力学才被迫發明微积分的，这样看法是很有道理的。但同时也必須指出，遵循不同的途徑也是可以發明微积分的。莱比尼茨就是一个例子，莱比尼茨同时是一个邏輯学者，他的处理微积分的方法比牛頓更完整、更系統些，他的方法一直到今天都被运用着。

对于数学历史發展的叙述，我們就仅准备談到这兒，不准备再把近代的数学各分支的建立的历史逐一地分析了。但可以提起的，就是数学和其他科学一样是在加速度地發展着的。几千年成万年人們才学会了数数；几百年成千年才把几何学成为系統化的学問，才引进了“代数”的概念和方法；由于社会变革，在十七世紀里面便出現了解析几何与微积分两大發明。从十八世紀以来所創立的新分支就更多了，要一一介紹是有困难的。所以，我們現在改变叙述方式，看一看数学在近代的科学技术的重大領域內做了些什么。

科学中的皇后和仆人

(一)

先談宇宙之大。宇宙的形态，也只有通过数学才能說得明白。天圓地方之說，就是古代人民尝試用几何形态来描繪客观宇宙的第一步。这种“蒼天如圓蓋，陆地如棋局”的宇宙形态的模型，后来被航海家用事实給否定了。但是我国古代从理論上对这一模型提出怀疑是要早得多，并且也同样地有力，論点是：“混沌初开，乾坤始奠，气之輕清上浮者为天，气之重濁下凝者为地。”但不知輕清之外，又有何物？也就是圓蓋之外，又有何物？三十三天之上又是何处？要想解决这样的問題，就必須借助于数学的空間形式的研究。

牛頓时代对宇宙的認識更进了一步，認为人們是生活在一个无边无际的三度空間之中，其中的日月星辰(包括地球在內)都是一些物体，按照万有引力定律相互作用着，在这空間里运行不息。这样的数学模型是上下左右前后六向都可以无限展延的空間，也就是我們中学里所認識的几何学，它的学名叫欧几里得几何学。这个理論在量田亩、算庫容、建大桥、修鉄路，一般都是十分精确的，但是，当解釋整个宇宙的时候，这种几何学便显得不够精确了。依照爱因斯坦的理論，我們所生存的空間并不是欧几里得空間，在我們所生存的空間里，三角形三內角之和并非二直角。那样的宇宙怎样刻划呢？幸亏数学家先走了一步，創造了各种不同的非欧几里得几何学。这样，爱因斯坦才能依据其中之一（列曼几何学）創造相对論来刻划我們的客观世界。回想起来，在俄罗斯偉大数学家罗巴切夫斯基形成这几何学的新方向的时候，他自己謹愼地称之为“想象的”，

但是从这样想象开端，后来这些思想成为广义相对論的基础之一。

由于我們不能够把日月星辰装在实驗室里，因而天文学一开始就是从积累数据，創造理論，再由理論發現新事物这样的途徑开始的，因而也最早地显示出理論的作用。最有趣是所謂"鉛笔尖上發現了行星"的史实，天文学家阿达姆斯与勒米果分析了天王星的运动的不規則性，得出結論說，这是由于一个还未被發現的行星的引力所引起的，勒米果根据引力法則，算出了这顆行星应在的地位；他把这結果告訴了观察員，而观察員果然在望远鏡中依照預示的位置找到这顆行星——海王星，这不但是天体力学上的胜利，而且也是数学計算的胜利，因而海王星也就有了"鉛笔尖上的行星"的諢号了。

（二）

佛經上有所謂"金粟世界"，也就是一粒粟米也可以看作一个世界，这当然是佛家的幻想。但是我們今天所研究的原子却远远地小于一粒粟米，而其中的复杂性却不亞于一个太阳系。

即使是研究这样小的原子核的結构也还是少不了数学，描述原子核內各种粒子的运动更是少不了数学。

与相对論的建立成为一个有趣的对照，前面已經說过，先有了数学工具——列曼几何，然后再有相对論的；而在量子力学的發展过程中，却因为当时沒有合适的数学工具，因而用不大严格的数学方法来处理問題的情况，所謂 δ 函数是数学上并不存在的函数，后来数学家才弥补了这个缺陷，使这种处理方法严格化起来，創造了广义函数論。核子虽小，但用到的近代数学工具真不少，如算子論、群表示論等。

在物質結构上，不管分子論也好，原子論也好，以及近代

的核子的結构也好，物理科学上虽然經过了多次的概念革新，但是自始至終都和数学分不开。不但今天，就是将来，也有一点是可以肯定的，就是一定还是要用数学。

介子的發現，就是从理論上先指出这种可能性的。在研究核粒的时候，从数学上看出了不能沒有一种具有某一特性的粒子，当时就給它命名为介子。但是那个时候，在实驗室中并沒有發現这样的粒子，当时有人認为这仅是某种理論上的推理，但后来却真正在实驗室里面找出来了，这也是理論洞察性的一个証据。

反粒子的發現也有类似的情况，先是把相对論的概念引进到量子力学之中，建立了描述电子行为的相对論量子力学的方程，然后从这个方程出發，經过数学推导而預見出来反粒子的存在。但这預見，在当时甚至显得不可理解的，后来相繼在实驗室中和宇宙綫中發現了反粒子，这又証明了数学推断的重要性。

还有，如預見出原子爆炸的可能性，也是先从理論上看出的，这是大家都知道的事实了，爱恩斯坦的著名能量公式 $E=mc^2$，不但說明这可能性，而且預示出原子爆炸后所能产生的能量。

（三）

“一日千里”，原是用来形容快的，但是随着科学的發展，在今天，用一日千里来形容慢倒还可以，如果要用它来形容快則已經是大大落后了！現在人类可創造的物体的速度远远地超过一日千里，飞机虽然快到日行万里不夜，但和宇宙速度比較，也显得很緩慢了；古代所幻想的朝昆侖而暮蒼梧，在今天已不足为奇，今天所常談到的速度是第一宇宙速度和第二、第三宇宙速度；神話中的嫦娥仅仅是奔向月球，但是苏联所發射的

人造行星（宇宙火箭），却超越月境而奔向更远的空間，与金、木、水、火、土众行星一样圍繞着太阳而环行了；

不妨回忆一下，在星际航行的开端——由詩一般的幻想进入科学現实的第一步，就是和数学分不开的。早在牛頓时代就算出了每秒鐘八公里左右的第一宇宙速度，这給科学技术工作者們指出了奋斗指标，如果能够达到这一速度，就可以發射地球衛星。經过了几世紀各門各类的科学技术專家的努力，終于發射了人造衛星，数学工作者自始至終都参与这一工作（当然，其中不少工作者是不以数学工作者見称，而是运用数学工具的人）。早已算出的第二宇宙速度，已經由苏联的輝煌成就——第一顆人造行星的發射而实現了，而已經算出的第三宇宙速度，今天依然成为我們科学家进一步的奋斗目标。

講到速度，大家都知道光的速度最快，怎样来描繪这速度上的絶对冠軍，这在数学上出現了罗倫茲群。其次，經常碰到的速度是声音在空气中傳播的速度，这一速率在高速飞行中出現了很不平常的現象，反映在数学上，便出現了混合型的偏微分方程的研究。当速度从次音速变为超音速的时候，微分方程也就从橢圓形而变为双曲型，这样便把飞行物体跨音速的情况，和混合型偏微分方程在轉变类型时候的情况联系起来了。音速是和空气密度有关的，这样就更造成了問題的复杂性，使数学更有可能在超音速飞行的研究中起作用。

（四）

以盐为例，盐是家家不可少、人人都需要的，但并不处处都产盐。因此，就必須把产地的盐运往銷地，調动的范圍大，运輸量也不小，怎样才能使运費最省（或吨公里最短，或占用車皮的立方米时数最小），这就是一个数学問題。

日用百貨及一切物資都有同样的問題，在社会主义的国家里，特别是幅員广大的我国，一切物資的最經济的調配就是一个重要問題，如果調配不当，就可以产生成百万成千万元的浪費。

物資的合理調配、农作物的合理分布、水庫的合理排灌、电力網的合理安排、工业的合理布局，都必須要通过数学才能完滿解决，求得最合理的方案。总的一句話，在具有各种互相制約、互相影响的因素的統一体中，寻求一个最合理（依某一目的，如最經济、最省人力）的解答便是一个数学問題，这也就是“多、快、好、省”原則的具体体現。

这是規划論的內容之一，这是运筹学的一个分支。

（五）

用以上的举例方法来說明数学的性質和作用是注定了要有片面性的。举一千个例，一万个例，都仅能說明若干方面而不能說明得很完整的，就如数数一样，数到一千，数到一万，并沒有完整地說明自然数的性質一样。就以以上所举的例来說，偏重于尖端而忽略了一般日常应用方面，所以我們現在再从原則方面說明几句。

数学所研究的对象之一是“量”。天下有各种各样不同的量，但是要度量一个量的多少就必需先定一單位，再用数来刻划这个量，这些單位有尺、斤、斗、秒、伏特、欧格和卡路里等。量虽不同，所取的單位虽然也因时而异，但是所用的“数”总是相同的；不用数来刻划量，是无法进行比較，无法来表达量与量之間的关系，无法来观察量的消長变化的。

“量”是貫穿到一切科学領域之內的；因此，数学的用处也就滲透到一切科学領域之中。凡是要研究量，量的关系，量的

变化，量的关系的变化，量的变化的关系的时候，就少不了数学。不仅如此，量的变化还有变化，而刻划变化一般也是用量来刻划的。例如，速度是用来描写物体的变化的动态的，而加速度則用来刻划速度的变化。量与量之間有各种各样不同的关系，各种各样不同的关系之間还可能有关系，为数众多的关系还有主要的和从屬的分别——也就是可以从一些关系推导出另一些关系来，所以数学还研究变化的变化，关系的关系，共性的共性，循环往复，逐步提高，以至无穷。

客观事物的出現一般来講有两大类現象，一类是必然的現象，一类是大数現象。必然現象是指由某些因素可以推出确定的結論的現象，例如，知道了压力和温度，我們便可推得空气的密度。大数現象是指虽然每一次所出現的情况不能决定，但多少次之后的趋势是可以推測得出的，例如，我們虽然不知道掷一次分幣所得的是正面和背面，但我們知道正面背面出現的机会是均等的。表达必然現象的数学工具一般是方程式，它可以从已知数据推出未知数据来，从已知現象的性質推出未知現象的性質来，通常出現的有代数方程、微分方程、积分方程、差分方程等等（特别常見的是微分方程）。处理大数現象的数学工具是概率論与数理統計，通过这样的分析便可以看出大势所趋，各种情况出現的比例規律。这說明了在出現"量"的学科里，必然用到数学，根据出現的情况也可以看出应当用到哪种数学。

但是这并不是說，数学的其他分支并不能直接和实际問題相联系的。例如，数理邏輯与計算机自动机的設計，运籌学与国民經济建設中的求最大經济效益的問題，复变函数論与流体力学，泛函分析和群表示論之与量子力学，列曼几何之与相对論等等。在計算机設計中也用到数論，一般說来，数学本身是

一个互相联系的有机整体，而上节所提的是与其他科学接触最多，最广泛的。

我們还应当强調一下計算数学，这是一門与数学的开始而俱生的学問，不过今天特别显示出它的重要性。因为对象日繁，牵涉日广（一个問題的計算工作量大到了前所未有的程度）。解一个一百个未知数的联立方程是今天科学中常見的（如水坝应力，大地測量，設計吊桥，大型建筑等等），仅靠笔算就困难；算一个天气方程，希望从今天的天气数据推出明天的天气数据，單凭笔算要花成年累月的时間，这样的算法与明天的天气何干？一个諷刺而已！电子計算机的發明就滿足了这样的要求。近代的电子計算机的出現絲毫沒有減弱数学的重要性，相反地更發揮数学的威力，对数学的要求提得更高，繁重的計算劳动減輕了或解除了，而創造性的劳动更多了，計算数学是一个桥梁，它把数学的創造同实际結合起来，同时它本身也是一个創造性的学科。

一門有趣的学科

数学的特点是抽象性和精确性，或者更好地說是邏輯的严格性以及它的結論的确定性，当然还有它的应用的极端广泛性。而应用的极端广泛性是它的抽象性——从实际中来的抽象推理的必然結果。这种抽象性不是空洞的，而是从長期实际經驗中提出来的。

关于精确性，恐怕不必多說，因为数学的精确性就像 $2\times 2=4$ 一样地成为不可反駁也无爭辯的事实了。数学是分清“有理”与“无理”的最好的工具，經过数学处理过的問題是最靠得住的。如果答案不能符合实际，如果不是算錯，那一定是原先的假定錯了，沒有狡辯的余地。

这样一門有絕对肯定答案的科学是最容易学習的一門科学。因为一切可以經过檢驗，因此最易于發現缺点，最易于知道自己倒底懂了沒有。当然正如馬克思所說的"科学上沒有平坦的大道……"，学科学就不要畏难，但如果認为数学比其他科学难，那是不正确的。而它的邏輯性保証了步步穩，便可走上高峰；精确性保証了有了錯就会立刻被發現，懂不懂界限清楚，会不会当場可見，恐怕这是其他科学中所少見的情况。

关于抽象性，数学一开始就出現了的这一性質的。"数"可以是苹果数，也可以是牲口数，也不妨是太阳东升的次数、月圓月缺的次数，也可以是鴻雁南飞的次数。講乘法：$4 \times 4 = 16$ 可以是四只牛的腿数，也可以是四年的季度数。

在研究几何的时候，直綫并不是拉紧了的繩，而几何学中直綫的概念却舍弃了繩的一切性質，而只留下"在一定方向无限伸長"这一点。"少时不識月，呼作白玉盘"，新月如鈎，湖平似鏡，路直如矢等等，都表示出不同事物的共同性質，而这样的共同性質，复导致出圓、新月形、平面、直綫的概念。总之，关于几何圖形的概念，我們舍弃了現实对象所有的性質，而只留下其空間形式和大小。

全部数学都有这样的特征，而整数概念与几何圖形概念是其中最原始的数学概念，后来从整数發展成为有理数、实数与复数，几何的空間發展成为四維、n 維、无穷維，又有所謂欧氏几何、非欧氏几何等等。抽象概念層出不穷，并且一个高于一个，好象要一直高向神秘化里去的样子。

事实上，并非如此。例如，四維空間就可以用电影放映来說明，电影放映是由很多片子很快替换而得的，其中每一張片子就是我們三維空間的写像，而机器一动，那就是我們所生活着的四維空間的写像了。

我們再举一个例来說明抽象性的好处。就以極簡單的公式 $y=\frac{1}{2}ax^2$，来說，它可以代表物体落地所通过的路程与时間的关系，也可以代表一个物体的能量与速度的关系，同时也可以代表电学上电流通过导綫，电流强度和产生热量的关系，在光学中也可以代表受光强度和距离的关系。这也就是，如果把 x 看成为时間 t，a 看成为引力常数 g，y 看成为距离，則上式可变为 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的伽利略落体公式，这公式說明物体降落所通过的路程与时間的平方成比例地增長着。

如果把 x 看成为一物体运动的速度率 v，a 看成为一物体的質量 m，y 看为能量 E，則上式可变为 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 的能量公式。

如果把 x 看成为电流强度 I，a 看成为导綫的电阻R，而 y 代表电流通过时單位时間所产生的热量 Q，則又得到公式 $Q=\frac{1}{2}kI^2$。

这些不同現象都由一个数学公式来表达，数学上所研究出来的性質，也就变为各种不同現象中的共同性質了。

又如同一个方程，彈性力学上是描写振动的，流体力学上却描写了流体动态，声学家不妨称它为声学方程，电学家可称它为电振方程，而数学家所研究的对象正是这些对象的共性的一面——双曲型偏微分方程。

这样共性的研究大有好处，一方面可以促成不同分支的統一理論的可能性，而另一方面也可以建議各种不同現象間的相互模拟。例如，声学家可以用相似的电路圖来研究声学現象，