21世纪独立院校本科规划教材·数学系列

丛书主编 郑玉美

高等数学全程辅导与提高

GAODENG SHUXUE QUANCHENG FUDAO YU TIGAO

主 编 魏 莹 许 虹 何炜煌

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

高等数学全程辅导与提高

21 世纪独立院校本科规划教材·数学系列

丛书主编　郑玉美

高等数学全程辅导与提高

主　编　魏　莹　许　虹
何炜煌
副主编　马　倩　张汉萍
杜洪艳

华中师范大学出版社

内容简介

本书是《高等数学》上、下册的辅导教材，内容包括函数与极限、一元函数微积分、多元函数微积分、空间解析几何、级数和常微分方程，每章内容由五部分组成：① 基本内容与要求；② 疑难解答；③ 习题选解；④ 范例选讲；⑤ 自测题。

本书可帮助非数学专业类学生学习高等数学，也可为准备高等数学考试的学生提供参考，还可作为广大教师教学的参考书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程辅导与提高/魏莹 许虹 何炜煌主编.
—武汉：华中师范大学出版社，2006.8
(21 世纪独立院校本科规划教材·数学系列)
ISBN 7-5622-3416-7
Ⅰ.高… Ⅱ.①魏… ②许… ③何… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 059796 号

高等数学全程辅导与提高

主编：魏莹 许虹 何炜煌
责任编辑：徐胜林 **责任校对**：罗 艺 **封面设计**：罗明波
编辑室：第二编辑室 **电话**：027－67867362
出版发行：华中师范大学出版社©
社址：湖北省武汉市珞瑜路 152 号
电话：027－67863040(发行部) 027－67861321(邮购)
传真：027－67863291
网址：http://www.ccnup.com.cn **电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
经销：新华书店总经销
印刷：湖北民政印刷厂 **督印**：姜勇华
字数：400 千字
开本：787mm×960mm 1/16 **印张**：20.5
版次：2006 年 8 月第 1 版 **印次**：2006 年 8 月第 1 次印刷
印数：1－5 500 **定价**：30.00 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者：欢迎举报盗版，请打举报电话 027－67861321

21世纪独立院校本科规划教材·数学系列

丛书编写委员会

顾　问　齐民友　任德麟　邓宗琦

主　任　郑玉美

副主任　（以姓氏笔画为序）

尤正书（湖北大学知行学院）

冉兆平（中南民族大学工商学院）

毕重荣（中国地质大学江城学院）

宋礼民（武汉科技大学中南分校）

刘昌喜（武汉职业技术学院）

陈方年（江汉大学文理学院）

张清平（武汉生物工程学院）

黄承绪（武汉科技大学城市学院）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

21世纪独立院校本科规划教材·数学系列

丛书主编　郑玉美

《高等数学全程辅导与提高》编写委员会

主　编　魏　莹（武汉职业技术学院）

许　虹（中国地质大学江城学院）

何炜煌（江汉大学文理学院）

副主编　马　倩（武汉科技大学城市学院）

张汉萍（武汉职业技术学院）

杜洪艳（武汉科技大学中南分校）

编　者（以姓氏笔画为序）

马　倩（武汉科技大学城市学院）

许　虹（中国地质大学江城学院）

李　霞（武汉科技大学城市学院）

李圆媛（武汉工程大学）

杜洪艳（武汉科技大学中南分校）

张汉萍（武汉职业技术学院）

张清平（武汉生物工程学院）

宋　翌（武汉生物工程学院）

吴　珊（中南民族大学工商学院）

魏　莹（武汉职业技术学院）

序　言

自1998年以来，短短几年里，我国高等教育的规模迅速扩大，各大学的独立院校异军突起，办学规模得到空前的发展，据权威部门统计，2005年，我国在校大学生为二千三百万，毛入学率为百分之二十一。关于连续扩招的是非得失已有不少议论见诸报端或网上，见仁见智，这里我们不予讨论。但可以肯定，今后一段时期，工作的重点是稳定规模、提高质量。

提高教学质量需要作持久的努力，需要做大量艰苦细致的工作。其中教材建设是一个很重要的方面。高等数学(包括线性代数、概率论初步等)作为大多数非数学类专业的一门必修的公共课，教学方法的改革与教材建设有许多工作要做。目前使用面较广且比较成熟的少数几种教材，一般来说内容偏多偏深，对于以培养应用型人才为主要目标的独立院校或高等数学课时较少的各类专业，不是很合适。作为公共课的高等数学教材，应该更多地注重概念的应用，使学生切实理解最基本的概念、背景和实质，并初步具备运用所学知识分析和解决实际问题的能力。为此，郑玉美教授领衔发起组织了十余所独立院校从事数学教学多年的、经验丰富的老师，对独立院校数学课程的改革作了认真的探讨，在此基础上编写了展现在读者眼前的《21世纪独立院校本科规划教材·数学系列》。

面对独立院校写出具有独特性的教材，是需要足够的勇气和非常艰苦的工作的，我赞赏郑玉美教授在这个方面作出的实实在在的尝试。

相信这套教材的出版，对于满足独立院校教学实际需要和推动教材改革都有一定作用。

任德麟

2006年8月

前　言

步入新世纪，中国的高等教育出现了薪新的格局.一大批独立院校相继成立，加入到传统的高等本科教育大军之阵线，它们常以“三本”的面目出现，正在成为高等教育的一支重要力量.这批新军（独立院校三本的学子们）在传统的教师们率领下手抱着传统的教材以传统的方式苦战了好几个春秋，无论是独立院校的执教者还是勤奋的学子们都盼望能有适合于这批规模巨大的新型的独立院校的教材，这是势在必行，又是势在必得的时代所需.郑玉美教授在成功推出《21世纪高等职业教育规划教材·数学系列》后，吸纳了湖北大学知行学院、武汉科技大学中南分校、武汉科技大学城市学院、中国地质大学江城学院、江汉大学文理学院、中南民族大学工商学院、武汉生物工程学院、武汉工程大学、武汉工业职业技术学院以及武汉职业技术学院（本科部）等独立院校一批经验丰富的教育专家又编写一套具有“三用三凸一独”的《21世纪独立院校本科规划教材·数学系列》，以满足独立院校教学之急需.这套用心力作的教材具有以下特点：

1. 以“三用”为原则

(1) 够用　删去传统本科教材中难而繁的内容，保留理、工、农、医、管各本科专业的最基本的内容，达到满足本科高度所必需的最低限度，够用即可.

(2) 管用　增添以往传统教材中没有的同时又是必需的知识内容，使教材适合三类本科各专业之需要，达到管用的效果.

(3) 会用　淡化传统本科教材偏重理论的倾向，删去理论性较强的内容，强调数学知识的应用，力求学以致用、学后会用，增强学生学习数学的信心与兴趣.

2. 以“三凸现”为特色

(1) 凸现数学与文化的联系　对重要的数学概念与理论，着重讲解它们的历史背景、产生的过程及影响，同时有机地结合一些有趣的数学故事及有影响力的数学家的逸事进行讲解，尽量让学生全面了解数学，达到提高学生的综合素质的目的.

(2) 凸现数学现代化教学手段的应用　将数学软件的使用有机地融合进教材中，不盲目追求运算技巧，着力于培养学生解决实际问题的能力.

(3) 凸现数学的应用性　如把有重要应用的“微元法”贯穿在整个高等数学教材中.

3. 体现独立院校的“独”字,全套教材从知识的分量、难易程度、结构分布等方面要适合独立院校三本之需要.如高等数学以一元微积分、多元微积分为主线,而多元微积分浓缩为多元微分学与多元积分学两大块,将微分方程、无穷级数放在一元微积分学之后,这样使“三本”学生们易于接受掌握.

为了帮助学生更好地学习《高等数学》,满足部分学生考研时复习数学的需要,我们编写了与《高等数学》上、下册配套的《高等数学全程辅导与提高》.全书按配套教材的内容分为十章,每章的“全程辅导”体现在第一、二、三部分,将本章的内容加以归纳,概念作进一步分析与深化,书上较难习题给出全解.而“提高”则体现在第四、五部分,选取了一些近几年各类非数学专业学校考研试题作为例题及自测题,供学生考研复习之用.

本套教材共六种:《高等数学》(上)、《高等数学》(下)、《高等数学全程辅导与提高》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《概率论与数理统计学习指导》.

本套教材的框架结构、统稿定稿由丛书主编郑玉美教授及各册主编负责.齐民友、任德麟、邓宗琦教授认真审阅了全部教材的原稿,提出了许多建设性意见,在此对三位资深教授表示衷心的感谢.

参加《高等数学全程辅导与提高》编写的有:魏莹、许虹、张汉萍、马倩、李圆媛、张清平、李霞、宋翌、吴珊、杜洪艳等.全书由魏莹、许虹、何炜煌统稿、定稿.

虽然各位编者十分努力,但由于我们的水平有限,成书时间又很仓促,本套教材还可能有不少的缺点与错误,希望广大师生、读者批评指正.

编委会

2006 年 8 月

目　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　函数与极限

一、基本内容与要求

（一）大纲要求

1. 理解函数的概念及函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
2. 理解复合函数和反函数的概念.
3. 熟悉基本初等函数的性质及其图形.
4. 会建立简单实际问题中的函数关系式.
5. 理解极限的概念（对极限的 ε-N、ε-δ 定义可在学习过程中逐步加深理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高的要求），掌握极限的四则运算法则.
6. 理解极限存在的夹逼准则，了解函数单调有界准则，会用两个重要极限求极限.
7. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限.
8. 理解函数在一点连续和在一个区间上连续的概念，了解间断点的概念，并会判别间断点的类型.
9. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（介值定理和最大、最小值定理）.

（二）知识网络图

- 函数
  - 基本概念
    - 几种基本特性
      - 有界性
      - 单调性
      - 周期性
      - 奇偶性
    - 复合函数
    - 反函数
    - 初等函数
  - 数列的极限
    - 定义
    - 收敛数列的性质
  - 函数的极限
    - 定义
    - 函数极限的性质
    - 计算方法
      - 四则运算法则
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
      - 两个重要极限
      - 等价无穷小
    - 无穷小、无穷大
  - 函数的连续性与间断点
    - 连续的定义
    - 间断点
      - 第一类间断点
        - 可去间断点
        - 跳跃间断点
      - 第二类间断点
        - 无穷间断点
        - 振荡间断点
    - 闭区间上连续函数的性质

(三) 基本内容

1. 函数

(1) 函数的概念　函数关系中有三个要素,即定义域、对应规则和值域,其中定义域和对应规则是两个本质的要素,而函数的值域完全由对应规则及定义域所确定.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的;在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时我们约定:函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

(2) 函数的基本特性

① 有界性　若一个函数在一个区间上有界(有上界,有下界),需要注意的是界不是唯一的,例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,1 及所有大于 1 的数都可以作为它的上界.

② 单调性　函数的单调性总是相对于自变量的某一区间而言的. 例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内为减函数,在 $(0,+\infty)$ 内为增函数.

③ 奇偶性　我们讨论奇偶性都是在对称区间上进行的. 因此,函数的定义域具有对称性是函数是否具有奇偶性的必要条件. 例如,函数 $y=\ln x(x>0)$ 必不是奇偶函数; $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 是奇函数,但在区间 $(0,+\infty)$ 上就不是.

两个奇函数的和或差仍为奇函数; 两个偶函数的和、差、积、商(除数不为 0)仍为偶函数; 两个奇函数的积、商(除数不为 0)是偶函数; 一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为 0)仍为奇函数.

④ 周期性　一个函数是周期函数,那么它的周期不是唯一的,事实上,若 T 为周期函数 $f(x)$ 的周期,kT(k 为整数,$k\neq0$)都可以作为它的周期,我们通常指的周期是指它的最小正周期,但要指出的是,并不是所有的周期函数都存在最小正周期. 例如常数函数 $y=C$ 是周期函数,以任何非零实数为周期,但它没有最小正周期,因为正实数没有最小值; 又如,狄里赫莱函数 $D(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为有理数;}\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为无理数.}\end{cases}$ 任何有理数都是它的周期,但是它没有最小正周期,因为正有理数没有最小值.

(3) 反函数存在的充要条件是函数是一一对应的. 而函数的单调性只是函数存在反函数的充分条件,并不是必要条件. 也就是说,单调函数必有反函数,而有反函数的函数未必一定是单调函数.

(4) 复合函数是由两个或多个函数进行有限次的复合得到的,但并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如,$y=\arcsin u$, $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数,这是因为中间函数 $u=2+x^2$ 的值域 $[2,+\infty)$ 与外层函数 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 的交集是空集.

复合函数是本章的一个重点,特别是分段函数的复合.

2. 数列的极限

(1) 定义　数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 其精确描述如下:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n>N,\ |x_n-a|<\varepsilon.$$

数列 $\{x_n\}$ 不以 a 为极限,其精确描述如下:

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall N\in\mathbf{N},\ \exists n_0>N,\ |x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon.$$

在这个定义里面,要特别注意:

① ε 的任意性　ε 是衡量 x_n 与 a 的接近程度的,ε 愈小,表示接近的程度愈好,它除限于正

数外，不受任何限制，这正说明 x_n 与 a 能够接近到任何程度. 然后，尽管 ε 有它的任意性，但是当它一经给出，就应暂时看作是固定不变的，以便根据它来求 N. 再者，ε 既然可以是任何正数，那 $2\varepsilon,3\varepsilon,\varepsilon^2$ 等同样为任何正数，因此定义中不等式右边的 ε 完全可用 $2\varepsilon,3\varepsilon$ 或 ε^2 代替. 同样可知，不等式中"$<$"也完全可以换成"$\leqslant$"号.

② N 的存在性　一般来说，N 是随着 ε 的变小而变大的，所以可用 $N(\varepsilon)$ 来强调 N 是依赖于 ε 的，但是这种写法并不意味着 N 是由 ε 所唯一确定的. 因为对已给的 ε，若 $N=100$ 能满足要求，则 $N=101$ 或 1000 或 10000 自然能够满足要求. 其实 N 等于多少关系不大，重要的是它的存在性. 只要存在一个 N，那么大于 N 的任何一个自然数都能够满足要求，因此在实际使用中的 N 也不必限于自然数，只要它是正数就行了.

(2) 收敛数列的性质

性质 1：(唯一性) 收敛数列的极限是唯一的.

性质 2：(有界性) 收敛数列都是有界数列.

性质 3：(收敛数列的子数列的性质) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛，且极限也是 a.

由性质 2 可知，无界数列必定发散. 例如 $\{n^2\}$ 是无界的，所以是发散的，也就是它的极限不存在. 但是必须注意，有界性只是数列收敛的必要条件，而非充分条件，例如 $\{(-1)^{n+1}\}$ 有界，但并不收敛.

这几个性质给出了证明数列 $\{x_n\}$ 发散的方法，通常有以下几种：

① 找出数列 $\{x_n\}$ 的两个有不同极限的子列；

② 找出数列 $\{x_n\}$ 的一个发散子列；

③ 证明数列是无界的.

3. 函数的极限

(1) 定义

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\,x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N>0,\ \forall\,|x|>N$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

在函数极限的 ε-δ 定义中，要求 $0<|x-x_0|<\delta$，而不是 $|x-x_0|<\delta$，这是因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是研究当自变量 x 无限趋近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势而不是最终结果. $x\to x_0$ 是指 x 无限趋近于 x_0 但不等于 x_0. 因此，在讨论函数极限的时候，我们可以全然不顾在 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 的情形，即不考虑 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 是否有定义，即使有定义，也不考虑 $f(x_0)$ 等于多少. 否则，如果在 ε-δ 定义中将"$0<|x-x_0|<\delta$"改为"$|x-x_0|<\delta$"，那就必须考虑函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的情形，这就会大大限制函数极限的研究.

(2) 左、右极限　在讨论分段函数 $f(x)$ 的分段点 x_0 处的极限时，由于 x_0 的两侧 $f(x)$ 的定义不同，所以当我们笼统地求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 时无法将 $x\to x_0$ 时对应的 $f(x)$ 用具体的定义式去表达，因而必须研究函数 $f(x)$ 分别从 x_0 的左边和右边趋近于 x_0 时的极限.

有些函数虽然不是分段函数，但是由于在某一些点的左右两侧变化趋势不一样，求其极限也要分别求它的左、右极限. 例如，函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的左、右极限就不一样.

(3) 无穷小与无穷大

① 定义

无穷小：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小量，简称为无穷小.

无穷大：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大量，简称为无穷大.

无穷小与无穷大都是变量.无穷小是以零为极限的变量，它不是绝对值很小的非零常量.零是唯一作为无穷小的常量.同样，任何一个绝对值很大的常量都不是无穷大，无穷大是无界量，但无界量却不一定是无穷大，例如，函数 $y=x\cos x$ 当 $x\to\infty$ 时是无界的，但该函数却不是无穷大.

② 无穷小和函数极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，即 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

③ 无穷小的运算性质

ⅰ）有限个无穷小的和仍为无穷小；

ⅱ）有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小；

ⅲ）有限个无穷小的乘积仍为无穷小；

ⅳ）常数与无穷小的乘积是无穷小.

(4) 无穷小的比较

① 定义：设 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$.

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq0$，则称 α 是 β 的同阶无穷小；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 是 β 的等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是 β 的低阶无穷小.

② 当 $x\to0$ 时，几个常用的等价无穷小：

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$；

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq1)$；$(1+x)^a-1\sim ax$.

③ 作等价无穷小的代换时，可以在求乘积的极限运算中把其中的一个因式“整个的”用它的等价无穷小代换，但绝不能对分子或分母中的某个加项作代换.例如，在求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ 时，如果将 $\sin x$，$\tan x$ 均换成 x，那么分子成为 0，得出极限为 0.而事实上

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

4. 极限的运算

(1) 极限的四则运算定理

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)=A+B$；

$\lim[f(x)-g(x)]=\lim f(x)-\lim g(x)=A-B$；

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$；

$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$，C 为常数；　　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$，$n$ 为正整数；

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$；　　　　$\lim f[g(x)]=f[\lim g(x)]$.

(2) 夹逼准则　若在点 x_0 的某个空心邻域内(或 $|x|>N$ 时)有不等式

$$F(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)$$

成立，且有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} F(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} G(x)=A,$$

则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A.$$

(3) 单调有界准则　若数列 $\{x_n\}$ 是单调递增的数列，即 $x_n\leqslant x_{n+1}$，且 $x_n<M$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在；若数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的数列，即 $x_n\geqslant x_{n+1}$，且 $x_n>M$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

利用"单调有界准则"求极限时，一般情况可以分为两步，一是判定数列的单调性及有界性，二是利用数列的通项的递推公式两边取极限，从而通过解方程来求出所要求的极限.

(4) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

注意　*$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$ 的区别. 前者运用的是无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小，后者运用的是重要极限.*

5. 函数的连续性与间断点

(1) 连续的定义

① 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

② 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

③ 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

以上给出的函数在一点连续的定义虽然在表述方式上不同，但它们所表示的实质都完全相同，即函数在一点连续必须满足三个条件：

① 函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，其函数值为 $f(x_0)$；

② 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

③ 这个极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

这三个条件提供了判断函数 $f(x)$ 在 x_0 是否连续的具体方法.

(2) 左连续与右连续　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则分别称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处是左连续或右连续.

如果我们在闭区间上讨论函数的连续性，那么在端点处就有相应的左连续与右连续的问题；同样，讨论分段函数在分段点处的连续性时，一定要分别考虑在分段点处是否左连续和右连续的问题.

(3) 函数的间断点

① 定义　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

② 判别方法　由函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义可知，如果 $f(x)$ 在点 x_0 处有下列三种情况之一：

ⅰ）函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处没有定义；

ⅱ）极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

ⅲ）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

③ 间断点的分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点：}f(x_0-0),\ f(x_0+0)\text{均存在}\begin{cases}\text{可去间断点：}f(x_0-0)=f(x_0+0).\\ \text{跳跃间断点：}f(x_0-0)\neq f(x_0+0).\end{cases}\\ \text{第二类间断点：}f(x_0-0),\ f(x_0+0)\text{中至少有一个不存在.}\end{cases}$$

(4) 连续函数的性质

① 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数；

② 单调连续函数的反函数是连续函数；

③ 基本初等函数在其定义域内是连续的；初等函数在其定义区间内是连续的.

(5) 初等函数的连续性　在初等函数的连续性中强调了“初等函数在其定义区间内都是连续的”，这里“定义区间”不可忽略，也不可换为“定义域”，否则结论不成立. 因为定义函数在一点连续的前提条件是函数在该点的某个邻域内有定义，但有些初等函数在其定义域中的某些点是孤立点，即不能定义连续性. 例如，$y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $\{x\mid x=2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，定义域中所有的点都是孤立点，因此无法取极限，也就无法谈连续性了.

(6) 闭区间上连续函数的性质　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则：

① (有界性定理) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即存在 $M>0$，使得当 $x\in[a,b]$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$；

② (最大值、最小值定理) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，即在区间 $[a,b]$ 上必存在 M、m，使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 恒成立；

③ (零点定理) 若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$；

④ (介值定理) 若 $f(a)\neq f(b)$，则对于任何介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数 C，至少存在一点 ξ，$a<\xi<b$，使 $f(\xi)=C$.

二、疑难解答

1. 单调函数一定存在反函数，不单调的函数是否一定不存在反函数？

答　不是的. 函数的单调性是函数存在反函数的充分条件，而非必要条件. 函数是否存在反函数，取决于该函数在其定义域内是否为单射. 有些函数在其定义域内不单调，但是却有可能是单射，此时它就存在反函数. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[-1,0],\\ x+1, & x\in(0,1].\end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 上并不单调，但它是 $[-1,1]\to[0,2]$ 的单射，所以存在反函数：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com