

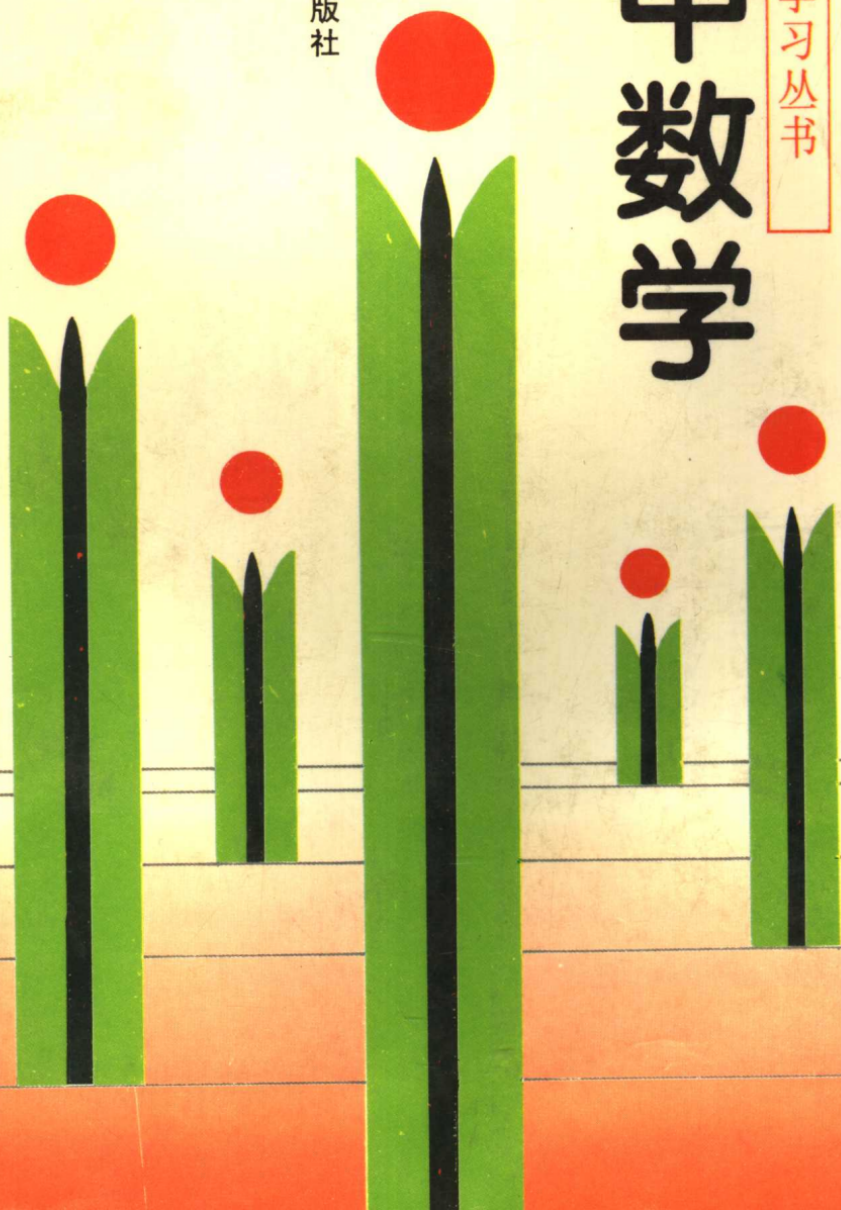
GAOZHONG SHUXUE

特级教师指导学习丛书

高中数学

王占聪 主编

安徽科学技术出版社



51-11
· WZC

书69A-5

特级教师指导学习丛书

高中数学

主 编 王占聪
编 著 王占聪 王家华 葛金虎
 窦祖谋 管永宏

安徽科学技术出版社

(皖)新登字 02 号

责任编辑:汪卫生

责任校对:周 秋

封面设计:盛琴琴

特级教师指导学习丛书

高中数学

王占聪 主编

*

安徽科学技术出版社出版

(合肥市跃进路 1 号新闻出版大厦)

邮政编码:230063

新华书店经销 安徽省地方志印制中心印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:20.125 字数:500 千字

1997 年 8 月第 1 版 1997 年 8 月第 1 次印刷

印数:8 000

ISBN 7-5337-1521-7/O·30 定价:19.80 元

(本书如有倒装、缺页等问题向承印厂调换)

内 容 提 要

本书是根据《高中数学教学大纲》和人民教育出版社出版的最新数学教材,针对高中生的特点,由特级教师和高级教师精心编撰的。各部分的内容,除指出知识要点和释疑解难外,还列举了大量典型范例并予以解析。每节后有练习,每章后有习题,书末提供了10套综合训练题,并附有练习、习题和综合训练题的解答提示和参考答案。

本书文字简洁明了,大量的练习、习题和综合题是作者精心编选的,提出的解题思路和方法也比较独特,特别适合高中参考、自学。

编 者 的 话

特级教师是我国先进教学方法的代表人物，都曾取得过令人称羡的教学业绩。安徽科学技术出版社邀请北京、上海、安徽、福建等地的中学特级教师主编的《特级教师指导学习丛书》，较集中地展现了特级教师的教学成果，是一套适合广大高中学生阅读的高水平的课外读物。

本丛书以《中学教学大纲》和人民教育出版社出版的最新中学教材为编写依据。首批出版的有七个分册，它们是《高中语文》、《高中数学》、《高中英语》、《高中历史》、《高中政治》、《高中物理》和《高中化学》。

与同类书相比，本丛书有下述特点：一是内容精炼，文字简洁明了，以祈望尽可能少地占用高中生的宝贵时间。二是特别注重学生分析问题和解决问题能力的培养和训练。例如在《高中数学》中，各部分除以精当的文字指出知识要点和释疑解难外，还列举了许多典型范例并予以分析、解答和评注，尤其是“评注”的内容，有画龙点睛之效果。其他各分册也各有传神之笔。三是书末的综合训练题（或模拟试卷），是在对未来高考出题趋势预测的基础上，由作者精心拟出的，有较强的导向性。

出版者和编写者都有一个真诚的愿望，就是让读者花较少的时间和精力，而能从本丛书中获取较多的知识和启示，有效地提高高考成绩。希望读者对本丛书提出意见，以便使之趋于完善。

安徽科学技术出版社

目 录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数	1
一、集合	1
二、映射与函数	6
三、幂函数、指数函数和对数函数的图象及性质	11
四、函数的最值	19
五、指数方程和对数方程	24
习题一	29
第二章 三角函数	36
一、三角函数的基本概念	36
二、三角函数的性质	44
三、三角函数的图象	54
习题二	62
第三章 两角和与差的三角函数	68
一、三角函数式的求值	68
二、三角函数式的化简	80
三、三角函数式的证明	88
四、三角形中的计算与证明	99
五、三角函数的最大值和最小值	110
六、三角函数的综合应用	122
习题三	130
第四章 反三角函数和简单三角方程	137
一、反三角函数的概念、图象和性质	137
二、反三角函数的运算	147

三、三角方程	157
习题四	166
第五章 不等式	172
一、不等式的性质与证明	172
二、不等式的解法	179
三、不等式的应用	185
习题五	190
第六章 数列、极限、数学归纳法	195
一、数列的概念	195
二、等差数列、等比数列	199
三、等差、等比数列的应用	204
四、数列求和	209
五、递推数列的通项公式	214
六、数列极限	221
七、数学归纳法	228
习题六	234
第七章 复数	240
一、复数概念	240
二、复数代数式的运算	245
三、复数的三角形式及其运算	251
四、复数的模、共轭复数及其应用	257
五、复数的几何意义	264
六、复数与方程	271
七、复数的应用	277
习题七	283
第八章 排列、组合、二项式定理	288
一、基本原理、排列与组合	288
二、排列、组合应用题	292

三、二项式定理	296
四、二项式定理的应用	301
习题八	305
第九章 直线与平面	310
一、平面的基本性质	310
二、空间两条直线	315
三、空间直线与平面	320
四、平面与平面平行	325
五、平面与平面垂直	331
六、空间的角	335
七、空间的距离	342
八、三垂线定理、逆定理及其应用	349
习题九	356
第十章 多面体与旋转体	363
一、棱柱、棱锥、棱台有关概念和性质	363
二、棱柱、棱锥、棱台的面积	369
三、棱柱、棱锥、棱台的体积	375
四、圆柱、圆锥、圆台的性质及面积、体积	382
五、球	389
习题十	394
第十一章 直线与圆	400
一、平面直角坐标系	400
二、直线方程的基本形式	406
三、直线的位置关系	411
四、曲线与方程	418
五、圆的方程	421
六、直线与圆的位置关系	425
习题十一	432

第十二章 圆锥曲线	438
一、椭圆.....	439
二、双曲线.....	445
三、抛物线.....	450
四、坐标平移.....	455
五、直线与圆锥曲线的位置关系.....	460
六、轨迹问题.....	466
七、定值问题和最值问题.....	473
习题十二.....	478
第十三章 参数方程、极坐标	485
一、参数方程与普通方程的互化.....	485
二、参数方程的应用.....	489
三、极坐标和极坐标方程.....	495
四、圆锥曲线的极坐标方程.....	499
习题十三.....	503
附 1 综合训练题	511
附 2 练习、习题、综合训练题解答提示和参考答案	549

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

函数是中学数学研究中最为核心的内容，函数的思想贯穿于整个中学数学内容的始末；集合与映射是讨论函数定义、性质的前提，集合论也是高等数学的重要分支。

本章的主要内容是讨论集合与映射，函数的定义域、值域、单调性、奇偶性以及幂函数、指数函数、对数函数的性质与应用。

在研究函数性质及应用时，要运用数形结合的思想 and 函数的观点，处理“式”、“方程”、“不等式”、“数列”、“曲线与方程”等问题。

指数方程与对数方程作为指、对数函数应用的一个重要方面，要求熟练掌握几种基本形式的方程解法。

一、集 合

(一) 知识要点

1. 集合是一个不定义概念，其具有“三性”，即：确定性、无序性和互异性。
2. 集合的表示方法通常用列举法或描述法。
3. 集合与集合之间的关系有相等、子集与真子集。
4. 集合之间的运算是交、并、补集。

(二) 释疑解难

本节要求对集合的关系有深刻的理解，并能熟练地进行集合之间的运算。

元素与集合的关系是从属关系,常用“ \in ”或“ \notin ”表示.

集合与集合的关系是包含关系,常用“ \subseteq ”、“ $\not\subseteq$ ”或“ \subset ”、“ $\not\subset$ ”表示,相等是集合与集合关系的特殊情形.

集合与集合之间的运算主要讨论交、并、补集,要正确理解交、并、补集的意义,正确区分“且”与“或”的本质差异.

(三)典型范例解析

例 1 设 $P = \{x | x \leq \pi\}$, $a = 3.14$, 则下列关系正确的是 ().

(A) $a \subset P$ (B) $a \notin P$ (C) $\{a\} \in P$ (D) $\{a\} \subset P$

解: \notin 和 \in 表示元素与集合的关系, \subset 表示集合与集合的关系, 显然 (A) 与 (C) 不正确, 又 $a = 3.14 < \pi$, $\therefore a \in P$, \therefore (B) 也不正确, 选 (D).

评注: 上述求解系采用排除法, 事实上, 运用集合关系的定义, 可直观地看出 (D) 正确.

例 2 如果 $I = \{a, b, c, d, e\}$, $M = \{a, c, d\}$, $N = \{b, d, e\}$, 其中 I 是全集, 那么 $\overline{M} \cap \overline{N} =$ ().

(A) \emptyset (B) $\{d\}$ (C) $\{a, c\}$ (D) $\{b, c\}$

解法一: $\overline{M} = \{b, e\}$, $\overline{N} = \{a, c\}$, $\therefore \overline{M} \cap \overline{N} = \emptyset$.

解法二: $\because \overline{M} \cap \overline{N} = \overline{M \cup N}$ 而 $M \cup N = \{a, b, c, d, e\}$, $\therefore \overline{M \cup N} = \emptyset$. 选 (A).

评注: 在 I 内讨论集合的运算, 对于有限集, 只要依据定义, 不遗不漏即可, 同时, 也可以用“文氏图”解之.

例 3 如图 1-1, 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S$, 令 $Z = S \cap T$, 那么 $S \cup Z$ 等于 ().

(A) Z (B) T (C) \emptyset (D) S

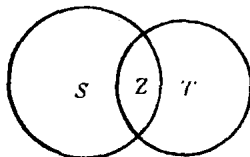


图 1-1

解:借助文氏图,容易作出判断,选(D).实际上,

$\because Z=S \cap T$, 无论 Z 是否为空集, 都有 $Z \subset S$, $\therefore Z \cup S=S$.

评注:本题特点是题意叙述抽象,旨在考查审题及理解能力;此题还可用特殊值法求解.

例 4 已知集合 $A=\{(x, y) \mid x^2+y^2+6x-4=0\}$, $B=\{(x, y) \mid x^2+y^2+6y-28=0\}$, $C=\{(x, y) \mid ax+by+c=0, a \cdot b \cdot c \neq 0\}$, 且 $A \cap B \subset C$, 求 $a:b:c$.

分析:集合 A, B, C 所表示的图形分别为圆与直线, $A \cap B$ 表示两圆交点集合(相离则为 \emptyset), $A \cap B \subset C$ 表示两圆交点在直线 $ax+by+c=0$ 上(或其为两圆的公共弦或公切线).

解: A 所表示的图形为圆 $(x+3)^2+y^2=(\sqrt{13})^2$, B 所表示的图形为圆 $x^2+(y+3)^2=(\sqrt{37})^2$, 圆心距

$$d=\sqrt{(-3-0)^2+[0-(-3)]^2}<\sqrt{13}+\sqrt{37},$$

\therefore 两圆相交, 易知公共弦所在直线方程是 $6(x-y)+24=0$,

即 $x-y+4=0$.

又 $A \cap B \subset C$,

\therefore 直线 $x-y+4=0$ 与直线 $ax+by+c=0$ 重合.

$\therefore a:b:c=1:(-1):4$.

评注:此解法运用轨迹思想,解之简便灵活,一般方法可联立方程,解出 $A \cap B$, 其元素属于 C , 代入 $ax+by+c=0$ 中求解.

例 5 设 a, b 是两个实数,

$$A=\{(x, y) \mid x=n, y=na+b, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$B=\{(x, y) \mid x=m, y=3m^2+15, m \in \mathbb{Z}\},$$

$$C=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 144\}$$

是平面内点的集合, 讨论是否存在 a 和 b 使得 (1) $A \cap B \neq \emptyset$,
(2) $(a, b) \in C$ 同时成立.

分析:集合 A 表示直线 $y=ax+b$ 上横坐标为整数的点,集合 B 表示抛物线 $y=3x^2+15$ 上横坐标为整数的所有点,集合 C 表示圆 $x^2+y^2=12^2$ 上及其内部的所有点,可利用解几的方法求解.

解:若存在实数 a, b 使(1)成立,则必存在 $m, n (n \in \mathbb{Z})$ 使得 $(n, na+b) = (m, 3m^2+15)$.

$$\text{即 } \begin{cases} n=m, \\ na+b=3m^2+15. \end{cases}$$

$$\therefore na+b-(3n^2+15)=0.$$

这一等式表示点 $P(a, b)$ 在直线

$l: nx+y-(3n^2+15)=0$ 上, 原点到直线 l 的距离

$$d = \frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}} = 6 \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2} + \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \right) \geq 12,$$

当且仅当 $\frac{\sqrt{n^2+1}}{2} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$, 即 $n^2=3$ 时, 等号成立, 而 $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore n^2 \neq 3. \therefore$ 等号不成立.

故 $d > 12$.

由于 P 在直线 l 上, 所以, P 到原点距离必满足 $\sqrt{a^2+b^2} \geq d > 12$, 但题给条件(2)则要求 $a^2+b^2 \leq 144$, 即:

$$\sqrt{a^2+b^2} \leq 12.$$

由此可见, 使(1)成立的 a, b 必不使(2)成立,

故不存在实数 a, b 使(1)、(2)同时成立.

评注:这是一道考查思维能力与逻辑推理能力的较为复杂的题目, 上述解法借助解几中点到直线的距离知识及重要不等式, 把问题恰当转化, 解法根本, 思路清晰.

本题还可以(1)、(2)同时成立, 运用上述求解思想, 以判别式法求解(请读者一试).

若注意 $(a, b) \in C$, 即 $a^2+b^2 \leq 144$, 引进参数求解, 方法更为简便. 另解如下:

$$\because a^2 + b^2 \leq 144,$$

\therefore 可设 $a = 12\rho\cos\theta, b = 12\rho\sin\theta (\rho \in [0, 1])$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$,
 则: $3x^2 + 15 = ax + b = 12\rho(\sin\theta + x\cos\theta)$

$$= 12\rho \sqrt{x^2 + 1} \sin(\theta + \varphi) \quad (\operatorname{tg}\varphi = x)$$

$$\leq 12 \sqrt{x^2 + 1}.$$

化简得 $x^4 - 6x^2 + 9 \leq 0$, 即 $(x^2 - 3)^2 \leq 0$.

$\therefore x = \pm\sqrt{3} \notin Z$, 与题设矛盾.

\therefore 不存在实数 a, b , 使(1)、(2)同时成立.

练习 1-1

1. 选择

(1) 满足条件 $\{0, 1\} \subset M \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 的不同集合 M 的个数是().

(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 8

(2) 已知 $A = \{(x, y) \mid 2^{x+y} = 8\}$, $B = \{(x, y) \mid \log_4(x-y) = \frac{1}{2}\}$, 则 $A \cap B =$ ().

(A) $\{(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})\}$ (B) $\{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\}$ (C) $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$

(D) 以上均不对

(3) 设全集 $I = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$, $A = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}$,
 $B = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$, 则 $\bar{A} \cap B =$ ().

(A) A (B) B (C) \emptyset (D) $\{(2, 3)\}$

2. 填空

(1) 设全集 $I = R$, 若不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 A , 不等式 $g(x) < 0$ 的解集为 R , 则不等式 $f(x)/g(x) > 0$ 的解集为 _____.

(2) 设 $I = \{2, 4, a^2 - a + 1\}$, $A = \{a + 1, 2\}$, $\bar{A} = \{7\}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $\{x | x = 2n, n \in N\} = A$; $\{x | x = 3n, n \in N\} = B$, $\{x | x = 4n - 2, n \in N\} = C$, 则 $(A \cup C) \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 解答

(1) 设全集 $I = \{(x, y) | x, y \in R\}$; 集合 $M = \{(x, y) | y \neq x + 1\}$, 集合 $N = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, 求 $\bar{M} \cap \bar{N}$.

(2) 设 $I = \{n | n < 10, n \in N\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \cap \bar{B} = \{1, 5, 7\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{9\}$, 求 A, B .

(3) 已知 $A = \{x | x^2 + (2+p)x + 1 = 0, x \in R\}$; 若 $A \cap R^+ = \emptyset$, 求实数 p 的范围.

(4) 设 $A = \{(x, y) | y^2 = x + 1\}$, $B = \{(x, y) | 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) | y = kx + b\}$, 是否存在自然数 k, b , 使 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$.

二、映射与函数

(一) 知识要点

1. 映射: 给定两个集合 A, B , 如果按照某种对应法则 f , 对于集合 A 中的任何一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射. 记作 $f: A \rightarrow B$.

映射是附加条件的对应, 条件是“出发集” A 中每一个元素在“到达集” B 中必有象, 且每一个元素的象唯一.

2. 函数: 如果在某变化过程中有两个变量 x, y , 对于 x 在某范围内的每一个确定的值, 按照某种对应法则, y 都有唯一确定的值和它对应, 那么 y 就是 x 的函数, 记 $y = f(x)$.

函数是特殊条件的映射,这种映射的“出发集”即定义域,“到达集”(或称象集)即函数的值域,值域中的每一个元素都有原象.

(二)释疑解难

1. 映射 $f:A \rightarrow B$ 中,① B 中可以有元素使 A 中不存在元素与之对应(否则称为满射);② A 中不同的元素可以对应 B 中同一元素(否则称为单映射).

2. 求函数的定义域,要先分析自变量的各个约束条件,再将其转化为解不等式(组).

3. 根据已知条件求函数解析式,要正确理解定义域的概念,尤其是端点;常用方法有定义法、待定系数法、参数(换元)法、特殊值法等.

4. 函数的值域,要由定义域和对应法则两要素确定,求函数值域常用的方法有:①用定义域及单调性,②配方法,③反函数法、判别式法,④数形结合求最值法等.

(三)典型范例解析

例 1 如图 1-2 所表示的对应,哪些是集合 A 到集合 B 的映射().

- (A) 仅①
- (B) ①和③
- (C) ②和③
- (D) ①和④

解:根据映射的定义②中集 A 元素 a_2 对应 B 中的元素不唯一,④中集 A 有元素 a_2 在 B 中没有元素与之对应,②、④均不是

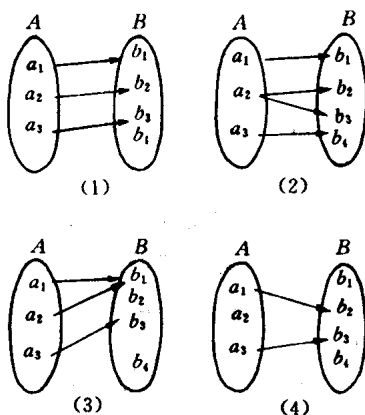


图 1-2

集合 A 到集合 B 的映射, 应选 (B) .

例 2 求函数 $f(x) = \sqrt{\log_a(x-5)}$ 的定义域.

分析: 开偶次方, 被开方数须不小于 0, 对数函数要求真数大于 0, 两者要同时满足.

解: $\because \log_a(x-5) \geq 0$,

① 当 $a > 1$ 时, $x-5 \geq 1 \Rightarrow x \geq 6$.

② 当 $0 < a < 1$ 时, $0 < x-5 \leq 1 \Rightarrow 5 < x \leq 6$.

\therefore 原函数的定义域当 $a > 1$ 时为 $[6, +\infty)$, 当 $0 < a < 1$ 时为 $(5, 6]$.

评注: 这里由于 a 值待定, 求解时必须根据对数函数的单调性, 分别讨论之.

例 3 求函数 $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{4-x}$ 的值域.

解: 函数的定义域为 $[-3, 4]$, 且 $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} \therefore y^2 &= 7 + 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \\ &\leq 7 + 2 \times \frac{1}{2} [(x+3) + (4-x)]. \end{aligned}$$

$\therefore y^2 \leq 14$, (当 $x+3=4-x$ 即 $x=\frac{1}{2}$ 时取等号).

$\therefore y_{\max} = \sqrt{14}$.

又 $\because \sqrt{(x+3)(4-x)} \geq 0$, $\therefore y^2 \geq 7$.

\therefore 函数的值域为 $[\sqrt{7}, \sqrt{14}]$.

评注: 解题中运用基本不等式确定 y^2 的最值, 注意 $3+x$ 与 $4-x$ 未知量同次且系数互为相反数, 从而保证相加后消去未知量.

原函数也可以通过转化为三角函数的形式求解, 另解

令 $t=x+3$, 则 $x=t-3$ ($x \in [-3, 4] \therefore t \in [0, 7]$).

$$y = \sqrt{t} + \sqrt{7-t} = \sqrt{7} \left(\sqrt{\frac{t}{7}} + \sqrt{1-\frac{t}{7}} \right) \quad \left(\frac{t}{7} \in [0, 1] \right).$$