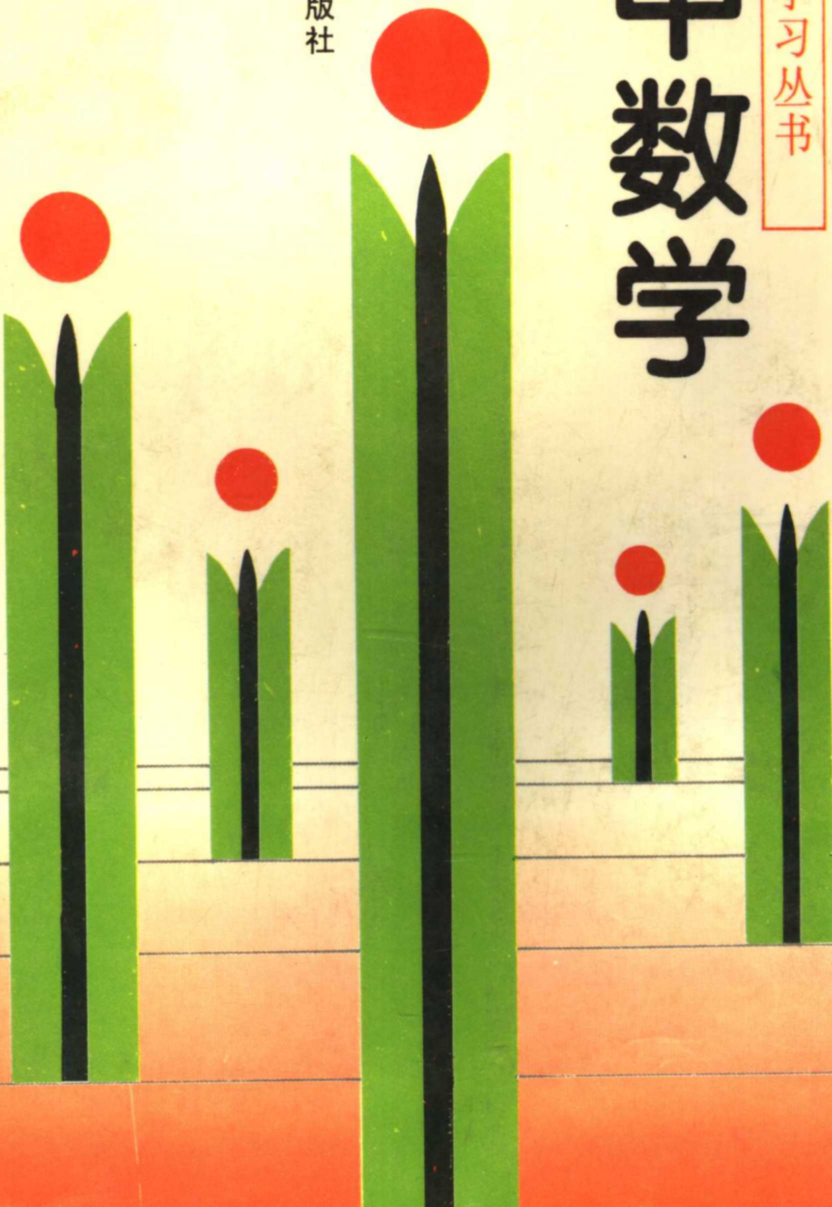
特级教师指导学习丛书

GAOZHONG SHUXUE

# 高中数学

王占聪 主编

安徽科学技术出版社



特级教师指导学习丛书

# 高　中　数　学

主　编　王占聪
编　著　王占聪　王家华　葛金虎
窦祖谋　管永宏

安徽科学技术出版社

(皖)新登字 02 号

责任编辑:汪卫生
责任校对:周　秋
封面设计:盛琴琴

特级教师指导学习丛书
高中数学
王占聪　主编
*
安徽科学技术出版社出版
(合肥市跃进路 1 号新闻出版大厦)
邮政编码:230063
新华书店经销　安徽省地方志印制中心印刷
*
开本:850×1168　1/32　印张:20.125　字数:500 千字
1997 年 8 月第 1 版　1997 年 8 月第 1 次印刷
印数:8 000
ISBN 7-5337-1521-7/O·30　定价:19.80 元
(本书如有倒装、缺页等问题向承印厂调换)

## 内容提要

本书是根据《高中数学教学大纲》和人民教育出版社出版的最新数学教材，针对高中生的特点，由特级教师和高级教师精心编撰的。各部分的内容，除指出知识要点和释疑解难外，还列举了大量典型范例并予以解析。每节后有练习，每章后有习题，书末提供了10套综合训练题，并附有练习、习题和综合训练题的解答提示和参考答案。

本书文字简洁明了，大量的练习、习题和综合题是作者精心编选的，提出的解题思路和方法也比较独特，特别适合高中生参考、自学。

# 编 者 的 话

特级教师是我国先进教学方法的代表人物，都曾取得过令人称羡的教学业绩。安徽科学技术出版社邀请北京、上海、安徽、福建等地的中学特级教师主编的《特级教师指导学习丛书》，较集中地展现了特级教师的教学成果，是一套适合广大高中学生阅读的高水平的课外读物。

本丛书以《中学教学大纲》和人民教育出版社出版的最新中学教材为编写依据。首批出版的有七个分册，它们是《高中语文》、《高中数学》、《高中英语》、《高中历史》、《高中政治》、《高中物理》和《高中化学》。

与同类书相比，本丛书有下述特点：一是内容精炼，文字简洁明了，以祈望尽可能少地占用高中生的宝贵时间。二是特别注重学生分析问题和解决问题能力的培养和训练。例如在《高中数学》中，各部分除以精当的文字指出知识要点和释疑解难外，还列举了许多典型范例并予以分析、解答和评注，尤其是“评注”的内容，有画龙点睛之效果。其他各分册也各有传神之笔。三是书末的综合训练题（或模拟试卷），是在对未来高考出题趋势预测的基础上，由作者精心拟出的，有较强的导向性。

出版者和编写者都有一个真诚的愿望，就是让读者花较少的时间和精力，而能从本丛书中获取较多的知识和启示，有效地提高高考的成绩。希望读者对本丛书提出意见，以便使之趋于完善。

安徽科学技术出版社

# 目　录

# 第一章　幂函数、指数函数和对数函数

函数是中学数学研究中最为重要的内容，函数的思想贯穿于整个中学数学内容的始末；集合与映射是讨论函数定义、性质的前提，集合论也是高等数学的重要分支.

本章的主要内容是讨论集合与映射，函数的定义域、值域、单调性、奇偶性以及幂函数、指数函数、对数函数的性质与应用.

在研究函数性质及应用时，要运用数形结合的思想和函数的观点，处理“式”、“方程”、“不等式”、“数列”、“曲线与方程”等问题.

指数方程与对数方程作为指、对数函数应用的一个重要方面，要求熟练掌握几种基本形式的方程解法.

## 一、集　合

### (一)知识要点

1. 集合是一个不定义概念，其具有“三性”，即：确定性、无序性和互异性.

2. 集合的表示方法通常用列举法或描述法.

3. 集合与集合之间的关系有相等、子集与真子集.

4. 集合之间的运算是交、并、补集.

### (二)释疑解难

本节要求对集合的关系有深刻的理解，并能熟练地进行集合之间的运算.

元素与集合的关系是从属关系，常用“$\in$”或$\notin$表示.

集合与集合的关系是包含关系，常用“$\subseteq$”、“$\nsubseteq$”或“$\subset$”、“$\not\subset$”表示，相等是集合与集合关系的特殊情形.

集合与集合之间的运算主要讨论交、并、补集，要正确理解交、并、补集的意义，正确区分“且”与“或”的本质差异.

### （三）典型范例解析

**例 1** 设 $P=\{x\mid x\leqslant\pi\}$，$a=3.14$，则下列关系正确的是（　　）.

(A)$a\subset P$　(B)$a\notin P$　(C)$\{a\}\in P$　(D)$\{a\}\subset P$

**解**：$\notin$ 和 $\in$ 表示元素与集合的关系，$\subset$ 表示集合与集合的关系，显然(A)与(C)不正确，又 $a=3.14<\pi$，$\therefore a\in P$，$\therefore$(B)也不正确，选(D).

评注：上述求解系采用排除法，事实上，运用集合关系的定义，可直观地看出(D)正确.

**例 2** 如果 $I=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，其中 $I$ 是全集，那么 $\overline{M}\cap\overline{N}=$（　　）.

(A)$\varnothing$　(B)$\{d\}$　(C)$\{a,c\}$　(D)$\{b,c\}$

**解法一**：$\overline{M}=\{b,e\}$，$\overline{N}=\{a,c\}$，$\therefore$ $\overline{M}\cap\overline{N}=\varnothing$.

**解法二**：$\because$ $\overline{M}\cap\overline{N}=\overline{M\cup N}$ 而 $M\cup N=\{a,b,c,d,e\}$，$\therefore$ $\overline{M\cup N}=\varnothing$. 选(A).

评注：在 $I$ 内讨论集合的运算，对于有限集，只要依据定义，不遗不漏即可，同时，也可以用“文氏图”解之.

**例 3** 如图 1-1，设 $S$，$T$ 是两个非空集合，且 $S\nsubseteq T$，$T\nsubseteq S$，令 $Z=S\cap T$，那么 $S\cup Z$ 等于（　　）.

(A)$Z$　(B)$T$　(C)$\varnothing$　(D)$S$

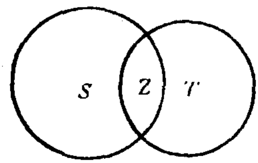



图 1-1

解：借助文氏图，容易作出判断，选(D). 实际上，

$\because$ $Z=S\cap T$，无论 $Z$ 是否为空集，都有 $Z\subset S$，$\therefore$ $Z\cup S=S$.

评注：本题特点是题意叙述抽象，旨在考查审题及理解能力；此题还可用特殊值法求解.

**例 4** 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2+6x-4=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2+6y-28=0\}$，$C=\{(x,y)\mid ax+by+c=0, a\cdot b\cdot c\neq 0\}$，且 $A\cap B\subset C$，求 $a:b:c$.

分析：集合 $A,B,C$ 所表示的图形分别为圆与直线，$A\cap B$ 表示两圆交点集合(相离则为 $\varnothing$)，$A\cap B\subset C$ 表示两圆交点在直线 $ax+by+c=0$ 上(或其为两圆的公共弦或公切线).

解：$A$ 所表示的图形为圆 $(x+3)^2+y^2=(\sqrt{13})^2$，$B$ 所表示的图形为圆 $x^2+(y+3)^2=(\sqrt{37})^2$，圆心距

$$d=\sqrt{(-3-0)^2+[0-(-3)]^2}<\sqrt{13}+\sqrt{37},$$

$\therefore$ 两圆相交，易知公共弦所在直线方程是 $6(x-y)+24=0$，

即 $x-y+4=0$.

又 $A\cap B\subset C$，

$\therefore$ 直线 $x-y+4=0$ 与直线 $ax+by+c=0$ 重合.

$\therefore$ $a:b:c=1:(-1):4$.

评注：此解法运用轨迹思想，解之简便灵活，一般方法可联立方程，解出 $A\cap B$，其元素属于 $C$，代入 $ax+by+c=0$ 中求解.

**例 5** 设 $a,b$ 是两个实数，

$$A=\{(x,y)\mid x=n, y=na+b, n\in Z\},$$
$$B=\{(x,y)\mid x=m, y=3m^2+15, m\in Z\},$$
$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$$

是平面内点的集合，讨论是否存在 $a$ 和 $b$ 使得 (1) $A\cap B\neq\varnothing$，(2) $(a,b)\in C$ 同时成立.

分析：集合 $A$ 表示直线 $y=ax+b$ 上横坐标为整数的点，集合 $B$ 表示抛物线 $y=3x^2+15$ 上横坐标为整数的所有点，集合 $C$ 表示圆 $x^2+y^2=12^2$ 上及其内部的所有点，可利用解几的方法求解.

解：若存在实数 $a,b$ 使(1)成立，则必存在 $m,n$ $(\in Z)$使得

$(n,na+b)=(m,3m^2+15)$.

即 $\begin{cases} n=m, \\ na+b=3m^2+15. \end{cases}$

$\therefore \quad na+b-(3n^2+15)=0.$

这一等式表示点 $P(a,b)$在直线

$l: nx+y-(3n^2+15)=0$ 上，原点到直线 $l$ 的距离

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=6\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}\right)\geqslant 12,$$

当且仅当$\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}}$，即 $n^2=3$ 时，等号成立，而 $n\in Z$.

$\therefore \quad n^2\neq 3$. $\therefore$ 等号不成立.

故 $d>12$.

由于 $P$ 在直线 $l$ 上，所以，$P$ 到原点距离必满足 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$，但题给条件(2)则要求 $a^2+b^2\leqslant 144$，即：

$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 12$.

由此可见，使(1)成立的 $a,b$ 必不使(2)成立，

故不存在实数 $a,b$ 使(1)、(2)同时成立.

评注：这是一道考查思维能力与逻辑推理能力的较为复杂的题目，上述解法借助解几中点到直线的距离知识及重要不等式，把问题恰当转化，解法根本，思路清晰.

本题还可以(1)、(2)同时成立，运用上述求解思想，以判别式法求解(请读者一试).

若注意$(a,b)\in C$，即 $a^2+b^2\leqslant 144$，引进参数求解，方法更为简便. 另解如下：

$\because \quad a^2+b^2\leqslant 144$,

$\therefore$ 可设 $a=12\rho\cos\theta, b=12\rho\sin\theta (\rho\in[0,1])$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，

则：

$$3x^2+15=ax+b=12\rho(\sin\theta+x\cos\theta)$$

$$=12\rho\sqrt{x^2+1}\sin(\theta+\varphi)\quad(\mathrm{tg}\varphi=x)$$

$$\leqslant 12\sqrt{x^2+1}.$$

化简得 $\quad x^4-6x^2+9\leqslant 0$，即 $(x^2-3)^2\leqslant 0$.

$\therefore \quad x=\pm\sqrt{3}\notin Z$，与题设矛盾.

$\therefore$ 不存在实数 $a,b$，使(1)、(2)同时成立.

## 练习 1-1

1. 选择

(1)满足条件 $\{0,1\}\subset M\subset\{0,1,2,3,4\}$ 的不同集合 $M$ 的个数是(　　).

(A)3 　(B)6 　(C)7 　(D)8

(2)已知 $A=\{(x,y)\mid 2^{x+y}=8\}$，$B=\{(x,y)\mid \log_4(x-y)=\frac{1}{2}\}$，则 $A\cap B=$(　　).

(A)$\{(\frac{5}{2},\frac{1}{2})\}$ 　(B)$\{\frac{5}{2},\frac{1}{2}\}$ 　(C)$\{\frac{1}{2},\frac{5}{2}\}$

(D)以上均不对

(3)设全集 $I=\{(x,y)\mid x\in R, y\in R\}$，$A=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1\}$，则 $\overline{A}\cap B=$(　　).

(A)$A$ 　(B)$B$ 　(C)$\varnothing$ 　(D)$\{(2,3)\}$

2. 填空

(1)设全集 $I=R$，若不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集为 $A$，不等式 $g(x)<0$ 的解集为 $R$，则不等式 $f(x)/g(x)>0$ 的解集为______.

(2)设 $I=\{2,4,a^2-a+1\}$，$A=\{a+1,2\}$，$\overline{A}=\{7\}$，则 $a=$______.

(3)设 $\{x\mid x=2n,n\in N\}=A$；$\{x\mid x=3n,n\in N\}=B$，$\{x\mid x=4n-2,n\in N\}=C$，则 $(A\cup C)\cap B=$______.

3. 解答

(1)设全集 $I=\{(x,y)\mid x、y\in R\}$；集合 $M=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，集合 $N=\{(x,y)\mid \dfrac{y-3}{x-2}=1\}$，求 $\overline{M}\cap\overline{N}$.

(2)设 $I=\{n\mid n<10,n\in N\}$，$A\cap B=\{3\}$，$A\cap\overline{B}=\{1,5,7\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{9\}$，求 $A$、$B$.

(3)已知 $A=\{x\mid x^2+(2+p)x+1=0,x\in R\}$；若 $A\cap R^+=\varnothing$，求实数 $p$ 的范围.

(4)设 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1\}$，$B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$，是否存在自然数 $k,b$，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

## 二、映射与函数

### (一)知识要点

1. 映射：给定两个集合 $A,B$，如果按照某种对应法则 $f$，对于集合 $A$ 中的任何一个元素，在集合 $B$ 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射. 记作 $f:A\to B$.

映射是附加条件的对应，条件是“出发集”$A$ 中每一个元素在“到达集”$B$ 中必有象，且每一个元素的象唯一.

2. 函数：如果在某变化过程中有两个变量 $x,y$，对于 $x$ 在某一范围内的每一个确定的值，按照某种对应法则，$y$ 都有唯一确定的值和它对应，那么 $y$ 就是 $x$ 的函数，记 $y=f(x)$.

函数是特殊条件的映射，这种映射的“出发集”即定义域，“到达集”（或称象集）即函数的值域，值域中的每一个元素都有原象.

### （二）释疑解难

1. 映射 $f:A\to B$ 中，①$B$ 中可以有元素使 $A$ 中不存在元素与之对应（否则称为满射）；②$A$ 中不同的元素可以对应 $B$ 中同一元素（否则称为单映射）.

2. 求函数的定义域，要先分析自变量的各个约束条件，再将其转化为解不等式（组）.

3. 根据已知条件求函数解析式，要正确理解定义域的概念，尤其是端点；常用方法有定义法、待定系数法、参数（换元）法、特殊值法等.

4. 函数的值域，要由定义域和对应法则两要素确定，求函数值域常用的方法有：①用定义域及单调性，②配方法，③反函数法、判别式法，④数形结合求最值法等.

### （三）典型范例解析

**例 1** 如图 1-2 所表示的对应，哪些是集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射（　　）.

（$A$）仅①

（$B$）①和③

（$C$）②和③

（$D$）①和④

**解**：根据映射的定义②中集 $A$ 元素 $a_2$ 对应 $B$ 中的元素不唯一，④中集 $A$ 有元素 $a_2$ 在 $B$ 中没有元素与之对应，②、④均不是

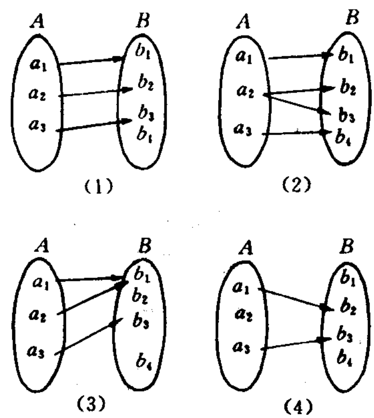



图 1-2

集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射，应选(B).

**例 2** 求函数 $f(x)=\sqrt{\log_a(x-5)}$ 的定义域.

分析：开偶次方，被开方数须不小于 0，对数函数要求真数大于 0，两者要同时满足.

解：$\because \log_a(x-5)\geqslant 0$，

①当 $a>1$ 时，$x-5\geqslant 1\Rightarrow x\geqslant 6$.

②当 $0<a<1$ 时，$0<x-5\leqslant 1\Rightarrow 5<x\leqslant 6$.

$\therefore$ 原函数的定义域当 $a>1$ 时为 $[6,+\infty)$，当 $0<a<1$ 时为 $(5,6]$.

评注：这里由于 $a$ 值待定，求解时必须根据对数函数的单调性，分别讨论之.

**例 3** 求函数 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{4-x}$ 的值域.

解：函数的定义域为 $[-3,4]$，且 $y\geqslant 0$，

$$\therefore \quad y^2=7+2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$\leqslant 7+2\times\frac{1}{2}[(x+3)+(4-x)].$$

$\therefore \quad y^2\leqslant 14$，(当 $x+3=4-x$ 即 $x=\frac{1}{2}$ 时取等号).

$\therefore \quad y_{\max}=\sqrt{14}$.

又 $\because \quad \sqrt{(x+3)(4-x)}\geqslant 0$，$\therefore \quad y^2\geqslant 7$.

$\therefore$ 函数的值域为 $[\sqrt{7},\sqrt{14}]$.

评注：解题中运用基本不等式确定 $y^2$ 的最值，注意 $3+x$ 与 $4-x$ 未知量同次且系数互为相反数，从而保证相加后消去未知量.

原函数也可以通过转化为三角函数的形式求解，另解

令 $t=x+3$，则 $x=t-3$ $(x\in[-3,4]\quad\therefore\quad t\in[0,7])$.

$$y=\sqrt{t}+\sqrt{7-t}=\sqrt{7}\left(\sqrt{\frac{t}{7}}+\sqrt{1-\frac{t}{7}}\right)\quad\left(\frac{t}{7}\in[0,1]\right).$$