幾何學講義

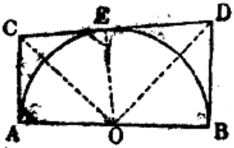
平面部

下册

上野清著
張廷華譯

商務印書館出版

918. 半圓之直徑爲AB。而AC, BD, CD爲三切線。則四角形ABDC$=\frac{1}{2}$AB×CD。



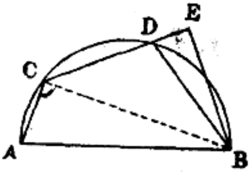
(證) E爲CD之切點,

則 三角形COD$=\frac{1}{2}$EO×CD。

但四角形ABDC=2三角形COD(例題789)

$=$EO×CD$=\frac{1}{2}$AB×CD。

919. 半圓之直徑爲AB。CD弦之垂線爲BE。則$AB^2=AC^2+CD^2+DB^2+2CD\times DE$。

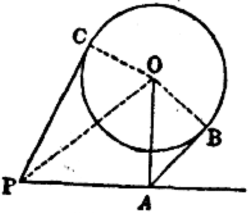


(證) $BC^2=CD^2+DB^2+2CD\times DE$。

$AB^2=AC^2+BC^2$

$=AC^2+CD^2+DB^2+2CD\times DE$,

920. OA⊥PA。PC, AB爲切線。則$PC^2=PA^2+AB^2$。

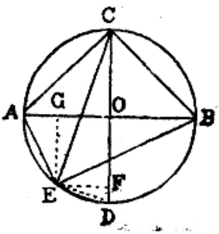


(證) $PC^2=PO^2-CO^2$

$=PA^2+AO^2-BO^2$

$=PA^2+AB^2$。

921. 交於直角之二直徑爲AB, CD。則內切四角形ACBE之面積。等於$\frac{1}{2}CE^2$。



(證) EF⊥CD。EG⊥AB。則

四角形ACBE$=\frac{1}{2}$AB×CO$+\frac{1}{2}$AB×EG

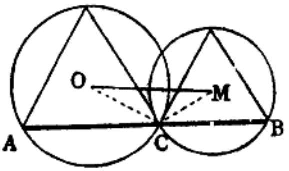
$=\frac{1}{2}$AB(CO+EG)

$=\frac{1}{2}$AB×CF

$=\frac{1}{2}CE^2$(例題832)。

922. 直線AB上之一點爲C。於AC, BC上作邊三角形。其外切圓之中心爲O,M。則

$$AB^2+AC^2+BC^2=6OM^2。$$



(證) 連結OC,CM。

則OCM角$=\frac{4}{3}$直角。

故於三角形OCM。

$OM^2=MC^2+OC^2+OC\times MC$(例題888)。

但由例題875。$\frac{1}{4}AC^2=\frac{3}{4}OC^2$。

卽　$AC^2=3OC^2$。

仿此。　$BC^2=3MC^2$。

故　$AC\times BC=3OC\times MC$。

故　$OM^2=\frac{1}{3}BC^2+\frac{1}{3}AC^2+\frac{1}{3}AC\times BC$。

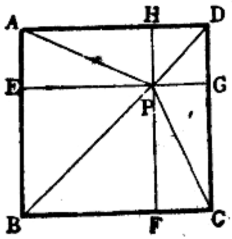
卽　$6OM^2=2BC^2+2AC^2+2AC\times BC$

$=BC^2+AC^2+(BC+AC)^2$

$=BC^2+AC^2+AB^2$、

923. 從正方形ABCD內之一點P。至各邊作垂線PE, PF, PG, PH。則$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$

$=2(PE^2+PF^2+PG^2+PH^2)$。



(證) $PA^2=PE^2+PH^2$。

$PB^2=PE^2+PF^2$。

$PC^2=PF^2+PG^2$。

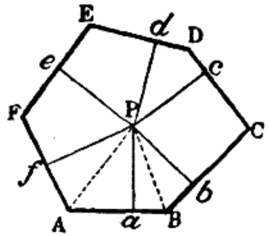
$PD^2=PG^2+PH^2$。

故如題言。

924. 從多角形ABCDEF內之一點P至各邊作垂線Pa, Pb, Pc, Pd, Pe, Pf。則

$$Aa^2+Bb^2+Cc^2+Dd^2+Ee^2+Ff^2$$
$$=aB^2+bC^2+cD^2+dE^2+eF+fA^2。$$

〔證〕 依例題823.



$Aa^2-aB^2=PA^2-PB^2$。

$Bb^2-bC^2=PB^2-PC^2$。

$Cc^2-cD^2=PC^2-PD^2$。

$Dd^2-dE^2=PD^2-PE^2$。

$Ec^2-eF^2=PE^2-PF^2$。

$Ef^2-fA^2=PF^2-PA^2$。

由是 $Aa^2+Bb^2+Cc^2+Dd^2+Ee^2+Ff^2$

$$-\ aB^2+bC^2+cD^2+dE^2+eF^2+fA^2)=0。$$

故如題言。

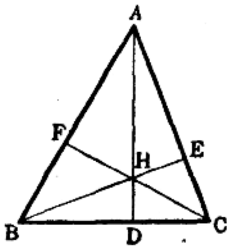
925. 三角形之垂線為AD, BE, CF。垂心為H。則

$$AB^2+BC+CA^2=2(AH\times AD+BH\times BE+CH\times CF)。$$

〔證〕 $AB^2=BH^2+AH^2+2AH\times HD$

$=BH^2+AH^2+2AH(AD-AH)$

$=BH^2-AH^2+2AH\times AD$。



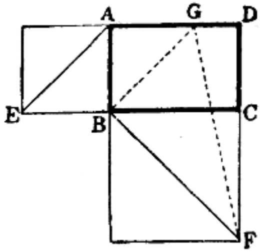
倣此 $BC^2=CH^2-BH^2+2BH\times BE$。

$CA^2=AH^2-CH^2+2CH\times CF$。

故$AB^2+BC^2+CA^2$

$$=2(AH\times AD+BH\times BE+CH\times CF)。$$

926. 凡矩形。必等於其二邊上正方形之兩對角線所成矩形之半。



〔證〕 矩形之二邊AB,BC上之正方形。爲AE,BF。而AE ∥ BG。則GBF角＝直角。

故三角形$GBF=\frac{1}{2}GB\times BF$

$=\frac{1}{2}AE\times BF$。

由例題812。　矩形AF＝2三角形$GBF+GD\times CF$。

即矩形ABCD＋正方形$BF=AE\times BF+(AD-AG)\times BC$。

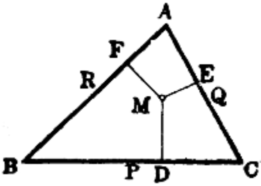
即　$AB\times BC+BC^2=AE\times BF+(BC-AB)\times BC$。

故　$2AB\times BC=AE\times BF$。

即　2矩形$ABCD=AE\times BF$。

927. 從三角形內之一點M。至各邊作垂線。MD, ME, MF。則

$BD^2+CE^2+AF^2=CD^2+AE^2+BF^2$。



〔證〕 與例題924同。

928. 同上。三邊之中點爲P, Q, R。則$PD\times BC$, $QE\times AC$, $FR\times AB$之內。其大者。等於他二量之和。

〔證〕 $PD\times BC=\frac{1}{2}(BD-CD)(BD+CD)=\frac{1}{2}(BD^2-CD^2)$。

$QE\times AC=\frac{1}{2}(CE^2-AE^2)$。

$RF\times AB=\frac{1}{2}(BF^2-AF^2)$。

由是$PD\times BC+QE\times AC-RF\times AB$

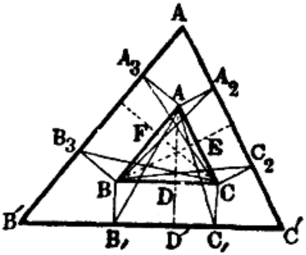
$=\frac{1}{2}(BD^2+CE^2+AF^2-CD^2-AE^2-BF^2)$。

由前例。$PD\times BC+QE\times AC-RF\times AB=0$。

929. 兩三角形 ABC, A′B′C′之三邊若平行。則從 A, B, C 至 A′B′C′之相應邊作垂線 CC_1, CC_2, AA_2, AA_3, BB_3, BB_1。則

$$AB_1^2+BC_2^2+CA_3^2=AC_1^2+BA_2^2+CB_3^2。$$

〔證〕 從 A,B,C 至三邊作垂線 AD, BE, CF。引長 AD 令遇 B′C′於 D′,則



$$AB_1^2-AC_1^2=B_1D'^2-C_1D'^2$$
$$=BD^2-CD^2。$$
$$BC_2^2-BA_2^2=CE^2-AE^2。$$
$$CA_3^2-CB_3^2=AF^2-BF^2。$$

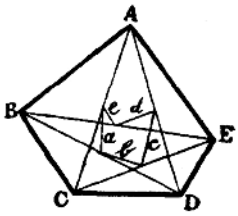
由是 $AB_1^2+BC_2^2+CA_3^2-(AC_1^2+BA_2^2+CB_3^2)$

$=BD^2+CE^2+AF^2-(CD^2+AE^2+BF^2)=0$(例題927.)。

930. 五角形之各兩對角線。其中點之連結線爲 a, b, c, d, e 則 $3(AB^2+BC^2+CD^2+DE^2+EA^2)$

$$=AC^2+BD^2+CE^2+AD^2+BE^2+4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)。$$

〔證〕 由例題891,



$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2+4a^2。$$
$$BC^2+CD^2+DE^2+BE^2=BD^2+CE^2+4b^2。$$
$$OD^2+DE^2+EA^2+AC^2=CE^2+AD^2+4c^2。$$
$$DE^2+EA^2+AB^2+BD^2=AD^2+BE^2+4d^2。$$
$$EA^2+AB^2+BC^2+CE^2=AC^2+BE^2+4e^2。$$

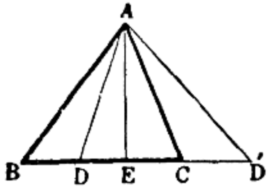
故相加卽得證

931．三角形底邊BC上之點爲D。$m.BD=n.CD$。則 $mAB^2+nAC^2=(m+n)DA^2+mBD^2+nCD^2$。

〔證〕由170定理。

$AB^2=DA^2+BD^2+2BD\times DE$，

$mAB^2=mDA^2+mBD^2+2mBD\times DE$。



仿此，

$nAC^2=nDA^2+nCD^2-2nCD\times DE$。

$=nDA^2+nCD^2-2mBD\times DE$。

故 $mAB^2+nAC^2=(m+n)DA^2+mBD^2+nCD^2$，

932．同上。$mAB^2+nAC^2=(m+n)DA^2+\frac{mn}{m+n}BC^2$。

〔證〕$mBD=nCD=n(BC-BD)$。

故 $BD=\frac{n}{m+n}BC$。

$CD=\frac{m}{m+n}BC$。

故依前例得證。

933．同上。BC引長線上之點爲D′。則

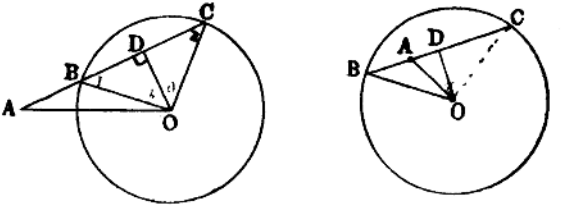
$$mAB^2-nAC^2=(m-n)DA^2+mBD^2-nCD^2$$。

第四節　圓之關係

定理十二

173．定理 圓之弦於一定點內分或外分。則其二截分之矩形。等於半徑上及其點與中心之連結線上兩正方形之差。

O為中心之圓之弦為BC。A為分點則AB,AC之矩形。等於OB,OA上正方形之差。



〔證明〕 $BC \perp OD$。故 $BD=CD$(116.逆定理)。

故AC為BD,AD之和。而AB為其差。

由是 $AB \times AC = BD^2 - AD^2$ 或 $AD^2 - BD^2$(166.定理)。

但 $OB^2 = BD^2 + DO^2$。

$OA^2 = AD^2 + DO^2$(168.定理)。

故 $OB^2 - OA^2 = BD^2 - AD^2$。

或 $OA^2 - OB^2 = AD^2 - BD^2$。

由是 $AB \times AC = OB^2 - OA^2$ 或 $OA^2 - OB^2$。

174. 推論一 通過一定點之任意之弦。其兩截分之矩形。常相等。

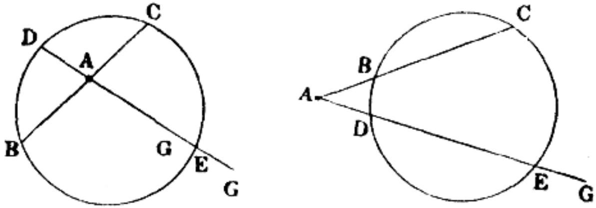
175. 推論二 通過圓內一點之弦。其兩截分之矩形。等於為其點二等分之弦之半之正方形。

176. 推論三 通過圓外一點之任意之割線。其兩截分之矩形。等於從其點所作切線之正方形。

定理十三

177. 定理 已知二直線。若令於一定點內分或外分。其各兩截分之矩形相等。則其二直線之各兩端。在於一圓周上。

通過一定點A之二直線為BC,DE。而AB, AC及AD, AE之矩形相等。則B, C, D, E在於一圓周上。



〔證明〕 通過B,C,D三點僅能畫一圓周(103.定理)。若E不在於此圓周上。則設圓周截AE或其引長線之點為G。

即 $AB \times AC = AD \times AG$(174.推論)。

但 $AB \times AC = AD \times AE$(假設)。

故　$AG = AE$。即G合於E。

178. 推論 通過圓外一點之弦。其二截分所成之矩形。若等於其點與圓周上一點之連結線上正方形。則其連結線。為圓之切線。

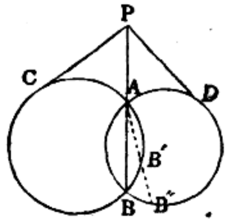
第四節之例題

934.　上圖。$AD^2 + AE^2 = AB^2 + AC^2$。則 $DE = BC$。

〔證〕 $2AD.AE = 2AB.AC$。以此等量加入 $AD^2 + AE^2 = AB^2 + AC^2$。

則 $(AD + AE)^2 = (AB + AC)^2$。即 $DE^2 = BC^2$。

935. 相交兩圓之公共弦爲AB。從其引長線上之一點P。作兩圓之切線PC,PD。必相等。



〔證〕 $PC^2=PA.PB$(176 推論)$=PD^2$。

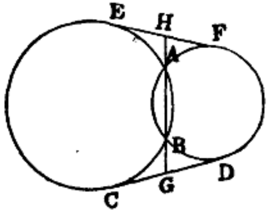
故　$PC=PD$。

936. 從一點P。至相交兩圓。各作切線PC, PD相等。則P在於公共弦AB之引長線上。

〔證〕 若從P通過一交點A而作直線。截二圓周於B'及B''。則以$PC^2=PA.PB'$, $PD^2=PA.PB''$。故$PB'=PB''$ 卽B'及B''相合。而爲兩圓之他一交點B。

937. 從一點至相交二圓作切線相等。則其一點之軌跡。爲公共弦之引長線。

938. 相交兩圓。其公共弦AB之引長線。必二等分公共切線CD於G。



〔證〕 $GC^2=GB.GA=GD^2$。

故如題言。

939. 相交兩圓之公共切線爲CD, EF。公共弦AB之引長線。截此二切線於G,H。則$GH^2=CD^2+AB^2$。

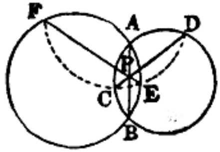
〔證〕 $GC=GA.GB$。

卽 $\left(\frac{1}{2}CD\right)^2=\frac{1}{2}(GH+AB)\times\frac{1}{2}(GH-AB)$。

卽 $\frac{1}{4}CD^2=\frac{1}{4}(GH^2-AB^2)$。

故　$GH^2=AB^2+CD^2$。

940. 相交兩圓。從其公共弦AB上之一點P。至兩圓所作兩弦CD, EF之四端。在於一圓周上。

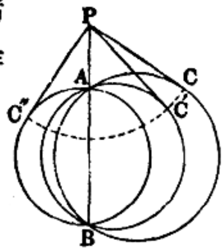


〔證〕 CP.PD＝AP.PB

＝PE.PF(177.定理)。

故如題言。

941. 於通過二定點A,B之諸圓。從AB之引長線上之一點P。作諸切線。必相等。



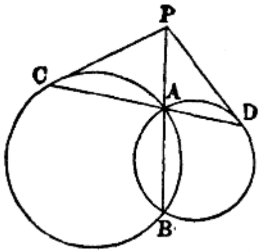
〔證〕 $PC^2＝PC'^2$

$＝PC''^2＝\cdots\cdots$

＝PA.PB(176.推論)。

942. 同上。從P作諸切線。其切點之軌跡。卽P爲中心之一圓周。

943. 於相交兩圓周間。通過交點A而作直線CD。若在CD之同方。其兩圓之弓形之角相等。則切於C及D之切線。必會於公共弦BA之引長線。



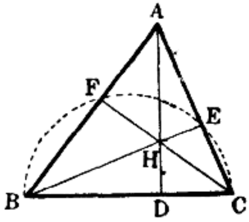
〔證〕 依題意。PCA角＝PDA角。

故 PC＝PD

故由例題936.於BA之引長線上而相會。

944. 三角形之垂線爲AD, BE, CF。垂心爲H。則

$$AH.DH = BH.EH = CH.FH.$$



(證) E, F爲直角。故B, C, E, F在於一圓周上。

故 BH.EH = CH.FH。

945. 三圓相交。則其公共三弦AB, CD, EF。會於一點。

(證) AB, CD之交點爲P。

則 PA.PB = PC.PD。

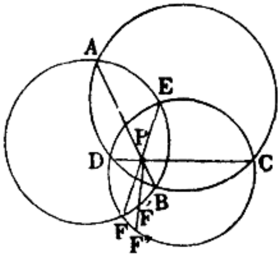
而EF必通過P。若不然。試引長EP而截圓周於F′及F″。

則以 PA.PB = PE.PF′。

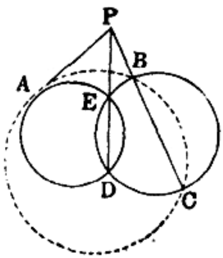
PC.PD = PE.PF″。

故 PE.PF′ = PE.PF″。

故 PE′ = PF″。即F′及F″合於F。



946. 相交兩圓。從其公共弦ED之引長線上一點P。作切線PA及割線PBC。則通過A, B, C之圓。切於PA。

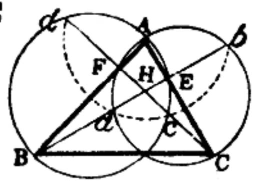


(證) $PA^2 = PE.PD$

$= PB.PC$。

故於ABC圓則PA爲切線。

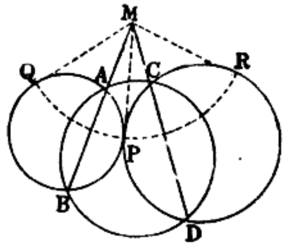
947. 三角形之二邊AB,AC爲直徑而畫兩圓。垂線BE, CF之引長線。若截兩圓周於a,b及c, d。則a, b, c, d。在於一圓周上。



〔證〕垂心爲H。

則BH.EH＝CH.FH(例題944.)＝cH.dH＝aH bH。

948. 於圓周上之四定點A, B, C, D之內。通過A, B及C, D之兩圓。若外切於P。則P之軌跡。爲一圓周。



〔證〕引長BA,DC。令相交於M。作切線MQ, MR,

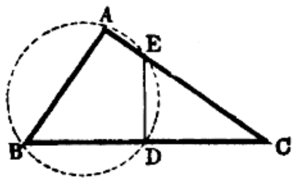
則MA.MB＝MC.MD

＝MQ²＝MR²。

故與例題936.同理。而MP切於此兩圓。

949. 直角三角形。從其斜邊BC之中點D。作垂線於BC。若截AC於E,則

$$CE.CA=\frac{1}{2}BC^2。$$

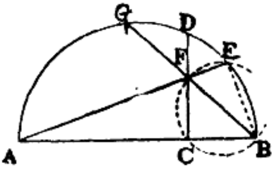


〔證〕A, D爲直角。則A, D, B, E在一圓周上,

故EC.CA＝CD.CB

＝$\frac{1}{2}$BC²。

•950. 從半圓周上之一點D。至直徑AB上。作垂線DC。而AE弦與CD之交點爲F。則AF·AE=AC·BA。



〔證〕 DCB角=FEB角=直角。

故 AF·AE=AC·AB。

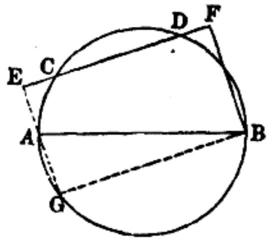
951. 半圓之直徑爲AB。AE、BG二弦之交點爲F。則$AF\cdot AE+BF\cdot BG=AB^2$。

〔證〕 依前例。AF·AE=AC·AB。BF·BG=BC·BA。

故 $AF\cdot AE+BF\cdot BG=AB(AC+BC)=AB^2$。

952. 從半圓之直徑AB之兩端至CD弦之引長線上。作垂線AE, BF。則

CE·DE=CF·DF=AE·BF。



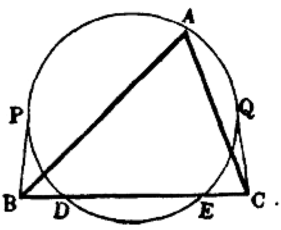
〔證〕 引長EA。截圓周於G。

則 EG=FB。

故 EC·ED=EA·EG

=EA·FB。

953. 三角形ABC。其底邊上之二點爲D, E。若BD=CE。則從B及C至ADE圓。作切線BP, CQ。必相等。



〔證〕 $BP^2=BD\cdot BE$。 $CQ^2=CE\cdot CD$。

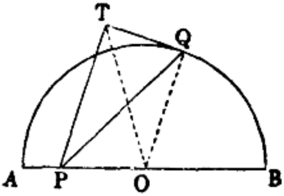
但 BD=CE。

故 BE=CD。

故 BP=CQ。

954 從半圓之直徑AB上一點P。至切於Q之切線QT。作垂線PT。則 $PT\cdot AB=AP\cdot BP+PQ^2$。

〔證〕 中心爲O。依例題897



$TO^2+PQ^2=TQ^2+PO^2+2PT\times OQ$,

即 $TQ^2+QO^2+PQ^2$

$=TQ^2+PO^2+2PT\times OQ$。

故 $PT\times AB=2PT\times OQ$

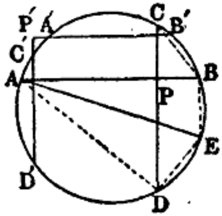
$=AO^2-PO^2+PQ^2$

$=(BO+PO)(AO-PO)+PQ^2$

$=BP\ AP+PQ^2$。

955. 交於直角之二弦爲APB,CPD。則

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4R^2。$$



〔證〕 BE∥CD, 則DE=BC。

故 AE=2R=直徑。

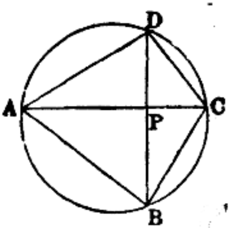
而 $AE^2=4R^2=AD^2+DE^2=PA^2+PD^2+BC^2$

$=PA^2+PD^2+PB^2+PC^2$。

956. 圓外之一點爲P′。交於直角之兩割線爲P′A′B′, P′C′D′。則 $P'A'^2+P'B'^2+P'C'^2+P'D'^2=4R^2$。

957. 內切四角形之兩對角線AC, BD。若交於直角。則

$$AD^2+BC^2=4R^2。$$

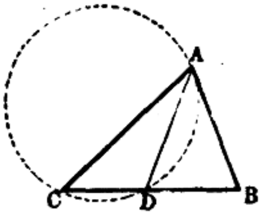


〔證〕 $AD^2+BC^2=PA^2+PD^2+PB^2+PC^2$

$=4R^2$(例題955)。

958. 於三角形ABC。作線AD。若BAD角=ACD角。則

$$BA^2=BC\cdot BD。$$

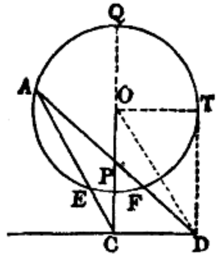


〔證〕 依137.定理。則BA切於ADC圓。

故 $AB^2=BD\cdot BC$。

959. 從圓之中心O。至直線CD上。作垂線OC。圓周上之一點爲A。若AC, AD截圓周於E,F。則

$$DF\cdot DA=CE\cdot CA+CD^2。$$



〔證〕 從D作切線DT。而CO及其引長線截圓周之點爲P,Q。則

$$DF\cdot DA=DT^2=OD^2-OT^2$$

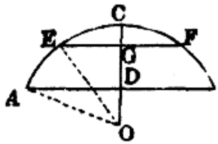
$$=OC^2+CD^2-R^2$$

$$=(OC+R)(OC-R)+CD^2$$

$$=CQ.CP+CD^2$$

$$=CE.CA+CD^2。$$

960. 於闊60尺之河。從水面架有弧線之橋。高18尺。求此弧線之半徑。 (答34尺)



〔解〕 $AB=60$。$CD=18$。$AO=CO=R$。

則 $AO^2=AD^2+DO^2$

即 $R^2=30^2+(R-18)^2$

故 $O=900-36R+324$。

故 $R=34$。

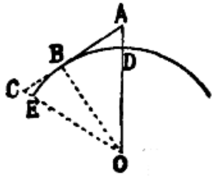
961. 若河水溢而高沒14尺。則橋之弦有幾許

(答32尺)

(解) DG＝14。故CG＝18－14＝4。$EG^2=EO^2-OG^2$。

卽 $\frac{1}{4}EF^2=R^2-(R-4)^2=34^2-30^2$。故 EF＝32。

962. 於高H哩之處。可望見海面。問其距離若何。但地球爲半徑R哩之球體。



(解) AD＝H。AO＝H＋R。BO＝R。

$AB^2=AO^2-BO^2=(H+R)^2-R^2$。

故 $AB=\sqrt{H(2R+H)}$。

963. 於高H呎之處。始見高h呎之船之檣尖從海面而來。問其距離若干。

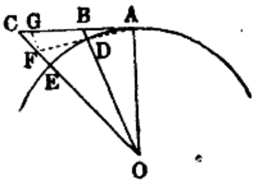
(解) CE＝h呎。AO＝H＋R，DO＝R哩＝5280R呎。

故由前例。$AC=AB+BC=\sqrt{H(10560R+H)}+\sqrt{h(10560R+h)}$。

964. 在海岸而視去船之帆。其離海岸愈遠。從而檣尖之沒亦愈速。

(證) AD，DE爲等距離。AOD角＝DOE角。引長AD。截OC於F。

BD ∥ FG。則FG＝2BD。



CGF角爲鈍角故大於GCF角。

故 GF＜CF。

卽 2BD＜CF＜CE。

而從A視BD。與CE爲等高。

故距離若爲2倍。則視高於BD之2倍者。與BD等。