普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

物理学学习辅导

封俊生 主编
封俊生 王 伟 周 岚 编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

(高职高专教育)

物理学学习辅导

封俊生 主编

封俊生 王 伟 周 岚 编

高等教育出版社

内容简介

本书是与教育部普通高等教育"十五"国家级规划教材——《物理学(第二版)》(李迺伯、李寿松主编)相配套的教学参考书。与教材中的各章相对应，分单元进行编写。每单元中有如下内容:(1) 教学要求;(2) 重点与难点;(3) 学习指导;(4) 单元小结;(5) 示范例题;(6) 自我检测题。另外，还编写了模拟试卷两套。教材中习题的解答，作为附录，放在最后。

本书适合高职高专院校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院工科各专业物理学课程的教材，也可供专业技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

物理学学习辅导/封俊生主编.—北京:高等教育出版社，2004.3

ISBN 7-04-014096-9

Ⅰ.物... Ⅱ.封... Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004876 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京星月印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2004 年 3 月第 1 版
印　　张	15.25	**印　　次**	2004 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	360 000	**定　　价**	17.90 元

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》（教高司[2000]19号），提出了“力争经过5年的努力，编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用2至3年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用2至3年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从2000年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》（草案）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（草案）编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、纸制教材与电子教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材（高职高专教育）适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002年11月30日

前　　言

本书是与普通高等教育“十五”国家级规划教材——《物理学(第二版)》(李迺伯主编、李寿松修订)相配套的教学用书。

本书是按照教育部最近颁布的《高职高专教育物理课程教学基本要求》,结合学生反映出来的带有普遍性的问题编写的,主要是为了帮助学生更好地掌握大学物理课程的基本内容。为方便任课教师和学生参考,本书与《物理学(第二版)》教材中的各章相对应,分单元进行编写。每单元有如下内容:(1) 教学要求;(2) 重点与难点;(3) 学习指导;(4) 单元小结;(5) 示范例题;(6) 自我检测题。另外,为方便教师和学生掌握教学内容的深浅尺度,编写了模拟试卷两份。教材中习题的解答作为附录,放在最后。

本书第一、二和第四单元由周岚编写,第五、六、七、十和十二单元由王伟编写,其余单元由封俊生编写并由封俊生统稿。

十分感谢扬州大学给予的大力支持以及扬州大学李寿松教授提出的许多宝贵建议和意见。

编者水平有限,错误、疏漏难免,敬请读者批评、指正。

编　者

2003 年 9 月

目　　录

第一单元　运 动 和 力

宇宙最突出的特征之一是运动;任何物体运动状态的变化都是它受力的结果.牛顿说:"哲学的全部责任在于——从运动的现象去研究自然界的力,然后从这些力去说明其他现象."可见,运动现象与力的关系如何,这不但是力学,而且,照牛顿的说法,也是哲学的最基本的问题.物质运动的最简单的形式,就是质点的机械运动.

这一单元讨论描述质点运动的数学方法和关于质点运动变化与受力关系的牛顿运动定律.

教 学 要 求

一、理解质点的概念.

二、理解选择参考系的重要意义,了解惯性参考系的概念.

三、掌握位置矢量、位移、速度和加速度等描述质点运动和运动变化的物理量,理解这些物理量的矢量性、瞬时性和相对性.

四、理解质点运动方程的意义.能根据运动方程,借助于直角坐标中的矢量代数运算和微分运算,计算质点平面运动的速度和加速度;能计算质点作圆周运动的切向加速度和法向加速度.

五、掌握牛顿运动定律的基本内容及其适用条件.能用隔离体法分析物体的受力情况和建立动力学方程.

重点和难点

这一单元的重点是从运动方程出发,计算质点平面运动的位移、速度和加速度.难点是位移和路程的区别和联系.

学 习 指 导

一、位移和路程

如图 1-1,在我们选定的参考系中,对固结于该参考系的坐标系 $Oxyz$,我们所描述的质点,在 t_1 时刻位于 A,在 t_2 时刻位于 B.质点在 $[t_1, t_2]$ 间的位移,也就是位置矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 间的增量,为

$$\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_2)-\boldsymbol{r}(t_1) \tag{1-1}$$

这仍然是矢量:

$$\Delta \boldsymbol{r}=\overrightarrow{AB} \tag{1-2}$$

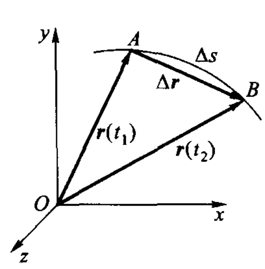

图 1-1

正因为是矢量的增量,若用矢量符号书写,不宜写成$\overrightarrow{\Delta r}$,而应写成$\Delta\vec{r}$.

质点在$[t_1,t_2]$间运动的路程为

$$\Delta s=\overset{\frown}{AB} \tag{1-3}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 和 Δs 是不同的,但又有联系:

(1) $\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$,是矢量,$\Delta s$ 是标量;

(2) $\Delta s\geqslant|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=AB$,恒大于零;

(3) 当 $\Delta t=t_2-t_1$ 趋近于零时,$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s=\mathrm{d}s$,有$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$.有鉴于此,也经常把$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 写成 $\mathrm{d}s$.显然,$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$.

还有一点要特别注意,因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 在 t 时刻附近微小的 $\mathrm{d}t$ 时间内的增量,即 $\boldsymbol{r}$ 的微分,这个矢量的大小$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$不可写成 $\mathrm{d}r$. r 是矢量 $\boldsymbol{r}$ 的大小,$\mathrm{d}r=\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,这当然与$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$不一样.

综上所述,$|\Delta\boldsymbol{r}|<\Delta s$,$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s\neq\mathrm{d}r$,$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}s$.

为简单起见,下面仅讨论质点平面运动的问题.对于平面问题,通常只需选 Oxy 为坐标.

二、质点运动的轨道

若质点在我们选定的参考系中作平面运动,其运动方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases} \tag{1-4}$$

消去时间变量 t,就得到

$$y=f(x) \tag{1-5}$$

这就是轨道方程.不难看出,运动方程(1-4)就是轨道的参数方程.

例如,若质点的运动方程为

$$\begin{cases}x=a\cos 2\pi t\\y=a\sin 2\pi t\end{cases}$$

消去 t,得

$$x^2+y^2=a^2$$

轨道为圆周.

三、位置、速度和加速度的关系

运动学的问题有两类:

1. 已知质点的位置(运动方程),求速度和加速度时,用微分关系.

若质点的运动方程为

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j} \tag{1-6}$$

则速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

即

$$\begin{cases}v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\[2ex]v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{cases} \tag{1-7a}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-8}$$

即

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \end{cases} \tag{1-8a}$$

2. 已知质点的加速度,求质点的速度和位置时,用积分关系.

若加速度仅是时间 t 的函数

$$\boldsymbol{a}=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j} \tag{1-9}$$

且已知 $t=0$ 时的初始条件 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$,则由微分关系,$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$,积分,$\int_0^v \mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t$,即得速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t \tag{1-10}$$

即

$$\begin{cases} v_x=v_{0x}+\displaystyle\int_0^t a_x\mathrm{d}t \\ v_y=v_{0y}+\displaystyle\int_0^t a_y\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1-10a}$$

同理可得位置为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_0^t \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t \tag{1-11}$$

即

$$\begin{cases} x=x_0+\displaystyle\int_0^t v_x\mathrm{d}t \\ y=y_0+\displaystyle\int_0^t v_y\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1-11a}$$

但在很多情况下,加速度 $\boldsymbol{a}$ 常常不仅是时间 t 的函数,还是位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 的函数.在这样的情况下,就不是简单的定积分方法能解决的,而必须解微分方程,甚至解微分方程组,这往往很繁杂也很困难.

四、直线运动

这里所说质点的"直线运动",当然是对我们选定的参考系而言的.由"直线运动"这个特点,可以对运动方程进行一些简化.

(1) 坐标选择.除非特殊情况,所选坐标轴的方向应沿质点的运动方向,这是最方便的.

(2) 省略注脚.若取 x 轴沿运动方向,则 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 的解析式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{v}=v_x(t)\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{a}=a_x(t)\boldsymbol{i} \end{cases} \tag{1-12}$$

因为就是一个方向，不加注脚也不会引起误解，所以通常将其省略．省略了注脚的 v 和 a，是矢量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影，而不是矢量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的大小 $|\boldsymbol{v}|$ 和 $|\boldsymbol{a}|$．

(3) 用"+"和"-"表示方向．因为就是一个方向，x、v 和 a 的正负就说明了 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的指向，式(1-12)可以改用标量式：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ v = v(t) \\ a = a(t) \end{cases} \tag{1-12a}$$

若 $x>0$，则 $\boldsymbol{r}$ 沿 Ox 轴正向，质点在原点的正侧；若 $v>0$，则 $\boldsymbol{v}$ 沿 Ox 轴正向．

直线运动的几个典型公式用定积分可以很方便地求得：

(1) 匀速运动，由 $x = x_0 + \int_0^t v\mathrm{d}t$，而 v = 常数，故

$$x = x_0 + vt \tag{1-13}$$

(2) 匀变速运动，由 $v = v_0 + \int_0^t a\mathrm{d}t$，而 a = 常量，故

$$v = v_0 + at \tag{1-14}$$

由 $x = x_0 + \int_0^t v\mathrm{d}t$，而 $v = v_0 + at$，积分得

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1-15}$$

由 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，$v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x$，积分

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{1-16}$$

曲线运动可以看成沿坐标轴方向的直线运动的叠加．因此，直线运动是讨论曲线运动的基础，直线运动的问题弄清楚，曲线运动的问题也就好办了．当然，曲线运动在各坐标轴上的分量式中，注脚是不能省略的．

五、圆周运动

质点对某参考系作圆周运动，除非特殊情况，坐标原点应选在圆心．这样选择不但使 $|\boldsymbol{r}| = r$ = 常量，数学表达上还会有许多方便之处．

对圆周运动，将加速度在法向和切向分解，经常会给解决问题带来很大方便．质点运动轨道曲线的切向，沿速度方向；法向与切向垂直，指向曲线的凹侧，对圆周而言，法向指向圆心．切向加速度和法向加速度分别为

$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r} \end{cases} \tag{1-17}$$

加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\mathrm{n}^2} \tag{1-18}$$

这与由

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \tag{1-19}$$

计算得到的数值是一致的.

一般曲线可以看成是由一段一段的微小的圆弧接续而成的,因此质点的加速度也可在切向和法向分解:

$$\begin{cases} a_t=\dfrac{dv}{dt} \\ a_n=\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \tag{1-20}$$

式中 ρ 为曲率半径.

六、牛顿定律

1. 牛顿第一定律

(1) 第一定律定义了惯性参考系.牛顿在他的《自然哲学的数学原理》一书中,说明他的运动第一定律时,用普遍形式叙述为:"每一个物体都保持它的静止状态,或沿一直线的匀速运动状态,除非他受到作用力而被迫改变那种状态."正如我们一再强调的,说到物体的运动状态,就一定包括一个参考系,是物体相对于这个参考系的运动状态.因此,第一定律不仅仅是关于物体运动行为的陈述,还包含更多的内容.把它倒过来说,大致是:存在某些参考系,相对于它们,物体如果不受外力的影响,将保持静止或沿一直线作匀速运动.我们把这样的参考系称为"惯性参考系".于是,一个参考系是否是惯性参考系就可以靠观测和实验来决定.

如果 S 是惯性系,参考系 S′相对于 S 作匀速直线运动,$\boldsymbol{v}_{S'\to S}$为常数,若物体 P 不受外力作用,相对于 S 匀速直线运动状态不变,即$\boldsymbol{v}_{P\to S}$为常数,则物体 P 相对于 S′也是作匀速直线运动,S′也是惯性系.因此,相对于惯性系作匀速直线运动的参考系都是惯性系.所有惯性系都是等价的.天文观察说明,太阳是惯性系;地球相对于太阳是有加速度的,就不应是惯性系,但我们在地球上做实验又说明地球是惯性系,这只能说地球相对于太阳加速度很小,地球近似为惯性系,而且误差小到我们难以觉察.

(2) 第一定律指出了物体有保持运动状态不变的惯性,力是改变物体运动状态的原因.

2. 牛顿第二定律

第二定律的数学表达为

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=m\boldsymbol{a} \tag{1-21}$$

确定了物体所受的合力 $\boldsymbol{F}$ 与其动量 $\boldsymbol{p}$ 之间的微分关系,也确定了合力 $\boldsymbol{F}$ 与其质量 m 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 之间的关系.需要注意的几点是:

(1) 第二定律仅仅在惯性参考系中才成立;

(2) 第二定律只对质点适用;

(3) 式(1-21)是瞬时关系;

(4) 式(1-21)是矢量式,具体运用时,常要投影到坐标轴上,用其分量式.

3. 牛顿第三定律

第三定律指出了物体间的作用力是相互的.因此,自然界不存在绝对不受其他物体作用的孤

立物体.从这个意义上来讲,第一定律实际上是不可由实验直接验证的.

4. 运用牛顿定律解题的步骤

(1) 取隔离体.把我们要研究的对象选择出来,各个隔离体都应可以抽象为质点.

(2) 受力分析.作每一个隔离体的受力图.

(3) 选择参考系并在参考系上建立坐标系.一般,所选的参考系应是惯性系,通常用直角坐标系,但对圆周运动的问题,用极坐标更方便.

(4) 列方程,解方程.主要是根据牛顿第二定律列方程,此外还有诸如几何关系等方面的方程.解方程之前,不但要检查方程是否正确,还要看方程数目与未知数是否相符.

(5) 必要时,加以讨论和说明.

单元小结

一、位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和运动方程:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

即

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

二、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和路程 Δs:

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

$$|\Delta\boldsymbol{r}|\leqslant\Delta s,\quad \text{但}\,|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

三、位置 $\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$ 的微分关系:

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},\quad v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}|$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

平面问题中,

$$\begin{cases}v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{cases},\quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2},\quad \tan\alpha_v=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\begin{cases}a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\end{cases},\quad a=\sqrt{a_x^2+a_y^2},\quad \tan\alpha_a=\frac{a_y}{a_x}$$

四、直线运动

$$\begin{cases} x = x(t) \\ v = v(t) = \dfrac{dx}{dt} \\ a = a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 x}{dt^2} \end{cases}$$

$$v = v_0 + \int_0^t a\,dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v\,dt$$

五、圆周运动

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{r} \end{cases}, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

六、牛顿定律

惯性定律在其中成立的参考系称为惯性系.

牛顿第二定律仅在惯性系中成立,且仅适用于质点.其在直角坐标系中的解析式为

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$$

在自然坐标系中,

$$\begin{cases} F_t = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

示 范 例 题

例 1. 一质点相对于某参考系的运动方程为

$$\boldsymbol{r} = R\cos 10\pi t\boldsymbol{i} + R\sin 10\pi t\boldsymbol{j}$$

式中 R 为常数;长度单位为 m,时间单位为 s.试求:(1) 速度和加速度;(2) 轨道的代数方程;(3) 在 0 到 0.1 s 间的位移和路程.

分析:这是已知运动方程求有关运动的其他物理量的问题,只要代入公式运算就可以了.至于物理量的表达,是矢量的,用矢量式表达或用矢量的大小和方向表达都可以,但后者比较麻烦,若题目没有提出明确要求,就没有必要用大小和方向表达.

解:(1) 质点的速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -10\pi R\sin 10\pi t\boldsymbol{i} + 10\pi R\cos 10\pi t\boldsymbol{j}$$

单位为 $m\cdot s^{-1}$.加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-(10\pi)^2R\cos 10\pi t\boldsymbol{i}-(10\pi)^2R\sin 10\pi t\boldsymbol{j}$$
$$=-100\pi^2R\cos 10\pi t\boldsymbol{i}-100\pi^2R\sin 10\pi t\boldsymbol{j}$$

单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

(2) 由

$$\begin{cases}x=R\cos 10\pi t\\ y=R\sin 10\pi t\end{cases}$$

消去 t,得

$$x^2+y^2=R^2$$

轨道为以原点(0,0)为圆心,半径为 R 的圆周.

(3) 在 0 到 0.1 s 间的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(0.1)-\boldsymbol{r}(0)=-R\boldsymbol{i}-R\boldsymbol{i}=-2R\boldsymbol{i}\quad(\mathrm{m})$$

该质点的速度为 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(10\pi R\cos 10\pi t)^2+(10\pi R\sin 10\pi t)^2}=10\pi R$,作匀速圆周运动.因此

$$\Delta s=v\Delta t=10\pi R\times 0.1=\pi R\quad(\mathrm{m})$$

讨论:质点作匀速圆周运动.而

$$\boldsymbol{a}=-(10\pi)^2R\cos 10\pi t\boldsymbol{i}-(10\pi)^2R\sin 10\pi t\boldsymbol{j}=-(10\pi)^2\boldsymbol{r}$$

方向与 $\boldsymbol{r}$ 相反,指向原点,即沿法向,故切向加速度为零,这与 $a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,因 v 等于常量,所以切向加速度为零的计算结果是一致的. $\boldsymbol{a}$ 的大小也可由 $a_n=\frac{v^2}{r}$计算得到.

例 2. 一质点的运动方程为

$$x=-2t+3t^3$$
$$y=4t-5t^4$$

式中 x 和y 的单位为 m,t 的单位为 s.试求:(1) 初速度的大小和方向;(2) $t=2$ s时的加速度的大小和方向.

分析:这是已知运动方程求特定时刻的速度和加速度的问题.通常应先求速度和加速度的一般表达式,再代入数据求得结果.平面运动的情况,通常用矢量与 x 轴的夹角表示方向.由于反三角函数的多值性,所求角度到底在那个象限,必须认真判别.

解:(1) 速度分量为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2+9t^2$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4-20t^3$$

$t=0$ 时,

$$v_x=-2$$
$$v_y=4$$

速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(-2)^2+4^2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}=4.47\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

速度与 Ox 轴的夹角为

$$\alpha_v=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\frac{4}{-2}=\arctan(-2)$$

因为 $\cos\alpha_v=\dfrac{v_x}{v}=\dfrac{-2}{4.47}<0$,所以 $\alpha_v=\arctan(-2)=117.6^\circ$,在第二象限.

(2) 加速度分量为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=18t$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-60t^2$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(18t)^2+(-60t^2)^2}$$

加速度与 Ox 轴的夹角为

$$\alpha_a=\arctan\frac{a_y}{a_x}=\arctan\frac{-60t^2}{18t}=\arctan\frac{-10t}{3}$$

$t=2$ 时,

$$a=\sqrt{(18t)^2+(-60t^2)^2}=\sqrt{(18\times2)^2+(-60\times2^2)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=242.7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\alpha_a=\arctan\frac{-10t}{3}=\arctan\frac{-10\times2}{3}=\arctan\left(\frac{-20}{3}\right)$$

因为 $\cos\alpha_a=\dfrac{a_x}{a}=\dfrac{18\times2}{242.7}>0$,所以 $\alpha_a=\arctan\left(\dfrac{-20}{3}\right)=-81.47^\circ$,在第四象限.

例 3. 已知一质点在半径为 R 的圆周上运动.若我们以圆周上的一点为起点,用逆时针走向的弧长 s 表示其在圆周上的位置,则该质点的位置随时间变化的关系为 $s=mt-\dfrac{1}{2}nt^2$,(m、n 均为正的恒量)试求:

(1) t 时刻质点的切向加速度和法向加速度;

(2) t 为何值时,加速度的大小等于 n?

(3) 加速度为 n 时,质点在圆周上运行了几周?

分析:这是已知圆周运动的运动方程求任一时刻加速度问题.应先求速度,再求切向加速度、法向加速度.在用弧长表示质点位置的情况下,$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$应理解为包含方向的速度,若 $v>0$,则质点沿规定的正走向旋转,反之,沿规定的负走向旋转.与此相仿,切向加速度 $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$的符号,亦表明了它是沿正切向还是负切向.

解:(1) 质点的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mt-\frac{1}{2}nt^2\right)=m-nt$$

若 $v>0$,则质点沿逆时针旋转.

质点运动的法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(m-nt)^2}{R}$$

切向加速度为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m-nt)=-n$$

显然,切向加速度沿顺时针切向.

(2) 质点加速度的大小等于 n 时,$a_n=0$,因此

$$m-nt=0$$

$$t=\frac{m}{n}$$

(3) 在 $t=\frac{m}{n}$ 且加速度的大小为 n 之前,$v>0$,转向没有发生过变化,因此,质点转过的转数为

$$N=\frac{s(t)-s(0)}{2\pi R}=\frac{mt-\frac{1}{2}nt^2}{2\pi R}=\frac{m\left(\frac{m}{n}\right)-\frac{1}{2}n\left(\frac{m}{n}\right)^2}{2\pi R}=\frac{m^2}{4\pi Rn}\quad(\mathrm{r})$$

* **例 4**[①]. 一质点沿 Ox 轴运动,加速度为 $a=-8\cos 2t\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$;$t=0$ 时,质点的速度 $v_0=0$,位于 $x_0=2$ m 处.求任意时刻质点的速度和位置.

分析:这是已知加速度求速度和位置的直线运动问题.加速度仅仅是时间的函数,直接用定积分就可以了.

解:质点的速度为

$$v=v_0+\int_0^t a\,\mathrm{d}t=0+\int_0^t -8\cos 2t\,\mathrm{d}t=-4\sin 2t\Big|_0^t=-4\sin 2t\quad(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

质点的位置为

$$x=x_0+\int_0^t v\,\mathrm{d}t=2+\int_0^t -4\sin 2t\,\mathrm{d}t=2+2\cos 2t\Big|_0^t=2\cos 2t\quad(\mathrm{m})$$

例 5. 如图 1-2 所示,圆锥摆的摆长为 l,小球质量为 m,张角不变,为 θ.试求小球的速度和摆线所受的张力.小球运动的周期是多大?

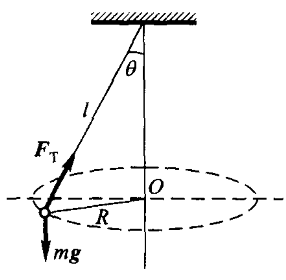

图 1-2

分析:"小"球者,是球的大小比其运动轨道的尺度小得多,可以抽象为质点.由"张角不变"可知,小球在水平面内作匀速率圆周运动.

解:小球受力如图.由牛顿第二定律,对小球,在法向有

$$F_T\sin\theta=m\frac{v^2}{R}$$

式中

$$R=l\sin\theta$$

在竖直方向有

① 打"*"的题,超出了《基本要求》,供有兴趣的同学参考.

$$F_T\cos\theta = mg$$

小球运动周期为

$$T=\frac{2\pi R}{v}$$

解得

$$F_T=\frac{mg}{\cos\theta}$$

$$v=\sqrt{\frac{gl\sin^2\theta}{\cos\theta}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

绳中的张力 $\boldsymbol{F}'_T$与 $\boldsymbol{F}_T$大小相等方向相反,故

$$F'_T=\frac{mg}{\cos\theta}$$

* **例 6.** 质量为 m 的子弹以速率为v_0射入沙土中,子弹所受的阻力与速度方向相反,其大小与 mv^2成正比,比例系数为 $k(k>0)$,设子弹在沙土中保持原方向运动.求子弹在射入沙土后,速率随时间变化的函数式.

分析:这是质点受力与速度有关因而加速度亦与速度有关的问题,需解微分方程才可求得速度.

解:取 Ox 轴沿子弹前进方向.子弹受合力为

$$F=-kmv^2$$

由牛顿第二定律 $F=ma$,得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kmv^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\,\mathrm{d}t$$

两边分别积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\int_0^t\mathrm{d}t$$

得

$$-\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}\right)=-kt$$

$$v=\frac{v_0}{1+kv_0t}$$

自我检测题

1－1　在什么情况下物体可以抽象为质点?你用手关一扇门,此门是否可以看成质点?开