解析命题规律　轻松应对高考

数学

——历年高考试题精选解析

“高考内容、形式与能力考查”课题组

高考试题围绕每科有限的**核心知识点**命制，

每个核心知识点都有与之对应的**经典试题**，

最终试卷的题目都是**经典试题的变形**，

考生掌握了规律就能举一反三，**轻松应考**。

中国人民大学出版社

数学——历年高考试题精选解析

“高考内容、形式与能力考查”课题组

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学：历年高考试题精选解析
“高考内容、形式与能力考查”课题组．5版
北京：中国人民大学出版社，2006
ISBN 7-300-04573-1

Ⅰ．数…
Ⅱ．高…
Ⅲ．数学课-高中-解题-升学参考资料
Ⅳ．G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 068796 号

数学——历年高考试题精选解析
“高考内容、形式与能力考查”课题组

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010—62511242（总编室）		010—62511398（质管部）
	010—82501766（邮购部）		010—62514148（门市部）
	010—62515195（发行公司）		010—62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.1kao.net（中国 1 考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北三河汇鑫印务有限公司		
规　　格	210mm×285mm　16 开本	**版　　次**	2003 年 3 月第 1 版 2006 年 10 月第 5 版
印　　张	14.25	**印　　次**	2006 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	560 000	**定　　价**	21.00 元

总 序

教育部考试中心副主任 [signature]

1977 年恢复了全国普通高等学校招生考试制度，第二年又决定采取全国高考的统一命题考试，实行从高中毕业生和具有高中同等学力的考生中，以全面考核、择优录取的原则招收大学新生，到现在已经有 29 年了。

29 年来高考内容随着中学教学的改革也在不断改革，大体可分为四个阶段。第一阶段是 1978 年至 1985 年，属于恢复统一考试的命题探索阶段。这个阶段的主要问题是命题的主观性、随意性明显，在试题中的反映是考查知识较多，考查能力较少，试题难易度把握不定，今年这科难了，明年那科又容易了，题型以主观性试题为主。第二阶段是 1986 年至 1992 年。随着国家的改革开放以及国外教育测量学理论的引进，国内教育界要求考试客观公正的呼声日趋增高，于是在高考中大规模引进了国外的教育测量学理论和标准化的题型——选择题。第三阶段是 1993 年至 1998 年。根据社会的发展及对人才的需求，注重能力考查的考试思想得到重视，于是在各科的《考试说明》中，都提出了各学科对能力的要求，在高考试题中，也特别注意在考查知识的同时注重对学科能力的考查。第四阶段是 1999 年至今。这一阶段的特点是，随着高考“3＋X”科目组的实行，到 2003 年，全国各省、自治区、直辖市都采用了综合能力测试。于是如何处理好中学单科教学与高考综合科考试的矛盾，如何体现“3＋X”科目组的多样性与选择性，如何处理好统一考试与考生个体差异的矛盾，如何看待考试特别是统一考试的局限性等，都是我们教育测量学界应该着重研究的问题。当然在恢复统一考试的 29 年中，考试的改革与发展是在不断的否定之否定中前进的。

29 年来，教育部考试中心组织了全国数以千计的大学教师和中学教师从事高考命题工作。这些教师勤勤恳恳、兢兢业业地工作，可以说每一道题目都是他们创造性工作的结晶。29 年来他们命制了数以万计的试题，这些试题对学生把握学科的科学方向、启迪思路、开拓眼界都有借鉴作用，有些试题在命题技巧和思路方面令人拍案叫绝。

为了向广大考生、教师、科研人员以及社会各界揭示我国恢复高考统一命题考试 29 年来的命题思想及演变过程，为了配合高考内容与形式改革研究，对“3＋X”科目设置改革以来试题的设计成果作一次认真的总结、研究，促进我国考试制度的科学化、现代化，“高考内容、形式与能力考查”课题研究组特编写了这套书。

这套书有如下特点：

1. 由课题组专家对 2000 年以来命制的数千道试题进行筛选，选择对高等学校选拔新生、对中学教学有指导意义的精品，配以分析文字，力求使读者能够理解当时命题者的意图。

2. 力求选择对开拓学生思路有意义的试题，在分析与解题中注意培养学生科学的思维方法。在保留试题原貌的前提下，对个别试题在科学性上不够合理的地方，作了一些分析。

在编撰过程中，课题组得到了全国各地许多专家、命题教师以及有关人士的积极支持和热情建议，不仅使本书编写得更加严谨，而且增加了科学性、启迪性和针对性。在这里，我希望这套书能切实指导中学教学和考试实践，并为我国的考试研究贡献绵薄之力。

高考命题规律与考生复习策略

（代前言）

专家认为，高考命题是紧紧围绕各科有限的核心知识点命制的，每个核心知识点都有若干经典试题与之对应，每年试卷虽不相同，但仔细品来，最终试卷的题目均为经典试题的变形。

基于以上命题规律并结合学科特点，考生就可以在掌握核心知识点上下工夫，吃透经典试题，掌握试题变形规律，举一反三，摒弃题海战术，轻松获取高分。

为方便同学们复习使用，本套书核心知识点仍以《考试大纲》为基本框架。

经典试题，即本套书中的“例子”，是学科专家从 2000—2006 年全国及自主命题省（市）的数千道高考试题中精选出来的。建议同学们围绕核心知识点，细细品味经典试题的思路引导和解释，弄懂经典试题的经典之道，学会分析试题，掌握解题“诀窍”，成为解题高手。

在经典试题基础上，学科专家又选择了若干经典题的变形题，我们称之为“同类试题”。希望同学们“悟”到其变形的“妙处”，感知专家命题的“苦心”，这样就能“轻松应变”，成为高手中的高手。

参加本套书编写的专家有：

数学：明知白、李有毅、毛金海、曹德良、李清安、樊建先、蔡春晖、郑栓平、王晓芸、李振雷、屈卫国

语文：梁捷、孙斌华、田星、张杨管、何胜斌

英语：何国贵、刘景军、张先森

物理：洪安生

化学：冬镜寰、余兰、高萍、金从武、曾晖

生物：夏献平、王月玲、张晋英、徐应春

历史：李晓风

地理：田佩淮

政治：杨献民

编　者

目录

第一章 集合、简易逻辑

§1—1 集合

例 1

【试题】(全国卷二,05—理9,文10)

已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x-28\leqslant 0\}$, $N=\{x\mid x^2-x-6>0\}$,则 $M\cap N$ 为( ).

A. $\{x\mid -4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$

B. $\{x\mid -4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$

C. $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$

D. $\{x\mid x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

【解析】 ∵ $M=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 7\}$,

$N=\{x\mid x<-2$ 或 $x>3\}$,

∴$M\cap N=\{x\mid -4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$,

因此选 A.

考点知识归纳与理解

本题先求解两个二次不等式(注意区间端点的开与闭),再求两集合的交集(可利用数轴求两解集的公共部分).

同类试题

【试题 1】(天津卷,05—理1)

设集合 $A=\{x\mid |4x-1|\geqslant 9,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid \frac{x}{x+3}\geqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$,则 $A\cap B$ 等于( ).

A. $(-3,-2)$

B. $(-3,-2]\cup[0,\frac{5}{2}]$

C. $(-\infty,-3]\cup[\frac{5}{2},+\infty]$

D. $(-\infty,-3)\cup[\frac{5}{2},+\infty)$

【试题 2】(浙江卷,05—理9)

设 $f(n)=2n+1\ (n\in\mathbf{N})$,$P=\{1,2,3,4,5\}$,$Q=\{3,4,5,6,7\}$.记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$,$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$,则 $(\hat{P}\cap \complement_N\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_N\hat{P})$ 等于( ).

A. $\{0,3\}$ B. $\{1,2\}$

C. $\{3,4,5\}$ D. $\{1,2,6,7\}$

【试题 3】(辽宁卷,06—1)

设集合 $A=\{1,2\}$,则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是( ).

A. 1 B. 3 C. 4 D. 8

【试题 4】(山东卷,06—理1)

定义集合运算:$A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$.设集合 $A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为( ).

A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

【提示与答案】

1. ∵ $|4x-1|\geqslant 9\Leftrightarrow x\geqslant\frac{5}{2}$ 或 $x\leqslant -2$,

$\frac{x}{x+3}\geqslant 0\Leftrightarrow x<-3$ 或 $x\geqslant 0$,

∴$A\cap B=(-\infty,-3)\cup[\frac{5}{2},+\infty)$,故选 D.

2. 由已知,$\hat{P}=\{0,1,2\}$,$\hat{Q}=\{1,2,3\}$,故 $\hat{P}\cap\complement_N\hat{Q}=\{0\}$,$\hat{Q}\cap\complement_N\hat{P}=\{3\}$,

∴$(\hat{P}\cap\complement_N\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_N\hat{P})=\{0,3\}$,故选 A.

3. B 为 $\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$,共 4 个.故选 C.

4. 由 $A\odot B=\{0,6,12\}$ 知,应选 D.

例 2

【试题】(全国卷一,05—2)

设 I 为全集,S_1,S_2,S_3 是 I 的三个非空子集,且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$,则下面论断正确的是( ).

A. $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \varnothing$

B. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \varnothing$

D. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

【思路】 本题中的集合未指明所含元素，一般可画文氏图求解，也可取某些特殊的集合讨论，还可严格论证某一选择项正确.

【解析】 解法1：利用文氏图(见图1—1—1)可知，C选项正确.

解法2：不妨取 $I=\{1,2\}$，$S_1=\{1\}$，$S_2=S_3=I$，则A，B与D均不对，只有C选项对.

解法3：$\because S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$，

$\therefore \complement_I(S_1 \cup S_2 \cup S_3)=\varnothing$，

即 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \varnothing$，故C选项正确.

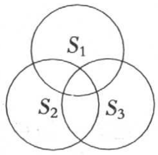

图 1—1—1

解法4：设 a 为 I 中任意的一个元素，因为 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$，所以 $a \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$，故 a 至少属于 S_1，S_2，S_3 中的某一个，不妨设 $a \in S_1$. 因此 $a \notin \complement_I S_1$，故 $a \notin \complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3$. 由于 a 是 I 中任一元素，因此 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \varnothing$.

考点知识归纳与理解

本题的特点是：题中涉及的四个集合未给出具体的元素，因此我们采取了多种解法，如数形结合法(文氏图，解法1)，特殊值法(解法2)，严格论证法(解法3与解法4)，以解法3最简单，它利用了课本中没有讲过的一个结论：

$$\complement_I(A \cup B) = \complement_I A \cap \complement_I B,$$

与之相应的是

$$\complement_I(A \cap B) = \complement_I A \cup \complement_I B.$$

同类试题

【试题1】(全国卷二，04—理6)

设 A，B，I 均为非空集合，且满足 $A \subseteq B \subseteq I$，则下列各式中错误的是(　　).

A. $(\complement_I A) \cup B = I$　　B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$

C. $A \cap (\complement_I B) = \varnothing$　　D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

【试题2】(湖北卷，04—理15)

设 A，B 为两个集合，下面四个命题：

①$A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$，有 $x \notin B$；

②$A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$；

③$A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$；

④$A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$，使得 $x \notin B$.

其中真命题的序号是________(把符合要求的命题序号都填上).

【提示与答案】

1. 用文氏图可知，只有B不对，故选B.

2. 用文氏图可知④为真命题，其他为假命题(或举反例否定①②③)，答案为④.

§1—2　简易逻辑

例1

【试题】(重庆卷，04—文7)

已知 p 是 r 的充分不必要条件，S 是 r 的必要条件，q 是 S 的必要条件，那么 p 是 q 成立的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【解析】 由已知

$p \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} r$，$S \Leftarrow r$，$q \Leftarrow S$.

$\therefore p \Rightarrow r \Rightarrow S \Rightarrow q$，又 $p \not\Leftarrow q$，

因此 p 是 q 的充分条件，但不是必要条件，故选A.

考点知识归纳与理解

关于充要条件问题，有：

若 p 则 q $(p \Rightarrow q)$，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；

若 $p \Leftrightarrow q$，则称 p 是 q 的充要条件(p 与 q 互为充要条件).

同类试题

【试题1】(上海卷，04—14)

若非空集合 $M \subset N$，则"$a \in M$ 或 N"是"$a \in M \cap N$"的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

【试题 2】(山东卷,05— 理 10,文 11)

设集合 A,B 是全集 U 的两个子集,则 $A \subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的( ).

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【提示与答案】

1. 若 $a\in N$ 但 $a\notin M$,则 $a\notin M\cap N=M$;反之,由 $a\in M\cap N$ 必有 $a\in M$ 或 N,故应选 B.

2. 利用文氏图可知:$A\subsetneqq B \Rightarrow (\complement_U A)\cup B=U$;反之不对,例如 $A=B$ 时.故应选 A.

例 2

【试题】(湖南卷,05— 理 8)

集合 $A=\{x\mid \frac{x-1}{x+1}<0\}$,$B=\{x\mid |x-b|<a\}$.若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分条件,则 b 的取值范围可以是( ).

A. $-2\leqslant b<0$ B. $0<b\leqslant 2$

C. $-3<b<-1$ D. $-1\leqslant b<2$

【解析】 由已知,$a=1$ 时有 $A\cap B\neq\varnothing$.

当 $a=1$ 时,$A=\{x\mid -1<x<1\}$,$B=\{x\mid b-1<x<b+1\}$,而

$$A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} b-1<1 \\ b+1>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<b<2.$$

由于题中是“b 的取值范围可以是”,因此只需选择 $(-2,2)$ 的一个非空子集即可,故选 D.

此外,本题也可取 $b=0$,则 $A=B=(-1,1)$,于是有 $A\cap B\neq\varnothing$,故 $b=0$ 应在取值范围内,应选 D.

同类试题

【试题 1】(浙江卷,04— 理 8)

在 $\triangle ABC$ 中,“$A>30^\circ$”是“$\sin A>\frac{1}{2}$”的( ).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【试题 2】(天津卷,04— 理 8)

已知数列 $\{a_n\}$,那么“对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$,点 $P_n(n,a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上”是“$\{a_n\}$ 为等差数列”的( ).

A. 必要而不充分条件

B. 充分而不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【试题 3】(湖北卷,06— 理 8)

有限集合 S 中元素的个数记作 $\mathrm{card}(S)$.设 A,B 都为有限集合,给出下列命题:

①$A\cap B=\varnothing$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$;

②$A\subseteq B$ 的必要条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant \mathrm{card}(B)$;

③$A\nsubseteq B$ 的充分条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant \mathrm{card}(B)$;

④$A=B$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.

其中真命题的序号是( ).

A. ③、④ B. ①、②

C. ①、④ D. ②、③

【提示与答案】

1. 在 $\triangle ABC$ 中,“$A>30^\circ$”$\nRightarrow$“$\sin A>\frac{1}{2}$”,例如 $A=160^\circ$;反之正确.故选 B.

2. 点 $P_n(n,a_n)$ 在直线 $y=2x+1$ 上,即 $a_n=2n+1$,此时 $\{a_n\}$ 为等差数列;反之不对,例如 $a_n=3n+1$.故选 B.

3. B.

例 3

【试题】(福建卷,04— 理 3)

命题 p:若 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件;命题 q:函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$,则( ).

A. “p 或 q”为假 B. “p 且 q”为真

C. p 真 q 假 D. p 假 q 真

【思路】 先判断命题 p 与 q 的真假,再作答.

【解析】 因为 $|a|+|b|\geqslant|a+b|>1$,故由 $|a+b|>1$ 可得 $|a|+|b|>1$;但反之不对,因此 p 为假.

又由 $|x-1|-2\geqslant 0$ 得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$,故 q 为真.

综上可知,选 D.

考点知识归纳与理解

对于复合命题的真假,有:

“p 或 q”为真 $\Leftrightarrow$ p 与 q 中至少有一个为真,“p 且 q”为真 $\Leftrightarrow$ p 与 q 均为真.

同类试题

【试题】(根据两道上海试题改编)

已知命题 p:“$a=3$”是“直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合”的充要条件;

命题 q:“$ab<0$”是“方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线”的充分不必要条件.那么( ).

A. p 真 q 真　　　　B. p 假 q 真

C. “p 或 q”真　　　　D. “p 且 q”真

【提示与答案】

$a=3$ 时，两直线为 $3x+2y+9=0$，$3x+2y+4=0$. 显然，$a=3 \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2$，因此 p 为真.

当 $ab<0$，$c=0$ 时，方程 $ax^2+by^2=c$ 不表示双曲线；反之，$ax^2+by^2=c$ 表示双曲线，即 $\frac{x^2}{\frac{c}{a}}+\frac{y^2}{\frac{c}{b}}=1$，故 $\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}<0$，即 $ab<0$.

因此 q 为假.

综上，应选 C.

第二章　函数

§2—1　映射与函数

例1

【试题】(全国卷,00—1)

设集合 A 与集合 B 都是正整数集合 $\mathbf{N}^*$,映射 f: $A \to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象 20 的原象是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【解析】 $\because 20 = 2^4 + 4$,

$\therefore$ 象 20 的原象为 4,应选 C.

考点知识归纳与理解

映射的定义是:设 A,B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素 a,在集合 B 中都有唯一的元素 b 和它对应,那么这样的对应(包括集合 A,B 以及 A 到 B 的对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射,记作

$f:A\to B$.

其中 a 叫做 b 的原象,b 叫做 a 的象.

同类试题

【试题 1】(全国卷,99—2)

已知映射 $f:A\to B$,其中,集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$,集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象,且对任意的 $a\in A$,在 B 中和它对应的元素是 $|a|$,则集合 B 中元素的个数是(　　).

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【试题 2】(全国卷,00— 理 1)

设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,x-y)$,则在映射 f 下,象 $(2,1)$ 的原象是(　　).

A. $(3,1)$　　B. $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

C. $(\frac{3}{2},-1)$　　D. $(1,3)$

【提示与答案】

1. 由于 $b=|a|$,故 $B=\{1,2,3,4\}$,故选 A.

2. 由 $\begin{cases}x+y=2\\x-y=1\end{cases}$ 得 $x=\frac{3}{2},y=\frac{1}{2}$,故选 B.

例2

【试题】(江苏卷,05—17)

已知 a,b 为常数,若 $f(x)=x^2+4x+3$,$f(ax+b)=x^2+10x+24$,则 $5a-b=$ ________.

【解析】 $\because f(x)=x^2+4x+3$,

$$\therefore f(ax+b)=(ax+b)^2+4(ax+b)+3 = a^2x^2+(2ab+4a)x+b^2+4b+3.$$

由已知得,$\begin{cases}a^2=1\\2ab+4a=10\\b^2+4b+3=24\end{cases}$

解得　$a=-1,b=-7$ 或 $a=1,b=3$.

$\therefore 5a-b=2$.

考点知识归纳与理解

函数概念包含三个要素:定义域、对应法则、值域,其中对应法则是三要素的核心.

同类试题

【试题 1】(浙江卷,05— 文 4)

设 $f(x)=|x-1|-|x|$,则 $f[f(\frac{1}{2})]$ 等于(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【试题 2】(湖北卷,04— 理 3)

已知 $f(\frac{1-x}{1+x})=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(x)$ 的解析式可取为(　　).

A. $\frac{x}{1+x^2}$　　B. $-\frac{2x}{1+x^2}$

C. $\frac{2x}{1+x^2}$　　D. $-\frac{x}{1+x^2}$

【提示与答案】

1. $\because f(\frac{1}{2})=0, \therefore f[f(\frac{1}{2})]=1$,故选 D.

2. 设 $t=\frac{1-x}{1+x}$,则 $x=\frac{1-t}{1+t}$,

$$f(t)=\frac{1-(\frac{1-t}{1+t})^2}{1+(\frac{1-t}{1+t})^2}$$

$$=\frac{2t}{1+t^2},$$

故选 C.

【注意】　也可用特殊值法做. 令 $x=0$,则 $f(1)=1$. 由此选 C.

例 3

【试题】(湖北卷,05— 文 13)

函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-3}\lg\sqrt{4-x}$ 的定义域是________.

【解析】　解不等式组 $\begin{cases}x-2\geqslant 0\\ x\neq 3\\ 4-x>0\end{cases}$,得 $x\geqslant 2$ 且 $x\neq 3, x<4$.

$\therefore$ 函数的定义域为 $[2,3)\cup(3,4)$.

考点知识归纳与理解

函数定义域是函数问题的基础. 求函数定义域一般有两类问题:一是给出函数的解析式,此时函数定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合;二是实际问题或几何问题,此时除使解析式有意义外,还应使问题符合实际问题或几何问题.

同类试题

【试题 1】(湖南卷,05— 理 2,文 3)

函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,+\infty)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

【试题 2】(江西卷,05— 文 4)

函数 $f(x)=\frac{1}{\log_2(-x^2+4x-3)}$ 的定义域为(　　).

A. $(1,2)\cup(2,3)$

B. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

C. $(1,3)$

D. $[1,3]$

【提示与答案】

1. 由 $1-2^x\geqslant 0$ 得 $x\leqslant 0$,故选 A.

2. 由 $-x^2+4x-3>0$ 且 $\log_2(-x^2+4x-3)\neq 0$ 得 $1<x<3$ 且 $x\neq 2$,故选 A.

§2—2　反函数

例 1

【试题】(全国卷一,05— 文 8)

$y=\sqrt{2x-x^2}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$ 的反函数是(　　).

A. $y=1+\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$

B. $y=1+\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$

C. $y=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$

D. $y=1-\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$

【解析】　$y=\sqrt{2x-x^2}\ (1\leqslant x\leqslant 2)$ 的值域为 $[0,1]$.

将 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 平方,得

$y^2=2x-x^2, x^2-2x+y^2=0$.

解得　$x=1\pm\sqrt{1-y^2}$.

$\because 1\leqslant x\leqslant 2$,

$\therefore x=1+\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1$.

因此所求反函数为 $y=1+\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$,故选 B.

考点知识归纳与理解

给出函数 $y=f(x)$，求反函数 $y=f^{-1}(x)$，其要点有三：确定 $y=f(x)$ 的值域（它是反函数的定义域），由 $y=f(x)$ 反解出 $x=f^{-1}(y)$，再改写为 $y=f^{-1}(x)$，并注明其定义域.

同类试题

【试题 1】（广东卷，04—16）

函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x+1}-1)\ (x>0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$________.

【试题 2】（天津卷，04—11）

函数 $y=3^{x^2-1}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是（　　）.

A. $y=\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(x\geqslant\frac{1}{3}\right)$

B. $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(x\geqslant\frac{1}{3}\right)$

C. $y=\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(\frac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$

D. $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(\frac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$

【试题 3】（福建卷，06—8）

函数 $y=\log_2\frac{x}{x-1}(x>1)$ 的反函数是（　　）.

A. $y=\frac{2^x}{2^x-1}(x>0)$　　B. $y=\frac{2^x}{2^x-1}(x<0)$

C. $y=\frac{2^x-1}{2^x}(x>0)$　　D. $y=\frac{2^x-1}{2^x}(x<0)$

【提示与答案】

1. $e^{2x}+2e^x\quad(x\in\mathbf{R})$.

2. 由 $-1\leqslant x<0$ 知 $-1<x^2-1\leqslant 0$，故 $y=3^{x^2-1}\in\left(\frac{1}{3},1\right]$. 又由原式，得 $x=-\sqrt{1+\log_3 y}$，故反函数为 $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(\frac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$，因此选 D.

3. 由已知得，$\frac{x}{x-1}=2^y$，解得 $x=\frac{2^y}{2^y-1}$. 又由 $x>1$ 知，$\frac{x}{x-1}>1$，故 $y>0$. 故选 A.

· 例 2

【试题】（全国卷三，04— 文 3）

记函数 $y=1+3^{-x}$ 的反函数为 $y=g(x)$，则 $g(10)$ 等于（　　）.

A. 2　　B. -2

C. 3　　D. -1

【思路】 先求反函数 $y=g(x)$，再求 $g(10)$；或者利用函数与反函数定义域与值域的对应关系，即求 $y=1+3^{-x}$ 的函数值等于 10 的 x 的值. 一般来说，后者要简便一些.

【解析】 令 $1+3^{-x}=10$，得 $x=-2$，故选 B.

同类试题

【试题 1】（天津卷，05— 理 9）

设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})(a>1)$ 的反函数，则使 $f^{-1}(x)>1$ 成立的 x 的取值范围为（　　）.

A. $\left(\frac{a^2-1}{2a},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{a^2-1}{2a}\right)$

C. $\left(\frac{a^2-1}{2a},a\right)$　　D. $[a,+\infty)$

【试题 2】（湖南卷，04— 文 3）

设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数，则以下不等式中恒成立的是（　　）.

A. $f^{-1}(x)\leqslant 2x-1$　　B. $f^{-1}(x)\leqslant 2x+1$

C. $f^{-1}(x)\geqslant 2x-1$　　D. $f^{-1}(x)\geqslant 2x+1$

【试题 3】（广东卷，06—7）

函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于点 $P(0,2)$（如图 2—2—1 所示），则方程 $f(x)=0$ 在 $[1,4]$ 上的根是 x 等于（　　）.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

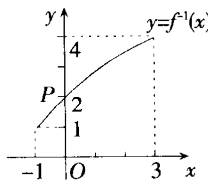

图 2—2—1

【提示与答案】

1. 由于 $f(x)$ 是增函数，可将问题转化为 $x>f(1)$，故选 A.

2. 由已知，$f^{-1}(x)=x^2(x\geqslant 0)$，故 $x^2\geqslant 2x-1$ 成立，应选 C.

3. 由图知，$f^{-1}(0)=2$. 故 $f(2)=0$. 故选 B.

· 例 3

【试题】（全国卷，02— 理 13）

函数 $y=\frac{2x}{1+x}(x\in(-1,+\infty))$ 的图象与其反函数图象的交点坐标为________.

【思路】 先求出反函数，解方程得交点坐标；或者利用“函数 $y=f(x)$ 是增函数，则 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 图象的交点必在直线 $y=x$ 上”.

【解析】 解法 1：$y=\frac{2x}{1+x}\ (x>-1)$ 的反函数是 $y=\frac{x}{2-x}(x\neq 2)$，解方程组

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x}{1+x} \quad (x>-1) \\ y=\dfrac{x}{2-x} \quad (x\neq 2) \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$ 或 $x=1, y=1$.

∴ 交点坐标为 $(0,0)$ 与 $(1,1)$.

解法 2：由 $\begin{cases} y=\dfrac{2x}{1+x} \ (x>-1) \\ y=x \end{cases}$

得 $x=0, y=0$ 或 $x=1, y=1$.

∴ 交点坐标为 $(0,0)$ 与 $(1,1)$.

【说明】 解法 1 中，也可解方程组

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x}{1+x}, \\ x=\dfrac{2y}{1+y}. \end{cases}$$

考点知识归纳与理解

函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 如果 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象有交点，交点可以在直线 $y=x$ 上(当函数 $y=f(x)$ 是增函数时)，也可以不在直线 $y=x$ 上(如 $y=\dfrac{1}{x}$).

同类试题

【试题 1】(上海卷，04—文 15)

若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\lg(x+1)$ 的图象关于直线 $x-y=0$ 对称，则 $f(x)$ 等于(　　).

A. 10^x-1　　　　B. $1-10^x$

C. $1-10^{-x}$　　　　D. $10^{-x}-1$

【试题 2】(江苏卷，04—11)

设 $k>1$，$f(x)=k(x-1)(x\in \mathbf{R})$，在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A 点，它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于 B 点，并且这两个函数的图象交于 P 点. 已知四边形 $OAPB$ 的面积是 3，则 k 等于(　　).

A. 3　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{6}{5}$

【试题 3】(全国卷一，06—2)

已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则(　　).

A. $f(2x)=e^{2x}(x\in \mathbf{R})$

B. $f(2x)=\ln 2\cdot \ln x(x>0)$

C. $f(2x)=2e^x(x\in \mathbf{R})$

D. $f(2x)=\ln x+\ln 2(x>0)$

【提示与答案】

1. $y=\lg(x+1)$ 的反函数是 $y=10^x-1$，故选 A.

2. 如图 2—2—2，先求出点 $P(\dfrac{k}{k-1},\dfrac{k}{k-1})$.

∵ $S=2S_{\triangle OAP}=3$，

∴ $2\times\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{k}{k-1}=3$，

解得 $k=\dfrac{3}{2}$，故选 B.

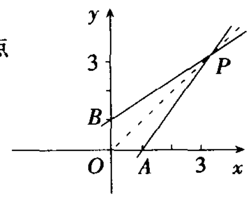

图 2—2—2

3. 由已知，$f(x)=\ln x$，故 $f(2x)=\ln(2x)=\ln x+\ln 2(x>0)$，故选 D.

§ 2—3　函数性质

例 1

【试题】(上海卷，05—13)

若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$，则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是(　　).

A. 单调递减无最小值　　B. 单调递减有最小值

C. 单调递增无最大值　　D. 单调递增有最大值

【解析】 在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$y=2^x+1$ 是增函数，且 y 恒正，故 $f(x)$ 是减函数.

又 $2^x+1>1$，故 $0<\dfrac{1}{2^x+1}<1$，$f(x)$ 无最小值.

综上，选 A.

考点知识归纳与理解

判断函数单调性的方法有：用定义；利用已知函数的单调性；利用图象特征；利用复合函数的单调性；利用导数.

同类试题

【试题 1】(上海卷，04—10)

若函数 $f(x)=a\,|\,x-b\,|+2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，则实数 a,b 的取值范围是________.

【试题 2】(湖南卷，04—文 7)

若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=\dfrac{a}{x+1}$ 在区间 $[1,2]$ 上

都是减函数，则 a 的取值范围是(　　).

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　B. $(-1,0)\cup(0,1]$

C. $(0,1)$　　D. $(0,1]$

【试题 3】(辽宁卷，05—10)

已知 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的单调函数，实数 $x_1\neq x_2$，$\lambda\neq-1$，$\alpha=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$\beta=\dfrac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$. 若 $|f(x_1)-f(x_2)|<|f(\alpha)-f(\beta)|$，则(　　).

A. $\lambda<0$　　B. $\lambda=0$

C. $0<\lambda<1$　　D. $\lambda\geqslant1$

【试题 4】(北京卷，06—理 5)

已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1\\ \log_a x, & x\geqslant1\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数，那么 a 的取值范围是(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(0,\frac{1}{3})$

C. $[\frac{1}{7},\frac{1}{3})$　　D. $[\frac{1}{7},1)$

【提示与答案】

1. 对 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 分别讨论，由 $f(x)=\begin{cases}a(x-b)+2(x\geqslant b)\\ a(b-x)+2(x\leqslant b)\end{cases}$ 可知：$a>0$ 且 $b\leqslant0$ 时 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增.

2. 二次函数 $f(x)=-(x-a)^2+a^2$ 在 $[a,+\infty)$ 上是减函数，$g(x)=\dfrac{a}{x+1}$，当 $a>0$ 时在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 上为减函数. 综上，$0<a\leqslant1$，故选 D.

3. 如图 2—3—1(不妨设 $y=f(x)$ 为增函数)，α 与 β 应在区间 (x_1,x_2) 之外，即 α 与 β 是外分点，故 $\lambda<0$，应选 A.

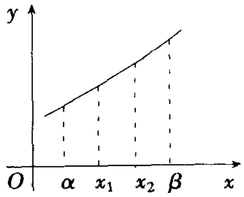

图 2—3—1

4. 由 $\begin{cases}3a-1<0\\0<a<1\end{cases}$ 知，$0<a<\dfrac{1}{3}$.

又当 $x=1$ 时，$(3a-1)x+4a\geqslant0$，

即 $a\geqslant\dfrac{1}{7}$，故 $\dfrac{1}{7}\leqslant a<\dfrac{1}{3}$，应选 C.

例 2

【试题】(山东卷，05—理 4，文 5)

下列函数中既是奇函数，又在区间 $[-1,1]$ 上单调递减的是(　　).

A. $f(x)=\sin x$

B. $f(x)=-|x+1|$

C. $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$

D. $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$

【解析】 对于 A，$f(x)$ 是奇函数，但它在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上为增函数，故不选；

对于 B，由图 2—3—2 知，它不具有奇偶性，故不选；

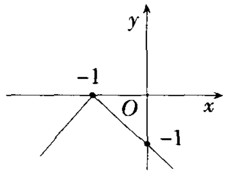

图 2—3—2

对于 C，显然有 $f(x)$ 为偶函数，故不选；

对于 D，由于

$$f(-x)=\ln\frac{2+x}{2-x}=-\ln\frac{2-x}{2+x}=-f(x),$$

故它是奇函数.

又 $u=\dfrac{2-x}{2+x}=\dfrac{4}{x+2}-1$，它在 $(-2,+\infty)$ 上是减函数，又 $y=\ln u$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，故 $f(x)=\ln u=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数.

综上，应选 D.

考点知识归纳与理解

判断函数奇偶性的方法有：

利用定义：对于任意的 $x\in D_f$，都有 $f(-x)=\pm f(x)$；利用图象特征(奇函数图象关于原点对称，偶函数图象关于 y 轴对称)；利用奇偶函数的性质(如"奇＋奇＝奇"，"奇×奇＝偶"等等). 此外否定函数奇偶性时还用到：函数定义域 D 不是关于原点对称的；若 $f(0)$ 有意义，则 $f(0)=0$ 是 $f(x)$ 为奇函数的必要条件.

关于复合函数的单调性，有：

在复合函数 $y=f[g(x)]$ 中，若 $u=g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调函数，$y=f(u)$ 在区间 $[g(a),g(b)]$(或在区间 $[g(b),g(a)]$) 上是单调函数，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在区间 $[a,b]$ 上一定是单调函数. 它的增减性如下：当 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 的增减性相同时，$y=f[g(x)]$ 是增函数；当它们的增减性相反时，$y=f[g(x)]$ 是减函数.

同类试题

【试题 1】(重庆卷，05—3)

若函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，且 $f(2)=0$，则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-2,2)$

【试题 2】(全国卷四，04—文 7)

设函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 为奇函数，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$f(x+2)=f(x)+f(2)$，则 $f(5)$ 等于(　　).

A. 0　　B. 1

C. $\dfrac{5}{2}$　　D. 5

【试题 3】(全国卷一,04—2)

已知函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$,若 $f(a)=\frac{1}{2}$,则 $f(-a)$ 等于(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $-\frac{1}{2}$

C. 2　　　　D. -2

【试题 4】(山东卷,06—理 6)

已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$,则 $f(6)$ 的值为(　　).

A. -1　　　　B. 0

C. 1　　　　D. 2

【试题 5】(重庆卷,06—文 21)

已知定义域为 **R** 的函数 $f(x)=\frac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是奇函数.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 对任意 $t\in\mathbf{R}$,不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立,求 k 的取值范围.

【提示与答案】

1. 由已知,可画示意图 2—3—3,故当 $f(x)<0$ 时,$x\in(-2,2)$,因此选 D.

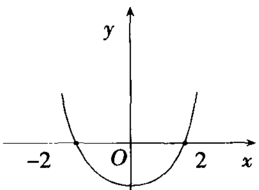

图 2—3—3

2. $\because f(1)=f(-1+2)=f(-1)+f(2)=-f(1)+f(2)$,

$\therefore f(2)=2f(1)=1$,

$\therefore f(5)=f(3)+f(2)=f(1)+2f(2)=\frac{5}{2}$,因此选 C.

3. $\because f(x)$ 是奇函数(证明略),

$\therefore f(-a)=-f(a)=-\frac{1}{2}$,故选 B.

4. 由已知,$f(x+4)=f(x)$,故 $f(-2)=f(2)$,又 $f(-2)=-f(2)$,故 $f(2)=0$,$f(6)=f(2)=0$,应选 B.

5. (1) 因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(0)=0$,即 $\frac{-1+b}{2+a}=0$,解得 $b=1$. 从而有 $f(x)=\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+a}$. 又由 $f(1)=-f(-1)$ 知,$\frac{-2+1}{4+a}=-\frac{-\frac{1}{2}+1}{1+a}$,解得 $a=2$.

(2) 由(1)知 $f(x)=\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$.

由上式易知 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上为减函数.

又因 $f(x)$ 是奇函数,从而不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 等价于 $f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)=f(-2t^2+k)$.

因 $f(x)$ 是减函数,由上式推得 $t^2-2t>-2t^2+k$,即对一切 $t\in\mathbf{R}$ 有 $3t^2-2t-k>0$. 从而判别式 $\Delta=4+12k<0$,解得 $k<-\frac{1}{3}$.

· 例 3

【试题】(天津卷,05—理 16)

设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数,且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=$ ________.

【思路】 利用 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数及图象的对称性,可寻找它的周期(画示意图可得 $T=2$).

【解析】 $\because f(x)$ 是 **R** 上的奇函数,

$\therefore f(0)=0$,$f(-x)=-f(x)$.

$\because y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,

$\therefore f(1)=f(0)=0$ 且 $f(x)=f(1-x)$,

$\therefore f(x)=-f(-x)=-f(1+x)$,

即 $f(x+1)=-f(x)$,

$\therefore f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$,$x\in\mathbf{R}$,

因此 $f(x)$ 的一个周期为 2.

由 $f(0)=0$ 得 $f(2)=f(4)=0$.

由 $f(1)=0$ 得 $f(3)=f(5)=0$.

综上,答案为 0.

考点知识归纳与理解

关于函数 $y=f(x)$ 的奇偶性、对称性与周期性,有下面结论:

1. $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a-x)=f(a+x)\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)$.

2. 设 $f(x)$ 是 R 上的偶函数,且图象关于直线 $x=a$ $(a\neq 0)$ 对称,则 $f(x)$ 是周期函数,它的一个周期是 $2a$.

以上结论证明从略.

同类试题

【试题 1】(天津卷,05—文 10)

设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上以 6 为周期的函数,$f(x)$ 在$(0,3)$内单调递减,且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称,则下面结论正确的是(　　).

A. $f(1.5)<f(3.5)<f(6.5)$

B. $f(3.5)<f(1.5)<f(6.5)$

C. $f(6.5)<f(3.5)<f(1.5)$

D. $f(3.5)<f(6.5)<f(1.5)$

【试题 2】(福建卷,05—理 12,改编)

$f(x)$ 是定义在 **R** 上的以 3 为周期的奇函数,且 $f(2)=0$,则方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,6)$内的整数解的个数是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【提示与答案】

1. 由已知,$f(3.5)=f(2.5)<f(1.5)$,$f(6.5)=f(0.5)>f(1.5)$,故选 B.

2. $\because f(x)$ 是奇函数,$\therefore f(0)=0$.