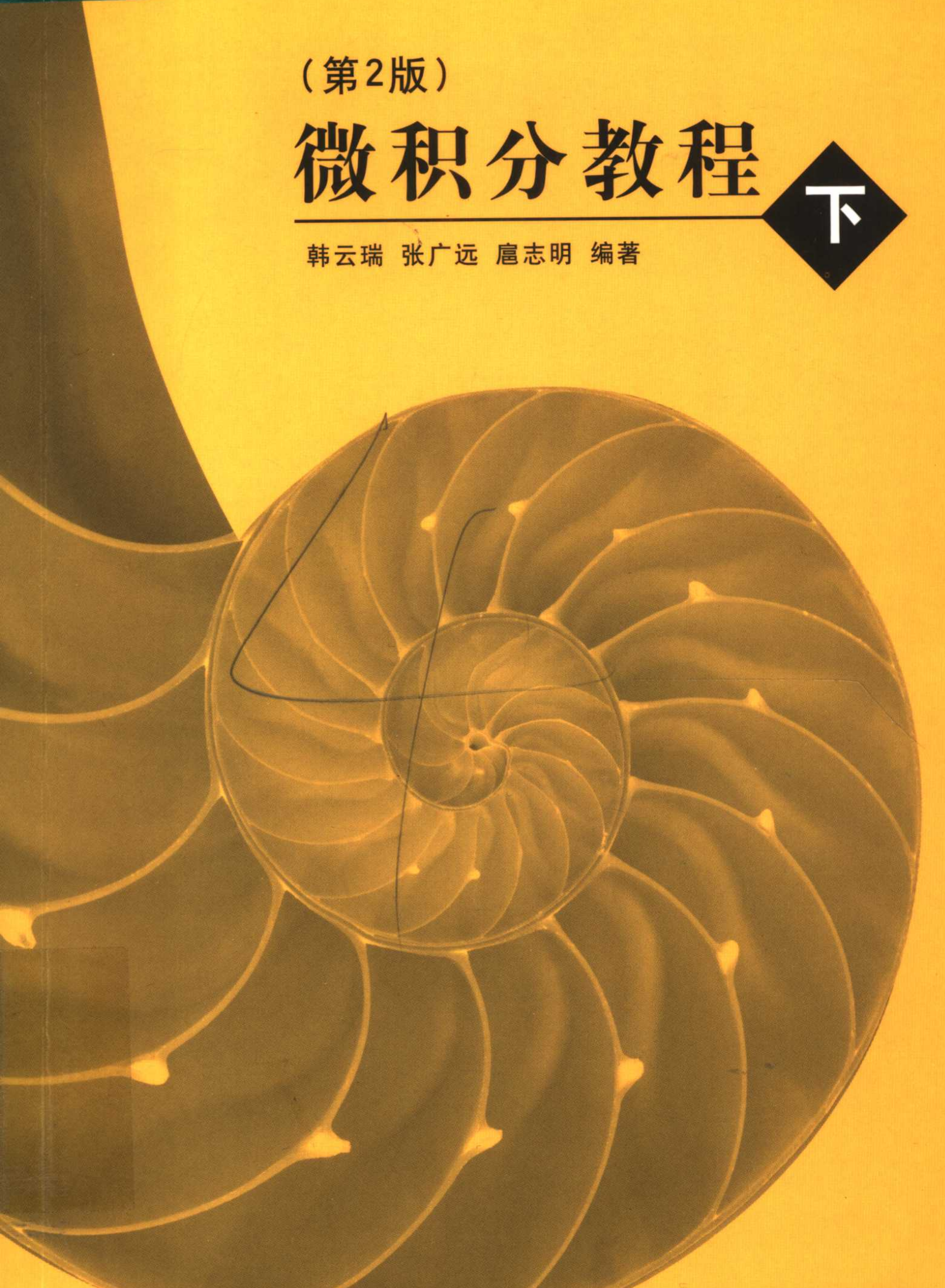
（第2版）

微积分教程

下

韩云瑞 张广远 扈志明 编著



清华大学出版社

（第2版）

微积分教程 下

韩云瑞 张广远 扈志明 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是编者总结多年的教学经验和教学研究成果，参考国内外若干优秀教材，对《微积分教程》进行认真修订而成的．本书概念和原理的表述科学、准确、清晰、平易，语言流畅．例题和习题重视基础训练，丰富且有台阶、有跨度．为了方便教学与自学，在附录中给出了习题答案与补充题的提示与解答，并且补充了微积分概念和术语的索引．另外，在附录A中，按照"发现—猜测—验证—证明"的模式，指导读者以数学软件 Mathematica 为辅助工具，通过理论、数值和图形各方面的分析研究寻找问题的解答．这些问题紧密结合微积分教学和训练的基本要求，有助于培养学生分析和解决问题的能力．

本书分为上、下两册．上册包括实数和函数的基本概念和性质，极限理论和连续函数，一元函数微积分学，数项级数与函数项级数．下册包括多元函数微分学及其应用，重积分，曲线和曲面积分，向量场初步以及常微分方程初步等．本书可作为大学理工科非数学专业微积分（高等数学）课程的教材．

图书在版编目（CIP）数据

微积分教程．下/韩云瑞，张广远，扈志明编著．—2版．—北京：清华大学出版社，2007.2

ISBN 978-7-302-14174-7

Ⅰ．微…　Ⅱ．①韩…　②张…　③扈…　Ⅲ．微积分—高等学校—教材
Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 138909 号

责任编辑：刘　颖　王海燕
责任校对：刘玉霞
责任印制：孟凡玉

出版发行：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　邮购热线：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　客户服务：010-62776969
印 刷 者：北京鑫丰华彩印有限公司
装 订 者：三河市李旗庄少明装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：140×203　印张：13　字数：327千字
版　　次：2007年2月第2版　印次：2007年2月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：19.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：010-62770177 转 3103　产品编号：020979-01

第 2 版前言

《微积分教程》面世以来，在教学使用中取得了良好的效果，受到许多读者的好评．但是，近年来国内高校的微积分（高等数学）教学的思想与水平都发生了许多变化，本书编者在近几年结合教学实践，从教育数学和数学教学两个方面对于微积分的体系和内容进行了较为深入的分析，同时也广泛地阅读了国内外的有关教材．为了体现当前微积分课程教学的特点与要求，体现编者有关的教学研究成果，使本教材更加适应微积分课程的教学，同时也为了克服本教材存在的若干不足，编者对原教材进行了较大幅度的修订．

修订后的《微积分教程》有以下几个特点：

1．编者从教育数学的观点对微积分的内容进行深入研究，所以本书的逻辑结构简约而清晰，概念和原理的表述科学、准确、平易．定理证明思路自然、清楚．语言准确、流畅，层次清楚，逻辑性强，表述清楚，易教易学．因此本书为学生和教师提供了一本在教学和学习方面都有参考价值的教科书和教学参考书．

2．概念、定理与例题配置和谐，例题和习题重视基础训练，同时又丰富且有台阶、有跨度．有许多激发学习兴趣、提高数学水平的独具特色的习题．

3．对于微积分课程中的某些难点（例如极限概念、多元函数微分概念和曲面积分等），本书不追求完全形式化的抽象，而是以较为直观的、平易的方式适当地改变表述形式，在不失科学性的前提下降低教学难度．

4．本书的上、下册都有一个名为“探索与发现”的附录．读者

需要以数学软件 Mathematica 为辅助工具，通过理论分析和数值、图形分析才能找到解决问题的思路和解答方法. 这些问题紧密结合微积分教学和训练的基本要求，既能培养学生运用数学理论分析问题的能力，又能提高学生运用数学软件作为辅助工具来分析、发现和解决问题的能力. 这些问题的求解过程体现了“发现—猜测—验证—证明”的模式，有助于学生的创造能力和应用能力的培养.

5. 为了便于教学和自学，本书增加了习题答案与各章补充题的提示.

施学瑜、马连荣、刘智新、刘庆华、章梅荣和谭泽光等教授都曾以不同形式对本书第 1 版做出了贡献，借此机会，编著者向他们表示敬意.

由于编者的水平所限，可能会有一些错误和不妥之处，敬请读者给予批评和指正.

韩云瑞

2006 年 5 月

第1版前言

本书是清华大学理工科各系一年级“微积分”课程的教材，它的前身是同名讲义. 该讲义从1991年以来经过三次修改，并在清华大学各系使用多年，已经成为清华大学“微积分”课程的主要教材之一. 清华大学应用数学系先后有十余位教师参与过原讲义的编写与修改工作. 现在的这部教材是在原有讲义的基础上再次进行较大的修改而写成的.

随着科学技术的发展与教学改革的深入，近年来清华大学“微积分”课程的教学思想与内容要求发生了很大变化，这部微积分教材从一个侧面反映了清华大学“微积分”课程教学的发展趋势和教学水平.

由于近代数学以及许多有应用价值的数学知识不断地被充实到大学数学的教学内容中来，经典微积分的课时不断地被压缩，在这种情况下，更应当重视“微积分”课程在大学数学课程体系中的基础地位，在适当精简教学内容的同时，应当更好地把握微积分的基本要求，在较短的时间内，使学生掌握微积分的基本思想与基本方法. 在为其他数学课程与各专业课程奠定良好的基础的同时，使学生的数学素养和能力得到扎实的提高. 这是本书编写的主要指导思想.

在“微积分”课程的教材中，使分析的概念和原理与代数的运算相结合，将现代数学的观点和语言融入经典的微积分素材之中已经是一种趋势，在这方面，本书编者已经做过反复的探索. 但是，经典微积分的思想与方法仍然是基础数学与应用数学的非常重要的基础. “微积分”课程教学的主要任务，是使大学生掌握经典微积

分的基本思想与基本方法.大学生们可以通过学习后续数学课程了解现代数学的内容与方法.鉴于这些考虑,在引进现代数学的原理和语言方面,本书只作了适量的努力.

尽管本书与传统的微积分教材没有体系上的重大区别,但是它的内容与叙述方法却有许多变化.例如,多元函数微积分与常微分方程的材料处理尽可能地使用线性代数语言,第二型线、面积分与向量场有机地结合起来,并更加重视物理背景,多元函数微分的分析概念更好地与几何直观相结合等.

教材中尽可能地将微积分发展中若干重要思想有机地融会于教学内容之中,向读者介绍了微积分的重要原理的产生背景与发展过程,展示一代代数学大师的光辉思想与巨大贡献.使学生在学习微积分知识的同时,在微积分前进的历史足迹中,受到启迪,吸取力量.

施学瑜教授对于本书的编写给予了热情的关心和指导,他认真阅读了教材全部内容,提出了许多有价值的意见和建议.吴洁华副教授也对教材提出了非常中肯的意见,他们的许多建议都已经为编者所采纳.孙念增教授曾经认真审阅过原讲义下册,并提出了具体的指导意见.马连荣博士、吕志博士、刘智新博士、杨和平博士、卢旭光博士、章梅荣教授、胡金德教授都曾经参加过原讲义的编写工作,许甫华副教授、王燕来副教授、刘庆华副教授都曾为本教材的形成作出过贡献.除此之外,谭泽光教授、白峰杉教授为本教材的编写提供了多方面的支持和鼓励.借此机会,向他们一一致谢.

由于编者水平所限,错误与疏漏在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

1998年11月于清华大学

目　　录

第9章　空间解析几何

微积分中的许多概念和原理都有直观的几何意义.将抽象的数学概念和原理与几何直观有机地结合,不仅可以加深对问题的理解,而且能够启发人们的想像能力和创造能力.几何的方法是现代数学重要的组成部分,限于篇幅,这里只能介绍多元微积分中常用的一些空间解析几何知识.

9.1　向量及其运算

9.1.1　向量及其线性运算

在物理学中的力、位移和速度等一些量,不仅有量的大小,还有确定的方向,这样的量称为**向量**.在几何上,常常将向量表示为一个有方向的线段,例如图9.1中的线段$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$都表示向量.有时也用小写粗体字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 等表示向量.

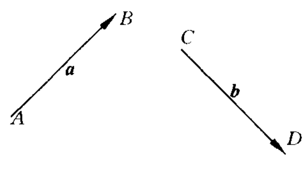


图　9.1

向量的大小称为该向量的**模**或**长度**,也称为向量的**范数**.向量$\overrightarrow{AB}$的范数就等于该线段的长度,并用 $\|\overrightarrow{AB}\|$ 表示.如果 $\boldsymbol{a}$ 表示向量,则用 $\|\boldsymbol{a}\|$ 表示该向量的范数.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同且范数相等,则称这两个向量相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$; 如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的范数相等但方向相反,则记作$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.

范数等于零的向量称为**零向量**,用 $\mathbf{0}$ 表示零向量,零向量的方向是不确定的.

对任一非零向量 $\boldsymbol{a}$,都存在一个范数与 $\|\boldsymbol{a}\|$ 相等但方向相反的向量,将后者记作 $-\boldsymbol{a}$.

下面介绍向量的线性运算. 线性运算是向量最主要的一种运算,它包括向量的加法与**数乘**.

向量的加法服从平行四边形法则:设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个任意向量. 用 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\boldsymbol{a}$,将 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至点 O,并用 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{b}$,然后以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$(图 9.2),该平行四边形的对角线 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

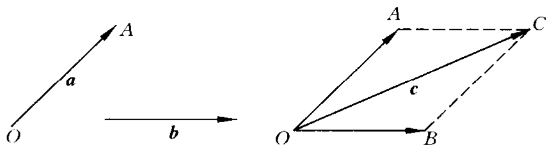


图　9.2

也可以用三角形法则说明向量的加法:设 $\boldsymbol{a}$ 为向量 $\overrightarrow{OA}$,将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A,此时 $\boldsymbol{b}$ 的终点为 C,那么向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种方式定义的向量加法与平行四边形法则是一致的(图 9.3).

对于非零向量 $\boldsymbol{b}$, $-\boldsymbol{b}$ 是一个方向与 $\boldsymbol{b}$ 相反,但其范数与 $\boldsymbol{b}$ 范数相等的向量. 我们规定

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{9.1.1}$$

读者可以根据向量加法的平行四边形法则或者三角形法则说明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的直观意义.

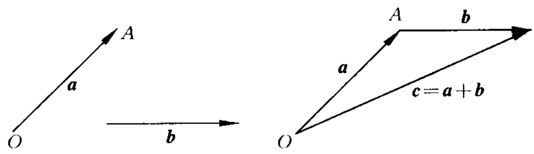


图 9.3

定理 9.1.1 向量的加法具有下列性质：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)；

(2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$(结合律)；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(5) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$.

最后的不等式具有明显的几何意义：三角形的任意一个边长不超过其他两个边长之和.

向量的**数乘**是这样定义的：设 $\boldsymbol{a}$ 为任意向量，λ 为任意实数. 用 λ 乘 $\boldsymbol{a}$ 得到一个新的向量 $\lambda\boldsymbol{a}$. 这个向量的范数是 $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=\|\lambda\|\cdot\|\boldsymbol{a}\|$. 它的方向是这样规定的：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 一致；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

定理 9.1.2 向量的数乘有下列性质：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量，λ,μ 为任意实数，则有

(1) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$；

(3) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

(4) $0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$；

(5) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ 是一个单位向量(即范数等于 1 的向量)，并且 $\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}_0$.

9.1.2　向量的积

向量的积有内积、外积和混合积三种. 下面逐一介绍.

1. 向量的内积

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，将 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至点 O，并用 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{b}$. 此时，线段 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角 α 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角记作 $\widehat{\boldsymbol{ab}}$，两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角满足 $0\leqslant\widehat{\boldsymbol{ab}}\leqslant\pi$（图 9.4）.

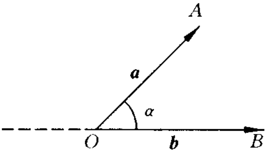


图　9.4

定义 9.1.1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量，$\widehat{\boldsymbol{ab}}$ 是它们的夹角，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**定义为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\widehat{\boldsymbol{ab}}. \tag{9.1.2}$$

任意两个向量的内积 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是一个实数，所以内积也称作数量积. 通常，三维空间中的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的内积用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间夹一个圆点 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示，所以向量的内积又称为**点积**.

另外又规定，任意向量 $\boldsymbol{a}$ 与零向量的内积等于零，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$.

如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **正交**，或者垂直，并记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 显然任意向量与零向量正交.

定理 9.1.3　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量，λ,μ 为任意实数，则有

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) 令 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}^2\geqslant0$，并且当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时有 $\boldsymbol{a}^2=0$；

(4) 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则有

$$\cos\widehat{\boldsymbol{ab}} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|};$$

(5) $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$；

(6) $\|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|$；

(7) 如果 $\boldsymbol{a}$ 与所有向量都正交，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(8) 如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$.

以上各条性质请读者自己验证.

现在解释内积的几何意义.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$为单位向量,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$为非零向量.延长$\overrightarrow{OA}$成直线 l,自向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 向直线 l 引垂线交 l 于点 C(图 9.5),得到直线 l 上的向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$,称这个向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向的**投影**.向量 $\boldsymbol{c}$ 的范数为 $\|\boldsymbol{c}\|=|\,\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}\,|=\|\boldsymbol{b}\|\,|\cos\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}|$.它的方向是:当 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}>0$ 时,$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一致;当 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}<0$ 时,方向相反;当 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 时,$\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$.

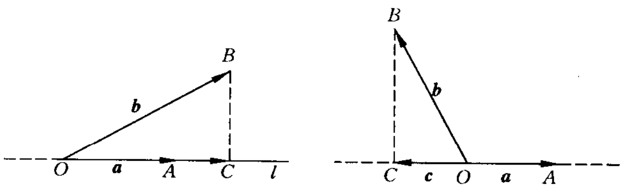


图 9.5

2. 向量的外积

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**外积**记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,这是一个新的向量,它的范数为

$$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sin\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}. \tag{9.1.3}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直,并且与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 成右手系.也就是说,伸出右手的拇指、食指和中指,并且使中指与前两者都垂直.如果拇指代表 $\boldsymbol{a}$,食指代表 $\boldsymbol{b}$,那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向与中指方向是一致的(图 9.6).

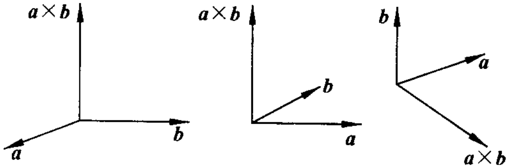


图 9.6

由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，所以外积又称为**向量积**. 另外，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 又称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**叉积**.

由外积的定义直接看出，任意向量 $\boldsymbol{a}$ 与零向量 $\boldsymbol{0}$ 的叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$；如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线（即 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反），则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的几何意义是：如果用 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 和 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 为邻边构造平行四边形，这个平行四边形的面积就是向量积的范数 $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$（图 9.7）.

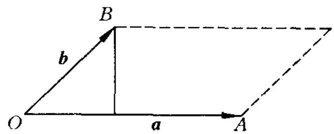


图 9.7

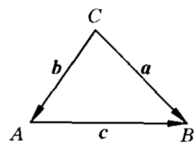


图 9.8

定理 9.1.4　向量的外积有下列性质：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量，λ,μ 为任意实数，则有

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$（反交换律）；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

例 9.1.1　如图 9.8，设三角形 ABC 的三个边长分别等于 a，b 和 c，求证：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \tag{9.1.4}$$

证明　注意到 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$，所以有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\times\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})\\&=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB},\end{aligned}$$

于是得到