逻辑代数入门

陈德勤

近代数学知识丛书 JINDAISHUXUEZHISHICONGSHU

四川教育出版社

近代数学知识丛书

逻辑代数入门

陈德勤

四川教育出版社
一九八八年·成都

责任编辑　韩承训
封面装帧　邱云松
版面设计　王　凌

近代数学知识丛书　　逻辑代数入门

四川教育出版社出版　　(成都盐道街三号)
四川省新华书店发行　　成都印刷一厂印刷

开本787×960毫米 1/32 印张3.875 插页2 字数69千
1988年1月第一版　　1988年1月第一次印刷
印数：1——2.110 册

ISBN 7—5408—0203—0/G·200　　定价：0.91元

写在前面

从小学跨入中学，特别是步入高中以后，你将碰到许多完全陌生的东西，你将会发现数学天地是那样广阔，那样令人神往而又眼花缭乱，你可能会感到新奇，也可能会因无从下手而产生惶惑……其实，万事入门难，入门前或许不知所云，入了门便“不过如此”了。

这套知识小丛书将帮助你度过“入门难”这一关。它用生动而浅显（有时还很有趣）的语言，准确而明晰的阐述，将近代数学中一些基本的概念、理论和运算一步一步展开，象一级级台阶，将你引入门去，使你并不感到突然和十分吃力。许多地方还从生活现象入手，你读起来象是在聊家常，毫无枯燥之感。所选的例题和练习也将帮助你加深理解。当然，所谓入门，不过是给你一把小小的钥匙而已，一旦“入”得“门”去，那广阔的天地便由你自由驰骋，因而也就不再是这套书的任务了。

这套丛书所收书目见封四所列，大多为中学数学所涉及；少数关系不甚密，可辅你开拓视野，有兴趣者也不妨一读。对于中学教师来说，这套丛书

也不失为良友，对提高教学质量或能助以一臂之力。

这本《逻辑代数入门》从一些有趣的逻辑推理问题开始，谈到逻辑运算，谈到逻辑电路与电子计算机等等，读后你一定会感到有所收益的。当然，由于编者水平所限，书中缺点错误在所难免，敬请读者提出宝贵意见。

编　者　1987年3月

目 录

一 概 述

“逻辑”一词是由英语“logic”音译过来的，它起源于希腊文“λόγος”（逻各斯）。逻辑学是一门研究思维的科学，分形式逻辑和辩证逻辑两种，它们都是以思维规律为研究对象的。形式逻辑是有悠久历史的一门科学，到了近代由于采用了数学方法来研究它，才在古典的形式逻辑的基础上，逐渐地改造、发展而形成一门新的数学分支——数理逻辑。数理逻辑又叫符号逻辑，它在许多科学技术领域内都有广泛的应用。逻辑代数是数理逻辑中的一个初步的部分，它是研究电子计算机的必不可少的工具。

那么，到底什么是逻辑代数呢？它与普通代数有什么不同？让我们先来看一个例子。

在A、B、C三只猫中，只有一只猫偷吃了主人的鱼，经审讯，其供词如下：

A猫：“我没偷吃鱼，B也没偷吃。”

B猫：“我没偷吃鱼，C也没偷吃。”

C猫：“我没偷吃鱼，A、B也都没偷吃。”

已知每只猫的供词中都有一句是真话，一句是假话，试判断到底是哪一只猫偷吃了主人的鱼。

这是一个逻辑推理问题。这类问题能不能用数学方法来解决呢？能。19世纪中叶，英国数学家、逻辑学家布尔（Boole）首先用代数方法研究逻辑推理问题。他于1847年正式提出逻辑代数这一基本概念，用符号来表达语言和思维的逻辑性，所以逻辑代数又叫布尔代数。

逻辑代数与普通代数的最大区别，一是变量取值不同，一是运算规则不同。在逻辑代数中，变量只能取两个值：0和1。例如，我们可以用$A=1$表示"A猫偷吃了鱼"，用$A=0$表示"A猫没偷吃鱼"。由于现实生活中，"A猫偷吃了鱼"与"A猫没偷吃鱼"两者必居其一，而且只居其一，因此，A不为1就必为0，不为0就必为1。对B猫、C猫，也是如此。

在日常生活中，还可以举出许多类似的例子，比如，电灯A"亮"与"不亮"两者必居其一，而且只居其一。如果用$A=0$表示"电灯A不亮"，用$A=1$表示"电灯A亮"，那么就很容易得到：A不为0就必为1，A不为1就必为0。应该注意的是，这里的"1"和"0"与普通代数中的"1"和"0"不同，它们不是一般的数，而是表示有矛盾关系的双方。例如，用"1"表示"真"，"0"就表示"假"；用"1"表示"开"，"0"就表示"关"；用"1"表示"是"，"0"就表示"否"；用"1"表示"在"，"0"就表示"不在"……

在逻辑代数中，由于用“1”和“0”表示有矛盾关系的双方，因此我们就可以把简单思维数学化。比如在上面的例子中，我们用“1”表示“偷吃了鱼”，用“0”表示“没有偷吃鱼”，则可以把A猫供词表示为：$A=0$且$B=0$，即$A+B=0$；B猫供词表示为：$B=0$且$C=0$，即$B+C=0$；C猫供词表示为：$C=0$，$A=0$且$B=0$，即$A+B+C=0$。同理，我们可以把“至少有一只猫偷吃鱼”表示为：$A+B+C=1$。这样，我们就可以用逻辑代数特有的运算规则，得到问题的答案。具体方法我们以后还要详谈。

现在你可能要问：逻辑代数到底是用来干什么的呢？我们知道，20世纪最伟大的科技成果之一，就是电子计算机的发明，它是一种既有高速运算能力，又有逻辑判断功能和存贮功能的现代化电子设备。今天，电子计算机已广泛应用于科学研究和工程设计方面，应用于数据处理和自动控制方面。可以说，现代科学技术的各个领域无不使用电子计算机，它不仅能代替人进行大量的计算工作，而且还具有一定的“智能”，也就是还具有一定的逻辑推理能力。当然，电子计算机的“智能”是人给它的，而人又是如何给它的呢？这其中就有逻辑代数的一份功劳。

我们知道，尽管电子计算机的电路十分复杂，但它主要是由一些基本的开关电路组成。在描述、分析和设计这些开关电路时，就要用到逻辑代数这

一重要的数学工具（所以人们又称逻辑代数为开关代数）．顺便提一下，逻辑代数之所以受到广泛重视，也正是由于到了本世纪30年代后，自动控制技术中大量应用了开关电路．

由于逻辑代数中的变量只能取“0”和“1”两个值，而只有“0”和“1”两个数码的二进制又恰恰最适于通过机器来实现，比如电源的通与断、电位的高与低、脉冲的有与无等，都可以用“1”与“0”来表示，因而在电子计算机中，采用二进制数就显然比采用十进制数方便得多，十进制数在电子计算机中是不受欢迎的。

因此，还是让我们先从二进制谈起吧。

二　二进制

人们习惯使用的是十进位计算制，简称**十进制**．十进制有以下三个特点：

（1）有十个数码：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9．

（2）逢十进一，退一当十：十个1叫做10，十个10叫做100，十个100叫做1000……“10”称为十进制的基数．

（3）任意一个十进制数，都可以写成以基数“10”为底的幂的和的形式．例如：

$7863=7\times10^3+8\times10^2+6\times10^1+3\times10^0$;

$80.305=8\times10^1+0\times10^0+3\times10^{-1}+0\times10^{-2}+5\times10^{-3}$.

二进位记数制，简称**二进制**，它也有三个特点：

（1）有两个数码：0，1．

（2）逢二进一，退一当二：二个1叫做10，二个10叫做100，二个100叫做1000……“2”称为

二进制的基数。

（3）任意一个二进制数，都可以写成以基数“2”为底的幂的和的形式。例如：

$101=1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0$；

$10.011=1\times 2^1+0\times 2^0+0\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}$。

一般常将基数写在数的右下角.例如：

7863_{10}表示十进制中的数7863，简称十进数7863；

1011_2表示二进制中的数1011，简称二进数1011。

在不会发生误解时，基数也可以省略不写。

2·1 二进数与十进数的相互换算

在使用电子计算机进行计算时，常常需要把十进数化为二进数，或者把二进数化为十进数。在编制电子计算机解题程序时，还常用八进数。因此，我们首先讨论二进数与十进数的相互换算，顺便讨论八进数与十进数的相互换算。

【例1】 把下列二进数化为十进数：

（1）101_2；（2）11.011_2。

解：要把二进数转换成十进数，首先应把二进数写成以基数“2”为底的幂的和的形式，然后再按十进制计算其结果.

（1）$101_2=1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0$

$$=4+0+1$$
$$=5;$$

(2)$11.011_2=1\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}+1\times2^{-3}$

$=2+1+0+0.25+0.125$

$=3.375;$

【例 2】 把下列八进数化为十进数：

(1)101_8;　　　(2) 1.364_8.

解：要将八进数转换成十进数，首先应把八进数写成以基数“8”为底的幂的和的形式，然后再按十进制计算其结果。

(1)$101_8=1\times8^2+0\times8^1+1\times8^0$

$=64+0+1$

$=65;$

(2)$1.364_8=1\times8^0+3\times8^{-1}+6\times8^{-2}+4\times8^{-3}$

$=1+0.375+0.09375+0.0078125$

$=1.4765625.$

【例 3】 把十进数89化为二进数。

解法1：$\because$ $2^0=1$，$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，$2^6=64$，$2^7=128$，…

$\therefore$ $89=64+16+8+1$

$=1\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$

$=1011001_2.$

解法2：

$\because$ $2\,\underline{|89}$

$2\,\underline{|44}$…余数＝1，即2^0位上数字为1。

$2\,\underline{|22}$…余数＝0，即2^1位上数字为0。

$2\,\underline{|11}$…余数＝0，即2^2位上数字为0。

$2\,\underline{|5}$…余数＝1，即2^3位上数字为1。

$2\,\underline{|2}$…余数＝1，即2^4位上数字为1。

$2\,\underline{|1}$…余数＝0，即2^5位上数字为0。

0…余数＝0，即2^6位上数字为1。

$\therefore$ $89 = 1011001$。

解法2叫做二除取余法，它比解法1简便。

【例4】 把十进数0.40625化为二进数。

解法1：$\because$ $2^{-1}=0.5$，$2^{-2}=0.25$，

$2^{-3}=0.125$，$2^{-4}=0.0625$，$2^{-5}=0.03125$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad 0.40625 &= 0.25+0.125+0.03125\\ &= 0\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}\\ &\quad +0\times 2^{-4}+1\times 2^{-5}\\ &= 0.01101_2.\end{aligned}$$

解法2：

$$\because\quad \begin{array}{r} .40625\\ \times 2\\ \hline \end{array}$$

0.81250…整数部分为0，即2^{-1}位上数字为0。

$$\begin{array}{r} .81250 \\ \times\ 2 \\ \hline 1.62500 \end{array}$$
…整数部分为1，即2^{-2}位上数字为1。

$$\begin{array}{r} .62500 \\ \times\ 2 \\ \hline 1.25000 \end{array}$$
…整数部分为1，即2^{-3}位上数字为1。

$$\begin{array}{r} .25000 \\ \times\ 2 \\ \hline 0.50000 \end{array}$$
…整数部分为0，即2^{-4}位上数字为0。

$$\begin{array}{r} .50000 \\ \times\ 2 \\ \hline 1.00000 \end{array}$$
…整数部分为1，即2^{-5}位上数字为1。

$\therefore\quad 0.40625 = 0.01101_2$.

解法2叫做二乘取整法，它比解法1简便。

应当注意，十进小数并不是都能用有限位二进小数精确地表示的。

【例5】 把十进数390.375化为二进数。

解： 390.375是一个十进混合小数，可以先把它分为整数与纯小数两部分，再分别转换成二进数，然后把它们加在一起即可。

∵

$$\begin{array}{r|l}
2 & 390 \\ \hline
2 & 195 \cdots 0 \\ \hline
2 & 97 \cdots 1 \\ \hline
2 & 48 \cdots 1 \\ \hline
2 & 24 \cdots 0 \\ \hline
2 & 12 \cdots 0 \\ \hline
2 & 6 \cdots 0 \\ \hline
2 & 3 \cdots 0 \\ \hline
2 & 1 \cdots 1 \\ \hline
 & 0 \cdots 1
\end{array}$$

∴ $390 = 110000110_2$;

∵

$$\begin{array}{r}
.375 \\
\times\ 2 \\ \hline
0.750 \\
.750 \\
\times\ 2 \\ \hline
1.500 \\
.500 \\
\times\ 2 \\ \hline
1.000
\end{array}$$

∴ $.375 = .011_2$.

因此，$390.375 = 110000110.011_2$

【例 6】 把十进数75.43化成二进数。

解：$\because$

$$
\begin{array}{r|ll}
2 & 75 & \\
2 & 37 & \cdots 1 \\
2 & 18 & \cdots 1 \\
2 & 9 & \cdots 0 \\
2 & 4 & \cdots 1 \\
2 & 2 & \cdots 0 \\
2 & 1 & \cdots 0 \\
 & 0 & \cdots 1
\end{array}
$$

$\therefore\quad 75 = 1001011_2$

$\because$

$$
\begin{array}{r}
.43 \\
\times 2 \\
\hline
0.86 \\
.86 \\
\times 2 \\
\hline
1.72 \\
.72 \\
\times 2 \\
\hline
1.44 \\
.44 \\
\times 2 \\
\hline
0.88 \\
.88 \\
\times 2 \\
\hline
1.76 \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

$\therefore\quad .43 = .01101\cdots_2$，

或者按照“零舍一入”的法则，得

$$.43 \approx .0111_2，$$

因此，$75.43 = 1001011.01101\cdots_2$