面向21世纪高职高专教材

ECONOMIC MATHEMATICS

经济数学

主编 蔡奎生 潘新 曹文斌

（第二册）

苏州大学出版社

面向21世纪高职高专教材

ECONOMIC MATHEMATICS

经济数学

主编 蔡奎生 潘新 曹文斌

（第二册）

苏州大学出版社

CONTENTS 目录

第一部分　线性代数

第8章　行列式

第9章　矩阵与线性方程组

*第10章　向量组的线性相关性

*第11章　向量内积与二次型

第二部分　概率论与数理统计

第12章　概率论基础知识

第13章　数理统计初步

第三部分　数学建模

*第14章　数学模型与建模

附　　表

第一部分　线性代数

线性代数是数学的一个分支，主要讨论有限维空间的线性理论. 线性问题广泛存在于现代科学技术的各个领域中，线性问题的处理方法是很多非线性问题处理方法的基础，因此线性代数的方法广泛地应用于各个学科，尤其在计算机使用日益普及的今天，其作用更显重要.

线性代数课程也是许多专业课的先修课程，特别是在建立数学模型与数值计算中起着十分重要的作用. 所以，学好线性代数，奠定一定的数学基础，对以后的学习无疑是十分重要的.

线性代数课程的主要内容包括：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、线性方程组、向量组的线性相关性等. 本书第八章至第十一章将逐一介绍这些内容.

第8章　行列式

§8-1　二阶与三阶行列式

在引入行列式的概念之前，我们先看一个例子.

求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1-2x_2=4, & ① \\ 2x_1+3x_2=13. & ② \end{cases}$$

解　根据消元法，我们有

①×3+②×2 得　$19x_1=38$，即 $x_1=2$；

①×2－②×5 得　$-19x_2=-57$，即 $x_2=3$.

上述求解过程我们在中学数学课程中已经学习过，我们可以归纳出对于一般二

元线性方程组的求解过程.

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2,以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘在上列两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

(2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得.其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1)的四个系数确定的,把这四个数按它们在方程组(1)中的位置,排成二行二列(横排称行、竖排称列)如下的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(3)所确定的**二阶行列式**,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(4)的元素.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆.参看图8-1,把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线,a_{21} 到 a_{12} 的虚连线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 8-1

利用二阶行列式的概念,(2)式中 x_1、x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么(2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式.

同样我们可以定义三阶行列式.

设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{6}$$

(6)式称为数表(5)所确定的**三阶行列式**.

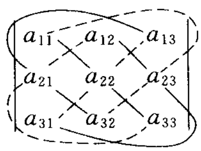

图 8-2

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 8-2 所示的对角线法则:图中有三条实线看作是平行于主对角线的连线,三条虚线看作是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

例 1　解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2=1, \\ 3x_1+7x_2=2. \end{cases}$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=14-15=-1\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=7-10=-3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1,$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-3}{-1}=3, x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{1}{-1}=-1.$

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned}D &=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4-1\times1\times4\\ &\quad -2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)\\ &=-4-6+32-4-8-24=-14.\end{aligned}$$

例 3 计算三阶三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有 $D=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$.

习题 8-1(A)

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 6 & -8\end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -5 & 6 & 3\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}8 & -1 & 0\\ 11 & 2 & 0\\ 6 & 4 & 0\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 2 & 3 & 5\\ 7 & 6 & 1\end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & 6 & 10\\ 9 & 7 & 1\end{vmatrix}$.

习题 8-1(B)

1. 解二元线性方程组：

(1) $\begin{cases}2x_1+6x_2=8,\\3x_1-4x_2=-1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}7x_1+4x_2=26,\\2x_1-5x_2=-11.\end{cases}$

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2 & 6 & 1\\1 & 1 & 1\\-5 & 2 & 3\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}8 & -1 & 4\\6 & 2 & 3\\3 & 4 & 1\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}a & b & c\\x & y & z\\a & b & c\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}x & y & z\\2x & 2y & 2z\\a & b & c\end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix}2 & y & x\\0 & 1 & z\\0 & 0 & 3\end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix}0 & -1 & 4\\6 & 0 & 3\\3 & 4 & 0\end{vmatrix}$.

§8-2　n 阶行列式

一、逆序数

考虑由前 n 个自然数组成的数字不重复的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，若有较大的数排在较小的数的前面，则称它们构成一个**逆序**，并称逆序的总数为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的**逆序数**，记作 $N(j_1j_2\cdots j_n)$.

容易知道，由 1,2 这两个数字组成的排列有 12,21，其逆序数分别为

$N(1\quad 2)=0,\quad N(2\quad 1)=1.$

由 1,2,3 这三个数字组成的全排列有 123,231,312,132,213,321. 它们的逆序数分别为

$N(1\quad 2\quad 3)=0,\quad N(2\quad 3\quad 1)=2,\quad N(3\quad 1\quad 2)=2,$

$N(3\quad 2\quad 1)=3,\quad N(2\quad 1\quad 3)=1,\quad N(1\quad 3\quad 2)=1.$

一般地，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

下面来看一下逆序数与三阶行列式的关系.

由定义知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1}$$

容易看出:

(Ⅰ)(1)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行、不同的列.因此,(1)式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(行标)排成标准次序 123,而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1,2,3 三个数的某个排列.这样的排列共有 6 种,对应(1)式右端共含 6 项.

(Ⅱ)各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是:123,231,312;

带负号的三项列标排列是:132,213,321.

经计算可知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列.因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$,其中 t 为列标排列的逆序数.

因此,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}, \tag{2}$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,$t=N(p_1p_2p_3)$,$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

二、n 阶行列式的定义

仿照三阶行列式,可以把行列式推广到一般情形.

定义 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{3}$$

的项,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数.由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(3)式的项共有 $n!$ 项.所有这 $n!$ 项的代

数和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 **n 阶行列式**，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\det(a_{ij}),$$

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $t=N(p_1p_2\cdots p_n)$，数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式 D 的**元素**.

有时也用 D_n 表示 n 阶行列式.

注意　在 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中连加号 $\sum$ 后面共有 $n!$ 项，每一项后面 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中共有行列式 D 的 n 个元素相乘，这 n 个元素在行列式 D 中每行有且只有一个，同时每列有且只有一个.

按此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆.

现在我们有了 n 阶行列式的定义，自然就要想到它的计算问题. 注意到 n 阶行列式是由排成 n 行 n 列的数表中位于不同行不同列的元素的乘积作为一项的所有项的代数和，因此对角线法只适用于二阶和三阶行列式的计算，而不适用于四阶以上的行列式. 为了得出一般行列式的计算方法，我们需要研究行列式的性质，这是下一节的内容. 现在先看下面特殊的行列式.

例 1　证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证法 1　由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i}，其下标应有 $p_i\leqslant i$，即

$$p_1\leqslant 1,p_2\leqslant 2,\cdots,p_n\leqslant n.$$

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$,所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$,所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证法 2 D 中可能不为 0 的项由 n 个元素相乘,这 n 个元素在行列式 D 中每行有且只有一个,同时每列有且只有一个. 故第一行只能取第一个元素 a_{11};则第二行的第一个元素不能再取,只能取第二个元素 a_{22};……;依次类推第 n 行只能取元素 a_{nn}. 所以

$$D=(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中逆序数 $t=N(12\cdots n)=0$. 所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对上三角形行列式,也有类似结果.

例 2 计算对角行列式 D 的值:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 对角行列式 D 是下三角形行列式的特殊情形,所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3 计算第 k 行各元素均为 0 的行列式 D 的值:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\text{其中 } a_{kj}=0 \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

解

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots 0\cdots a_{np_n}=\sum 0=0.$$

习题 8-2

1. 求下列各排列的逆序数：

(1) $N(2\quad 1)$； (2) $N(2\quad 3\quad 1)$；

(3) $N(4\quad 2\quad 1\quad 3)$； (4) $N(5\quad 2\quad 1\quad 4\quad 3)$.

2. 在五阶行列式 D 中，下列各项前面应取什么符号？

(1) $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$； (2) $a_{55}a_{22}a_{33}a_{44}a_{11}$.

3. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & \cdots & 5 \\ 0 & -1 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$，

(3) $\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

§8-3 行列式的性质

一、对换

为了研究 n 阶行列式的性质，先介绍对换以及它与排列的奇偶性的关系.

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续称为**对换**. 将相邻两个元素对换，称为**相邻对换**.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明从略.

例如 $N(3\quad 1\quad 2)=2$，$N(3\quad 2\quad 1)=3$；而 $N(2\quad 3\quad 1\quad 4)=2$，$N(1\quad 3\quad 2\quad 4)=1$.

由定理 1 可得到下面的定理：

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，即 $t=N(p_1p_2\cdots p_n)$.

证明从略.

二、行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记行列式 D 的转置行列式为

$$D^{T}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D^{T}=\sum(-1)^{t}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},\ t=N(p_1p_2\cdots p_n),$$

而由定理 2，有

$$D=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},\ t=N(p_1p_2\cdots p_n),$$

故 $$D^{T}=D.$$

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式变号.

证 只证明互换行列式的两行的情形，互换行列式的两列的情形请读者自己完成.

设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 D 变换 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$. 于是

$$D_1=\sum(-1)^{t}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots b_{np_n}$$
$$= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n},$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列，$t = N(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)$. 设 $t_1 = N(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)$，则$(-1)^t = -(-1)^{t_1}$，故

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum -(-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \\ &= -\sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

下面以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列. 交换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证　把这两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

例 1　计算：$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解　$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

例 2　已知 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=1$，求 a 的值.

解　$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_4} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_3} (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6a.$$