普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

线性代数学习指导与典型例题

郝志峰 著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

线性代数
学习指导与典型例题

郝志峰 著

高等教育出版社

内容提要

郝志峰等编著的《线性代数》(第二版)是普通高等教育"十五"国家级规划教材,是大学本科(非数学)各专业线性代数课程的教材。本学习指导书是紧密配合此教材而编写的,内容与教材同步,包括线性代数方程组、矩阵、行列式、矩阵的秩和线性代数方程组的解、向量空间初步、矩阵特征值问题等共6章。全书每一章分三个部分:学习疑难与解答、解题方法与研究、习题提示与答案(习题均来源于教材)。本书取材的深广度合适,注重指导读者的学习,内容叙述通俗易懂,解题方法归纳系统,符合初学者的思维规律,有利于读者掌握知识、开拓思维与提高能力。因此本书也可供广大学生学习、复习线性代数使用,对于从事线性代数教学的教师亦有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与典型例题/郝志峰著. —北京:高等教育出版社,2006.9

ISBN 7-04-020055-4

Ⅰ.线... Ⅱ.郝... Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第095667号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 丁鹤龄 **封面设计** 张楠 **责任绘图** 黄建英
版式设计 张岚 **责任校对** 俞声佳 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京人卫印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　本	787×960 1/16	**版　次**	2006年9月第1版
印　张	14	**印　次**	2006年9月第1次印刷
字　数	250 000	**定　价**	15.10元

物料号 20055-00

前　言

在科学技术飞速发展的今天,人们越来越意识到“线性代数”的重要。“线性代数”不仅在各领域中有着广泛的应用,而且在培养具备创造性思维的人才中具有不可替代的作用,因此“线性代数”在大学本科教学中占有一定的地位。为此,郝志峰等人编写了《线性代数》(第二版)(该书作为普通高等教育“十五”国家级规划教材),该教材以教育部数学与统计学课程指导委员会制定的线性代数基本要求为编写依据,符合课程的需要,改变了传统线性代数抽象难懂的公众形象;以学生为本,将线性代数作为应用数学的基础来编写,同时力求与横向的数学必修课高等数学(的微分方程部分)、概率统计建立一些结合点,联合起来构筑好大部分学生的数学基础,为大学本科(工科类、经济类)各专业的“线性代数”课程提供一本更加合适的教材。该教材将从线性代数方程组的解与初步的应用入手,自然过渡到讨论矩阵代数,并在必要时介绍行列式,到了较抽象的向量理论及向量空间时,随时注意回到线性代数方程组中去解释。在展开教学内容时,时刻注意培养学生的思维能力、运算能力并调动其学习兴趣及主动性。

为了指导读者的学习,特编写了与教材相配套的《线性代数学习指导与典型例题》,本学习指导书与典型例题具有如下的特色:

一是可读性。全书力求做到与教材紧密相连,内容丰富,有学习疑难与解答、解题方法与研究、习题提示与答案等。通过该书的学习,不仅可以巩固所学的知识,而且从中可以学到更多的解题方法与技巧,有利于启迪与活跃思维,提高各种能力。

二是针对性。书中学习疑难与解答部分是针对读者遇到的问题加以解答的,有助于加深对所学的概念、理论的理解与消化,澄清一些模糊认识,巩固并掌握好所学的知识。解题方法与研究部分,将解题方法加以分类、归纳与引申,书中所有例题都是经过精心挑选的,方法归纳较为全面,有助于提高读者的综合解题等能力。习题提示与答案部分中练习与习题的题目全部来源于教材,通过提示与答案,不仅知道题目的解题过程与步骤,而且有利于启发读者的思维,开拓学习的视野。

三是适用性。此书适合在校本科生学习,并适合其他人员学习“线性代数”这门课程的需要,因为全书内容的展开思路比较清晰,文字的叙述比较通俗易懂,书中以较多的示例来解释所学的概念与理论,使得学习起来不觉得枯燥,感到更为亲切、更为适用。

本书是编著者根据长期执教该课程的经验与体会编写而成的，该书的编写得到了普通高等教育“十五”国家级规划教材课题和全国教育科学“十五”规划教育部重点课题：高水平大学数学教育特点的研究与实践项目的支持；同时还得到广东省哲学社会科学“十五”课题：推进和建构广东省高水平大学数学教育的研究，以及全国高等学校教学研究会研究课题：国家教学基地优秀教学成果的总结与推广等项目的支持，同时也融合了国家自然科学基金、教育部霍英东青年教师基金、教育部优秀青年教师基金、广东省自然科学基金的研究成果于其中。

最后，编著者要对在编写的过程中，各方面的大力支持表示衷心的感谢，尤其是教材编写合作者谢国瑞教授、汪国强教授的意见和建议。而且高等教育出版社的李艳馥、于丽娜、丁鹤龄等同志对本书的出版做了大量的工作并提出了宝贵的建议，使本书得以顺利出版，也在此深表感谢。尽管编著者有力求把书写好的愿望，但由于水平所限，所以书中难免有不妥之处，敬请同行赐教，欢迎批评指正。

编著者
于广州大学城
2005 年 10 月

目　　录

第一章　线性代数方程组

一、学习疑难与解答

问题 1　什么叫做线性代数方程组？怎样验证方程组的解？

答　将未知数个数相等的多个线性代数方程看成一个整体，称为线性代数方程组. 若一个方程组含有 m 个方程、n 个未知数，常简称为 $m \times n$ 方程组. $m \times n$ 方程组的解应是 n 维数组，将解数组各个分量依序代入未知数时能使 m 个方程全都成为等式.

问题 2　线性方程组的等价变形有哪几类？这几类等价变形采用怎样的记号？

答　线性方程组等价变形有三类：

(1) 变换组内任两个方程的次序(或编号)，记号 r_{ij} 表示变换组内第 i 个方程与第 j 个方程的次序；

(2) 任一个方程乘一非零常数，记号 $r_i(k)$ 表示第 i 个方程乘一个非零常数 k；

(3) 任一方程经数量倍(即在方程两端乘同一个常数)后加到另一个方程去，记号 $r_{ij}(k)$ 表示第 i 个方程乘常数 $k(\neq 0)$ 后加到第 j 个方程去.

问题 3　记号“$r_{ij}(k)$”表示什么意思？记号“$r_{ij}(k)$”与“$r_{ji}(k)$”是一回事吗？

答　记号“$r_{ij}(k)$”表示什么意思在问题 2 中已作了回答. 记号“$r_{ij}(k)$”与“$r_{ji}(k)$”不是一回事，记号“$r_{ji}(k)$”表示第 j 个方程乘以常数 $k(\neq 0)$ 后加到第 i 个方程去，初学者往往会将这两个记号混淆.

问题 4　求解线性方程组的等价变形法的思想方法怎样？

答　求解线性代数方程组的等价变形法的思想方法是：通过对方程组作三类等价变形(或称为同解变形)使各个方程变成分别只含一个变量，并能求出其值，从而得到整个方程组的解，其解是由数组表示的.

问题 5　求解线性方程组的高斯－若尔当消元法(即 G－J 消元法)的思想方法与步骤是怎样的？

答　求解线性方程组的 G－J 消元法的思想方法与步骤是：第一步，通过三类等价变形的运算，将第一个方程中第一个未知数的系数变成 1，将其他方程中第一个未知数的系数变成 0；第二步，将第二个方程中第二个未知数的系数变成 1，将其他方程中第二个未知数的系数变成 0；第三步，如此继续下去. 为了简化

其书写过程,用列表的形式凸现其系数的变化过程.

问题 6　在 G－J 消元法过程中什么叫做选主元,选主元的目的是什么?

答　在上述问题 5 中每一步所做的工作就是选主元,人们把第 i 个方程第 i 个未知数的系数所在位置称为主元位置($i=1,2,\cdots,n$). 选主元的目的是为了便于运算的进行,以及提高运算的精度等. 为了使运算简化,可用三类等价变形去选主元.

问题 7　$m\times n$ 线性方程组的解有哪几种情况? 什么叫相容方程组?

答　$m\times n$ 线性方程组的解有三种情况:有唯一解;有无穷多个解;无解. 三者必居其一. 对有解(含有唯一解、有无穷多个解)的方程组称为相容的方程组,而称无解的方程组为不相容方程组或矛盾方程组.

问题 8　$m\times n$ 线性方程组若有解,其解是唯一的吗?

答　$m\times n$ 线性方程组若有解,不一定是唯一的,可能有无穷多个解. 对于无穷多个解,其解的形式也不是唯一的,可能有多种表达的形式(见下面解题方法与研究中用等价变形法求解线性方程组如例 2).

问题 9　2×2 线性方程组其解有怎样的几何解释?

答　在平面直角坐标系中,二元线性方程的图像(即坐标能满足方程的点集)是一条直线. 在平面直角坐标系中,2×2 线性方程组就看成是平面上两条直线. 若 2×2 线性方程组有唯一解,表示这两条直线相交于一点;若 2×2 线性方程组有无穷多个解,表示这两条直线重合;若 2×2 线性方程组无解,表示这两条直线平行.

二、解题方法与研究

1. 求解线性方程组的方法

1）等价变形法

此法就是利用等价变形去求解线性方程组.

例 1　用等价变形法求解线性方程组

$$\begin{cases}2x+3y=5, & ①\\ 3x+5y=8. & ②\end{cases}$$

解　作第三类等价变形,将方程①施以$\left(-\dfrac{3}{2}\right)$倍后加到方程②上去,得

$$\begin{cases}2x+3y=5, & ①\\ y=1. & ③\end{cases}$$

再作第三类等价变形,将方程③施以(-3)倍后加到方程①上去,得

$$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$$

例 2 用等价变形法求解线性方程组

$$\begin{cases}2x+3y=5, & ①\\4x+6y=10. & ②\end{cases}$$

解 作第三类等价变形,将方程①施以(-2)倍后加到方程②上去,得

$$\begin{cases}2x+3y=5,\\0=0.\end{cases}$$

这时方程有无穷多个解,其解为

$$\begin{cases}x=k_1,\\y=-\dfrac{2}{3}k_1+\dfrac{5}{3}\end{cases}(k_1\text{为任意实数}),$$

或

$$\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}k_2+\dfrac{5}{2},\\y=k_2\end{cases}(k_2\text{为任意实数}).$$

例 3 用等价变形法求解方程组

$$\begin{cases}2x+3y=5, & ①\\6x+9y=9. & ②\end{cases}$$

解 作第三类等价变形,将方程①施以(-3)倍后加到方程②上去,得

$$\begin{cases}2x+3y=5,\\0=-6.\end{cases}$$

这时方程组无解.

2)高斯-若尔当消元法(即 G-J 消元法)

例 1 用 G-J 消元法求解线性方程组

$$\begin{cases}x+y+z=6,\\2x+4y-3z=1,\\5x-6y+2z=-1.\end{cases}$$

解 为了书写简洁明白,列表计算如下:

x	y	z		
1	1	1	6	$r_{12}(-2)$
2	4	-3	1	$r_{13}(-5)$
5	-6	2	-1	
1	1	1	6	
0	2	-5	-11	$r_2\left(\frac{1}{2}\right)$
0	-11	-3	-31	
1	1	1	6	
0	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$r_{21}(-1)$ $r_{23}(11)$
0	-11	-3	-31	
1	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{23}{2}$	
0	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$r_3\left(-\frac{2}{61}\right)$
0	0	$-\frac{61}{2}$	$-\frac{183}{2}$	
1	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{23}{2}$	$r_{31}\left(-\frac{7}{2}\right)$
0	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$r_{32}\left(\frac{5}{2}\right)$
0	0	1	3	
1	0	0	1	
0	1	0	2	
0	0	1	3	

故方程组有唯一解，其解为$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases}$

例 2　用 G－J 消元法求解线性方程组

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x+4y-3z=1, \\ 20x-2y+75z=241. \end{cases}$$

解 为了书写简洁明白，列表计算如下：

$$
\begin{array}{ccc:c|l}
x & y & z & & \\
1 & 1 & 1 & 6 & r_{12}(-2) \\
2 & 4 & -3 & 1 & r_{13}(-20) \\
20 & -2 & 75 & 241 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 6 & \\
0 & 2 & -5 & -11 & r_2\left(\frac{1}{2}\right) \\
0 & -22 & 55 & 121 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 6 & \\
0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & r_{21}(-1) \\
 & & & & r_{23}(22) \\
0 & -22 & 55 & 121 & \\
\hline
1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{23}{2} & \\
0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

这时方程组有无穷多个解，原方程组等价于方程组

$$
\begin{cases}
x+\frac{7}{2}z=\frac{23}{2}, \\
y-\frac{5}{2}z=-\frac{11}{2}.
\end{cases}
$$

即解为

$$
\begin{cases}
x=-\frac{7}{2}k+\frac{23}{2}, \\
y=\frac{5}{2}k-\frac{11}{2}, \\
z=k
\end{cases}
\quad (k\text{ 为任意实数}).
$$

例 3 用 G－J 消元法求解线性方程组

$$
\begin{cases}
x+y+z=6, \\
2x+4y-3z=1, \\
20x-2y+75z=240.
\end{cases}
$$

解 为了书写简洁明白，列表计算如下：

x	y	z		
1	1	1	6	$r_{12}(-2)$
2	4	-3	1	$r_{13}(-20)$
20	-2	75	240	
1	1	1	6	
0	2	-5	-11	$r_2\left(\frac{1}{2}\right)$
0	-22	55	120	
1	1	1	6	
0	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$r_{21}(-1)$ $r_{23}(22)$
0	-22	55	120	
1	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{23}{2}$	
0	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{2}$	
0	0	0	-1	

这时方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x+\dfrac{7}{2}z=\dfrac{23}{2}, \\ y-\dfrac{5}{2}z=-\dfrac{11}{2}, \\ 0=-1. \end{cases}$$

方程组为无解.

2. 证明题所采用的方法

因篇幅关系,本章没有什么证明题. 这里介绍一些常用的证题方法,以供下面几章加以应用.

在数学中常用的证题方法有十一种:

1) 综合法

此法就是根据所给条件,利用已有的定义、性质、定理、公式、等式、不等式等经过演绎、推理推出所需的结论,这种由因导果的思维方法叫综合法,也叫演绎法. 引证法(利用一些结论去证)是其中常用的一种.

2) 分析法

此法就是从所需论证的结论出发,利用定义、定理、性质等,由后向前一步一步地进行分析,步步紧扣已知条件,最后得到证明,这种由果索因的思维方法叫

分析法,也叫倒推法.逆证法是其中常用的一种.

3) 构造法

为了得到论证的结果,要先造一个函数、一个算式、一个图形,甚至要造一个辅助命题等才能完成.这种证题方法也叫辅助法,相应地就叫辅助函数法、辅助算式法、辅助图形法、辅助命题法等.

4) 计算性证题法

此法就是通过计算使命题得证的方法.为了证明一个等式成立可走下面几条途径:

① 计算左边是否等于右边;

② 计算右边是否等于左边;

③ 计算左、右两边是否等于第三者;

④ 计算左边(或右边)中部分项;

⑤ 其他.

为了证明,在计算法中还采用一些方法,如换元法、等式变形法等.

5) 缩放法

为了论证一些结果,要将有关等式(或不等式)加以缩放,使命题得以证明.

6) 比较法

为了论证某些结果,常常需比较量的大小,如:

① 欲证一个量为 A,可证该量 $\leqslant A$,又 $\geqslant A$;

② 欲证 $A=B$,可证 $A-B=0$,$\frac{A}{B}=1$;

③ 欲证这个结论有 n 个结果,可先证至少有 n 个,再证至多有 n 个等.

7) 归纳法

数学归纳法是数学中常用的一种证题方法,它适用于一个与自然数有关的命题.

① 当推理关系与紧邻两个自然数有关时,采用第一类归纳法,其步骤为:第一步,当 n 为第一个值 n_0(如取 $n_0=1$、$n_0=2$、…)时结论成立;第二步,假设当 $n=k(k\in\mathbf{N},k\geqslant n_0)$ 时结论成立;第三步,证明当 $n=k+1$ 时结论成立.

② 当推理关系与紧邻三个自然数(或更多自然数)有关时,采用第二类归纳法,其步骤为:第一步,当 n 为第一个值 n_0(如取 $n_0=1$、$n_0=2$)时结论成立;第二步,假设当 $n\leqslant k(k\in\mathbf{N},k\geqslant n_0)$ 时的一切自然数时结论成立;第三步,证明当 $n=k+1$ 时结论成立.

8) 递推法

此法的思路是:先推出递推公式,然后再推出其结果.此法与归纳法比较相近,它与归纳法的区别在于要找出其递推公式.

9）反证法

此法的思路是：原来要证明由前提 S 推出命题 R（结论），人们把非 R（所证结论之否定）也作为前提，在前提 S 与非 R 下，根据逻辑推理进行推证，从中引出矛盾. 这个方法在证明唯一性时常常被用到.

10）反例法

此法就是举出反例去证明一些论断是不成立的. 举反例是数学中极为重要的手段之一，与其他方法一样要很好地掌握它. 举反例有时也不是一件容易的事，因此不能忽视此法的作用.

11）穷举法

此法的思路是：欲证命题 $A \Rightarrow B$ 成立，设 A 可分为若干特款 A_1、A_2、…、A_n，如能证明对每一个 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均有 $A_i \Rightarrow B$，则 $A \Rightarrow B$ 为真.

还有其他一些方法，就不一一赘述了.

3. 单项选择题所采用的方法

在单项选择题中一般是采用如下两个方法（下面几章亦适用）：

1）直接肯定法

此法就是在几个命题中肯定其中一个是符合题目要求的（如肯定其中一个是正确的），就直接选择这一个.

2）间接否定法

此法也叫筛选法、排除法，它是将几个命题筛选一遍，在几个命题中否定（或排除）一些不符合题目要求的，而保留其中一个符合题目要求的，因此就选择符合题目要求的那一个.

有的可将上述两个方法综合地加以应用.

例 1　若 $\begin{cases} x^2+y=1, \\ x-y=2. \end{cases}$ 则（　　）.

（a）是线性方程组；　（b）不是线性方程组；

（c）是否为线性方程组不能确定；　（d）以上结论都不对.

解　选（b），因为线性方程组要求每个方程都是线性方程，所谓线性方程是指关于未知数均为一次方的方程，这里第一个方程中有关于 x 是二次方的，所以此方程组不是线性方程组.

例 2　若 $r_{12}(3)$，则（　　）.

（a）表示第一个方程施以 3 倍后加到第二个方程去；

（b）表示第二个方程施以 3 倍后加到第一个方程去；

（c）表示第三个方程施以 2 倍后加到第一个方程去；

（d）以上结论都不对.

解 选(a),因为这是记号的规定.

例3 线性方程组若有解,其解( )

(a) 是唯一的; (b) 不一定是唯一的;

(c) 肯定有无穷多个解; (d) 以上结论都不对.

解 选(b),因为方程组有解,有的解是唯一的,有的解不是唯一的,可能有无穷多个解.

例4 线性方程组的解有( )种情况.

(a) 一; (b) 二; (c) 三; (d) 四.

解 选(c),线性方程组的解有三种情况:有唯一解、有无穷多个解、无解,三者必居其一.

例5 线性方程组的等价变形有( )类.

(a) 一; (b) 二; (c) 三; (d) 四.

解 选(c),详见上面"学习疑难与解答"中的问题2.

例6 求解线性方程组的等价变形法的思想是:通过对方程组作等价变形,使各个方程变成分别含( )个变量,并能求出其值,从而得到整个方程组的解.

(a) 一; (b) 二; (c) 三; (d) 四.

解 选(a),详见上面"学习疑难与解答"中的问题4.

例7 求解线性方程组的高斯－若尔当消元法(即G－J消元法)的步骤是:第i步,将第i个方程的第i个未知数系数变成( ),其他方程的第i个未知数系数变成0.

(a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4.

解 选(a),详见上面"学习疑难与解答"中的问题5.

例8 2×2线性方程组( ).

(a) 在空间直角坐标系中表示两个平面的相对位置关系;

(b) 在平面直角坐标系中表示两条直线的相对位置关系;

(c) 在直线上表示两个点的相对位置关系;

(d) 在平面直角坐标系中表示两条直线相交.

解 选(b),详见上面"学习疑难与解答"中的问题9.

4. 线性方程组的应用

线性方程组的应用有很多方面,凡是有关线性问题的地方就常常用到它,而对于非线性问题,人们还设法将其线性化,即把非线性问题转化为线性问题.在本章中介绍了有关应用,如"费用分摊问题"、"联合收入问题"、"交通流量问题"等.下面还将看到它有着广泛的应用,如用于由特征值求所对应的特征向量等.在

专业方面,不同的专业有着不同的应用.这里再举一例说明其应用的广泛性.

例　一百只鸡吃一百把米,小鸡三只吃一把,母鸡每只吃三把,公鸡每只吃七把,求小鸡、母鸡、公鸡的只数.

解　设小鸡、母鸡、公鸡的只数分别为 x、y、z,问题化为求下列线性代数方程组的正整数解:

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ \dfrac{x}{3}+3y+7z=100. \end{cases}$$

列表计算如下:

x	y	z		
1	1	1	100	$r_{12}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$
$\dfrac{1}{3}$	3	7	100	
1	1	1	100	$r_2\left(\dfrac{3}{8}\right)$
0	$\dfrac{8}{3}$	$\dfrac{20}{3}$	$\dfrac{200}{3}$	
1	1	1	100	$r_{21}(-1)$
0	1	$\dfrac{5}{2}$	25	
1	0	$-\dfrac{3}{2}$	75	
0	1	$\dfrac{5}{2}$	25	

方程组等价于

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}z+75, \\ y=-\dfrac{5}{2}z+25, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}k+75, \\ y=-\dfrac{5}{2}k+25, \\ z=k. \end{cases}$$

由 $y>0$,得 $-\dfrac{5}{2}k+25>0 \Rightarrow k<10$.

又由 x、y、z 为正整数解,故 k 取 2、4、6、8,这时解为:

$$\begin{cases}x=78,\\y=20,\\z=2;\end{cases}\begin{cases}x=81,\\y=15,\\z=4;\end{cases}\begin{cases}x=84,\\y=10,\\z=6;\end{cases}\begin{cases}x=87,\\y=5,\\z=8.\end{cases}$$

三、习题提示与答案

练　　习

1. 解下列方程组,并给出几何解释:

(1) $\begin{cases}x+y=9,\\x-y=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+3y=13,\\5x-2y=4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x-y=2,\\-6x+2y=1;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2x+3y=4,\\-4x-6y=-8.\end{cases}$

解　用等价变形法去求解,详细过程见前面“解题方法与研究”,这里从略.

(1) 解为 $x=5$、$y=4$,在平面直角坐标系中,它表示了一对相交直线有唯一的公共点.

(2) 解为 $x=2$、$y=3$,几何解释同(1).

(3) 方程组无解,在平面直角坐标系中它表示了一对平行直线无有限公共点.

(4) 方程组有无穷多个解,其解为 $x=k$、$y=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}k$(其中 k 为任意实数),在平面直角坐标系中表示了一对重合直线,直线上每一点都是公共点.

2. 用 G-J 消元法解下列方程组:

(1) $\begin{cases}x+3y+2z=-1,\\2x+3y+3z=-2,\\-2x+2y-3z=7;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2s+t-u=2,\\3s-2t+u=7,\\s-3t-2u=-7;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+y+2z=10,\\4x+4y+7z=33,\\2x+5y+12z=48;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}y+z+w=0,\\3x+3z-4w=7,\\x+y+z+2w=6,\\2x+3y+z+3w=6.\end{cases}$

解　下面以第(4)题为例给出解题过程,其他三题仅给出答案.

(1) 解为 $x=2$、$y=1$、$z=-3$.

(2) 解为 $s=2$、$t=1$、$u=3$.

(3) 解为 $x=1$、$y=2$、$z=3$.

(4) 列表计算如下: