与人教版义务教育课程标准实验教科书同步

鼎尖 鼎尖教研中心最新研究成果

课时详解随堂通

SUITANGTONG

KESHI XIANGJIE

全面记录课堂笔记

数学

九年级（上）

一书在手家教可免

人民教育出版社
延边教育出版社

前言

FOREWORD

“沉浸在题海，学习成绩却提升不快”，什么原因？专家和老师们都指出：听课效率很关键！如何提高课堂45分钟的学习效率？万一上课没能抓住老师的讲解点，课后如何弥补？

《课时详解 随堂通》的出现，解决了这些难题。这套丛书具有以下突出特点：

一、国内首创　填补空白

长期以来，我国各类教辅都是供学生课后复习使用，但由于学习基础、学习习惯、对各学科的兴趣和爱好的差异，不同学生的课堂听课效率也有差异，使得每节课留下一个个疑难点，最终导致不同学生的学习成绩的差异。本丛书是我国第一套**与每课时教学内容严格同步**的全方位配套的全程学法指导丛书，帮助学生及时解决每课时的疑难点，将近几年来中考考查能力的变化趋势与每课时的知识点、培养学生综合能力的教学要求链接起来，填补国内教辅市场长期的空白。

二、贴切课堂　贴切学生

丛书生动呈现课堂45分钟师生合作探究的内容，传授最有效的科学思维方法和学习方法，帮学生跨越学习障碍，方便学生带进课堂听课、回答问题、自学思考、归纳总结、检查课后作业、自测自评，为满足学生在不同学习阶段的需要，还设计了**拓广习题课、专题综合课、辅导答疑课、中考链接课**等内容，全程引导学生在每课时内取得最大的学习效益。即使学生因特殊原因未听课，使用此书自学，也可及时弥补听课缺陷。

三、贴切教材　贴切中考

丛书汇集了全国首批国家级实验区骨干教师，其“自主性”“实践性”“探究性”“趣味性”的新课堂教学模式最贴近新课标理

念，内容最新颖。**探索新知课**生动呈现45分钟课堂上教师对教材中的重点、难点、疑点进行的逐词、逐句、逐段透彻解读；精编的例题对每一个知识点、易错点、易忽略点、易混淆点、疑似点进行一对一剖析——点点对应例题，题题揭示规律。**拓广习题课**透彻评析各种题型及其同类变式的解题方法、规律和误区。**专题综合课**分析章节内知识的内在联系和内在结构；**辅导答疑课**回顾章节学习难点，名师辅导，答疑解惑。**中考链接课**则从近年来的命题规律、未来可能的命题方向入手，透彻剖析各地方命题和国家教育部考试中心的热点中考题型。

四、世纪品牌　适用全面

丛书对教材和《课程标准》研究透彻，对各年级学生的认知水平和储备的学科知识研究透彻，对每课时的教学要求和训练习题的难易度研究透彻，在体例设置、内容编排、思维能力训练等方面都充分考虑学生的实际情况，由浅入深，循序渐进，向课时要效益，"亮点"突出，一跃成为21世纪全国教辅品牌。丛书**方便教师备课和上课，方便学生听课和自学，方便家长督促子女自学教材并检查子女的学习效果。**

按课时编写辅导丛书是新时期新的课题，本丛书尽管经过国内著名的教材专家、课程标准研究专家、考试改革研究专家、新课标国家级实验区骨干教师的编写或审定，仍需不断完善，恳请专家和读者指正。

丛书主编：周益新

目录

（加“*”的课时为在教学中充分考虑提升不同群体学生学习成绩增加的课时）

第二十一章　二次根式

第二十二章　一元二次方程

目录

第二十三章　旋　转

第二十四章　圆

目录

目录

第二十一章　二次根式

21.1　二次根式(1课时)

探究新知

问题研讨①

问题：用带有根号的式子填空：

(1)一个长方形的长为5 cm，宽为3 cm，则它的对角线长________ cm；

(2)要建一个面积为9.42 m^2 的圆形花坛，它的半径为________ m；(π 取3.14)

(3)一个物体从高处自由落下，物体落下时的高度 h(米)与下落时间 t(秒)的关系式为 $h=4.9t^2$，如果用含有 h 的式子表示 t，则 $t=$________.

探讨：表示上述各问题中的结果的式子有什么特点？这样的式子必须满足什么条件？

归纳：上述各问题的结果式子都表示一些正数的算术平方根，即形如$\sqrt{a}$的式子．由于负数没有平方根，所以，$\sqrt{a}$中 a 必须满足 $a\geqslant 0$.

知识归纳　二次根式的定义

形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式，“$\sqrt{\ }$”称为二次根号.

详解　(1)二次根式定义的$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个整体，表示非负数 a 的算术平方根，因此在实际问题中，一旦出现了$\sqrt{a}$，就意味着 $a\geqslant 0$，且$\sqrt{a}\geqslant 0$，我们形象地称$\sqrt{a}$是“一个帽子，两个非负数”.

(2)被开方数 a 可以是具体的数，也可以是单项式、多项式的代数式，如$\sqrt{2}$，$\sqrt{64}$，$\sqrt{x^2+2x+1}$，$\sqrt{x-3}(x\geqslant 3)$等都是二次根式，而$\sqrt{-2}$，$\sqrt{-(x^2+1)}$就不是二次根式.

方法规律

求使代数式有意义的字母取值范围，对于单个的二次根式只需满足被开方数为非负数，对于多个二次根式的，则是多个被开方数同时为非负数，对于含有分母的，则还须考虑分母不能为零.

例1 求下列各式有意义的条件.

(1) $\sqrt{x+5}$；(2) $\sqrt{-2x-4}$；

(3)$\sqrt{\dfrac{1}{3x-2}}$；(4)$\dfrac{\sqrt{2x}}{x-1}$.

分析　二次根式有意义的条件是被开方数是非负数，同时分式中分母不能为零.

解答　(1)由 $x+5\geqslant 0$，得 $x\geqslant -5$. 所以，当

$x\geqslant-5$时，$\sqrt{x+5}$有意义；

(2)由$-2x-4\geqslant0$，得$x\leqslant-2$. 所以，当$x\leqslant-2$时，$\sqrt{-2x-4}$有意义；

(3)由$\frac{1}{3x-2}\geqslant0$，且$3x-2\neq0$得$x>\frac{2}{3}$. 所以，当$x>\frac{2}{3}$时，$\sqrt{\frac{1}{3x-2}}$有意义；

(4)由$2x\geqslant0$，且$x-1\neq0$，得$x\geqslant0$且$x\neq1$. 所以，当$x\geqslant0$且$x\neq1$时，式子$\frac{\sqrt{2x}}{x-1}$有意义.

同类变式1 若$a=\sqrt{b-5}+\sqrt{5-b}+2$，求$a+b$的平方根.

分析 由二次根式的意义知$b-5\geqslant0$，则$5-b\geqslant0$.

解答 $\because\sqrt{b-5}$和$\sqrt{5-b}$都是二次根式，

$\therefore b-5\geqslant0$ ①且$5-b\geqslant0$ ②

由①得$b\geqslant5$，由②得$b\leqslant5$，$\therefore b=5$，$\therefore a=2$.

故$a+b$的平方根是$\pm\sqrt{7}$.

提 醒

切记：不能认为$b\geqslant5$，$b\leqslant5$时，不等式组无解.

同类变式2 当x为何值时，$\sqrt{9x+1}+3$的值最小？最小值是多少？

分析 由于$\sqrt{a}(a\geqslant0)$是一非负数，它的最小值为0，所以当$\sqrt{9x+1}$中$9x+1=0$时，式子的值最小.

解答 $\because\sqrt{9x+1}\geqslant0$， $\therefore$当$9x+1=0$，即$x=-\frac{1}{9}$时式子$\sqrt{9x+1}+3$的值最小，最小值是3.

同类变式3 若$|a-b+1|$与$\sqrt{a+2b+4}$互为相反数，则$(a+b)^{2\,006}=$________.

分析 因为$|a-b+1|$与$\sqrt{a+2b+4}$互为相反数，即$|a-b+1|+\sqrt{a+2b+4}=0$，又$|a-b+1|$和$\sqrt{a+2b+4}$都是非负数，所以由非负数性质可知$\begin{cases}a-b+1=0,\\a+2b+4=0.\end{cases}$ 解得$a=-2$，$b=-1$.

故$(a+b)^{2\,006}=(-3)^{2\,006}=3^{2\,006}$

答案 $3^{2\,006}$

方法技巧

在出现二次根式时，要注意式子的隐含条件即被开方数的非负性、值的非负性的发现.

问题研讨②

问题：我们已经学习了平方根和算术平方根的意义，$\sqrt{6}$表示________，则$(\sqrt{6})^2=$________. 类比得到$(\sqrt{3})^2=$________；$\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2=$________；$(\sqrt{0})^2=$________.

探讨：根据上述问题，你发现了什么？

归纳：由算术平方根的定义可知$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$.

知识归纳　二次根式的性质

$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant0)$.

详解　公式$(\sqrt{a})^2=a$的作用主要是非负数与平方数的互相转化，正用公式可化简形如$(\sqrt{a})^2$的二次根式，其结果等于a；逆用公式可把一个非负数写成一个平方数的形式.

例2 计算下列各式：

(1)$\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2$；(2)$(8\sqrt{5})^2$；(3)$\left(-2\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2$；(4)$(\sqrt{3a+4})^2$

警示误区

本题的易错点是(2)、(3)小题中的8和-2不平方，写成$(8\sqrt{5})^2=8\times5$.

分析　根据$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$和公式$(ab)^2=a^2b^2$直接求值.

解答　(1)$\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2=\frac{2}{7}$；(2)$(8\sqrt{5})^2=8^2\cdot(\sqrt{5})^2=64\times5=320$；

(3)$\left(-2\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2=(-2)^2\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2=4\times\frac{5}{6}=\frac{10}{3}$；(4)$(\sqrt{3a+4})^2=3a+4$

例3 把下列各式写成平方差的形式，再分解因式：

(1)x^2-64；(2)x^2-13；(3)$4a^2-37$.

方法技巧

任何一个非负数都可以写成一个非负数的平方的形式.

分析　当$a\geqslant0$时，$(\sqrt{a})^2=a$的逆向应用是解本题的依据.

解答　(1)$x^2-64=x^2-8^2=(x+8)(x-8)$；

(2)$x^2-13=x^2-(\sqrt{13})^2=(x+\sqrt{13})(x-\sqrt{13})$；

(3)$4a^2-37=(2a)^2-(\sqrt{37})^2=(2a+\sqrt{37})(2a-\sqrt{37})$.

问题研讨③

问题：计算下列各式的值.

$\sqrt{2^2}=$________；$\sqrt{(-2)^2}=$________；$\sqrt{3^2}=$________；

$\sqrt{(-3)^2}=$________；$\sqrt{7^2}=$________；$\sqrt{(-7)^2}=$________；

$\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=$________；$\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=$________；$\sqrt{0^2}=$________.

探讨：由上述计算结果，你发现$\sqrt{a^2}$等于什么？

归纳：可以发现当$a\geqslant0$时，$\sqrt{a^2}=a$，而当$a<0$时，可先将负数的平方变成正数的平方再计算.

知识归纳　二次根式的性质

$\sqrt{a^2}=a\ (a\geqslant 0)$.

详解　(1)公式$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$的作用主要是“移因式”于根号，正用公式可将根号内的因式开方后移到根号外，逆用公式可将根号外的非负因式平方后移到根号内，计算形如$\sqrt{(-2)^2}$时，由于$(-2)^2=2^2$，故$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{2^2}=2$.即先变成正数的平方，再按公式计算.

(2)$\sqrt{a^2}$是一个非负数，在$a\geqslant 0$时，$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$.

(3)用基本运算符号把数和表示数的字母连接起来的式子叫代数式.

例4 计算：

(1)$\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$；　　(2)$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$；

(3)$\sqrt{(\pi-3.141\ 592\ 7)^2}$；　　(4)$\sqrt{m^2-6m+9}(m<3)$.

分析　先化成形如$\sqrt{a^2}\ (a\geqslant 0)$的形式，再计算.

方法技巧

在运用公式$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$时先必须确定$a\geqslant 0$，切记不能犯$\sqrt{(-2)^2}=-2$的错误.遇到$a$为代数式时要认真确认$a\geqslant 0$时的表达形式.

解答　(1)$\because 2>\sqrt{3}$，$\therefore 2-\sqrt{3}>0$.

$\therefore \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$；

(2)$\because 1<\sqrt{3}$，$\therefore 1-\sqrt{3}<0$，$\sqrt{3}-1>0$.

$\therefore \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$；

(3)$\because \pi-3.141\ 592\ 7<0$，$\therefore 3.141\ 592\ 7-\pi>0$.

$\therefore \sqrt{(\pi-3.141\ 592\ 7)^2}=\sqrt{(3.141\ 592\ 7-\pi)^2}=3.141\ 592\ 7-\pi$；

(4)$\because m<3$，$m-3<0$，$\therefore 3-m>0$.

$\therefore \sqrt{m^2-6m+9}(m<3)=\sqrt{(m-3)^2}=\sqrt{(3-m)^2}=3-m$.

拓广延伸

公式$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$的理解与运用是一个难点，其关键有两点：一是观察被开方数能否化成a^2的形式，二是字母的取值范围对a的符号的确定.

例5 (1)已知$-1<a<0$，化简$|a+1|-\sqrt{a^2}$；

(2)化简$\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2-6x+9}$；

(3)已知数a、b在数轴上的位置如图21.1－1所示，化简

$\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b-1)^2}+\sqrt{(a-b)^2}$.

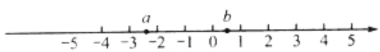

图 21.1－1

(4)设△ABC的三边长为a,b,c,试化简

$\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-a-c)^2}-\sqrt{(c-b-a)^2}$.

分析 (1)中给出a的取值范围,由$-1<a<0$,得$a+1>0$;(2)中没有给出x的取值范围,应分情形讨论化简;(3)中先根据a,b在数轴上的具体位置,确定$(a+2),(b-1),(a-b)$的符号,再化简;(4)中先根据三角形两边之和大于第三边,两边之差小于第三边分别确定$\sqrt{a^2}$中的a的符号.

解答 (1)$\because -1<a<0$, $\therefore a+1>0, -a>0$.

$\therefore |a+1|-\sqrt{a^2}=|a+1|-\sqrt{(-a)^2}=a+1-(-a)=a+1+a=2a+1$;

(2)$\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$.

当$x\geqslant 4$时,$x-4\geqslant 0, x-3>0$,原式$=x-4+x-3=2x-7$,

当$3\leqslant x<4$时,$x-3\geqslant 0, 4-x>0$,原式$=\sqrt{(4-x)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=4-x+x-3=1$,

当$x<3$时,$3-x>0, 4-x>0$,原式$=\sqrt{(4-x)^2}+\sqrt{(3-x)^2}=4-x+3-x=7-2x$;

(3)由图知$a<-2, b<1, a<b$,则有$a+2<0, -(a+2)>0, 1-b>0, b-a>0$.

$\therefore$原式$=\sqrt{(-a-2)^2}+\sqrt{(1-b)^2}+\sqrt{(b-a)^2}=-a-2+1-b+b-a=-2a-1$;

(4)$\because a,b,c$为△ABC的三边长,

$\therefore a+b+c>0,\ b+c-a>0,\ a+c-b>0,\ a+b-c>0$.

$\therefore$原式$=\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(b+c-a)^2}+\sqrt{(a+c-b)^2}-\sqrt{(a+b-c)^2}$

$=a+b+c+b+c-a+a+c-b-a-b+c$

$=4c$.

方法技巧

(1)理解和运用公式的关键是确保公式中$a\geqslant 0$;(2)解此类问题一般是先化成$\sqrt{a^2}$的形式,考虑表示a代数式的正负,并实现转化;(3)若题目中没有给出字母的取值范围,应利用数轴对字母进行分段讨论.

课时作业

一、教材习题

教材第7页练习1~2题,第8页习题1~8题

二、补充习题

1.若$|a|=3, \sqrt{b}=2$,且$ab<0$,则$a-b=$________.

2.数a,b,c在数轴上对应点的位置如图21.1-2所

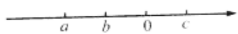

图21.1-2

示，化简 $\sqrt{a^2}+|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}-|b-c|=$________.

3. 比较大小：$\sqrt{(-7)^2}$，-7^2，7^{-1}（用“>”连接）是________________.

4. 已知 $\sqrt{2x-6}$ 有意义，化简 $|x-1|-|3-x|=$________.

5. 下列各等式成立的是　（　　）

A. $(\sqrt{-5})^2=5$　　B. $\sqrt{(-5)^2}=-5$

C. $(2\sqrt{3})^2=6$　　D. $\sqrt{(-6)^2}=6$

6. 计算：

(1) $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}$；　　(2) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\pi-3)^2}$.

7. 阅读下面的文字后，回答问题：甲和乙在解答题目“先化简，再求值：$a+\sqrt{1-2a+a^2}$，其中 $a=9$”时，得出了不同的答案.

甲的解答是：原式 $=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+(1-a)=1$；

乙的解答是：原式 $=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+a-1=2a-1=2\times9-1=17$.

(1)____________的解答是错误的.

(2)错误的原因是____.

21.2　二次根式的乘除(2课时)

第1课时　探究新知课

探究新知

问题研讨

问题：计算下列各式：

(1) $\sqrt{4}\times\sqrt{25}=$________，$\sqrt{4\times25}=$________，

(2) $\sqrt{16}\times\sqrt{9}=$________，$\sqrt{16\times9}=$________.

验证并猜想 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{2\times3}$ 的大小关系是________.

探讨：观察上面的计算结果，你能发现什么？

归纳：可以发现两个二次根式相乘，就是把被开方数相乘，根指数不变.

知识归纳　1. 二次根式的乘法法则

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant0,b\geqslant0)$

这就是说，两个二次根式相乘，被开方数相乘，根指数不变.

此法则可推广到多个二次根式相乘的情况，如$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}(a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0)$.

2. 二次根式的性质

积的算术平方根：$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$，即积的算术平方根等于积中各个因式的算术平方根的积.

说明　在本章中，如果没有特别说明，所有的字母都表示正数.

例1 计算：

(1)$\sqrt{5}\times\sqrt{45}$；(2)$\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{108}$；

(3)$\sqrt{6}\times\sqrt{10}\times\sqrt{15}$.

分析　直接运用二次根式的乘法法则$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$进行计算.

方法规律

两个二次根式相乘时，把它们的被开方数相乘，根指数不变，如果积能开方就一定要开方.

解答　(1)$\sqrt{5}\times\sqrt{45}=\sqrt{5\times45}=\sqrt{225}=\sqrt{15^2}=15$；

(2)$\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{108}=\sqrt{\frac{1}{3}\times108}=\sqrt{36}=6$；

(3)$\sqrt{6}\times\sqrt{10}\times\sqrt{15}=\sqrt{6\times10\times15}=\sqrt{900}=30$.

例2 化简：

(1) $\sqrt{25\times36}$；　(2) $\sqrt{75}$；　(3) $\sqrt{9m^3}$；　(4) $\sqrt{-ax^3}(a>0)$.

分析　运用$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$化简时，先将被开方数分解因数(或因式)，然后将能开得尽方的因式用它们的算术平方根代替，移到根号外.

方法技巧

(1)二次根式化简的方法是分解质因数，移因式于根号外；(2)特别要注意字母的取值范围，即特别指明字母取值范围时要考虑结果的符号.

解答　(1) $\sqrt{25\times36}=\sqrt{25}\times\sqrt{36}=5\times6=30$；

(2) $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\times3}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{9m^3}=\sqrt{9}\times\sqrt{m^2}\times\sqrt{m}=3m\sqrt{m}$；

(4) $\because a>0$，且$-ax^3\geqslant0$，$\therefore x\leqslant0$，$-x\geqslant0$.

$\therefore\sqrt{-ax^3}=\sqrt{(-x)^2}\cdot\sqrt{-ax}=-x\sqrt{-ax}$.

例3 把下列各式中根号外的因式适当改变后移到根号内：

(1)$4\sqrt{3}$；(2)$-4\sqrt{\frac{1}{2}}$；(3)$(x-2)\sqrt{\frac{7}{x-2}}$；(4)$(2-x)\sqrt{\frac{7}{x-2}}$.

分析　移根号外的因式于根号内，要理解内外因式的关系，根号外的非负因式

平方后可移到根号内，但必须注意不能改变式子的性质符号.

解答 (1) $4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\times3}=\sqrt{16\times3}=\sqrt{48}$；

(2) $-4\sqrt{\frac{1}{2}}=-\sqrt{4^2\times\frac{1}{2}}=-\sqrt{16\times\frac{1}{2}}=-\sqrt{8}$；

(3) $(x-2)\sqrt{\frac{7}{x-2}}=\sqrt{(x-2)^2\times\frac{7}{(x-2)}}=\sqrt{7(x-2)}$；

(4) $(2-x)\sqrt{\frac{7}{x-2}}=-\sqrt{(x-2)^2\times\frac{7}{(x-2)}}=-\sqrt{7(x-2)}$

警示误区

注意(3)、(4)小题的区别，由已知隐含条件 $x-2>0$ 可知(3)的结果为正，(4)的结果为负，而负号不能平方移到根号内.

方法技巧

移因式于根号内时要将此因式平方后移入根号内，在移动过程中特别要注意字母的取值范围（隐含的条件），即先确定结果的符号，再变形.

例4 计算下列各式：

(1) $-2\sqrt{15}\times(-3\sqrt{1\frac{2}{3}})$；　(2) $\sqrt{6}\times(\sqrt{24}-\sqrt{2})$；

(3) $(4\sqrt{3}-2\sqrt{6})(\sqrt{3}+4\sqrt{6})$；　(4) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$；

(5) $(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

分析 二次根式相乘，可按照单项式乘以单项式，单项式乘以多项式，多项式乘以多项式及乘法公式进行，同时将开得尽的因数或因式移到根号外.

解答 (1) $-2\sqrt{15}\times\left(-3\sqrt{1\frac{2}{3}}\right)=(-2)\times(-3)\times\sqrt{15}\times\left(\sqrt{1\frac{2}{3}}\right)=6\sqrt{15\times\frac{5}{3}}=6\sqrt{25}=30$；

(2) $\sqrt{6}\times(\sqrt{24}-\sqrt{2})=\sqrt{6}\times\sqrt{24}-\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{6\times24}-\sqrt{6\times2}=\sqrt{6^2\times2^2}-\sqrt{2^2\times3}=12-2\sqrt{3}$；

(3) $(4\sqrt{3}-2\sqrt{6})(\sqrt{3}+4\sqrt{6})=4\sqrt{3}\times\sqrt{3}+4\sqrt{3}\times4\sqrt{6}-2\sqrt{6}\times\sqrt{3}-2\sqrt{6}\times4\sqrt{6}=12+48\sqrt{2}-6\sqrt{2}-48=-36+42\sqrt{2}$；

(4) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2=18-12=6$；

(5) $(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})=[(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}][(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}]=(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=1-2\sqrt{2}+2-3=-2\sqrt{2}$.

例5 比较下列各组数的大小：

(1) $3\sqrt{5}$ 和 $2\sqrt{6}$　(2) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{6}+\sqrt{3}$.

分析 (1)可用平方法或移因式于根号内；(2)用平方法比较大小.

解答 (1)方法一：平方法.

$\because (3\sqrt{5})^2=3^2\times(\sqrt{5})^2=45$,

$(2\sqrt{6})^2=2^2\times(\sqrt{6})^2=24$.

又 $45>24$, $\therefore 3\sqrt{5}>2\sqrt{6}$.

方法二：移因数于根号内.

$\because 3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times5}=\sqrt{45}$, $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2\times6}=\sqrt{24}$.

又 $\sqrt{45}>\sqrt{24}$, $\therefore 3\sqrt{5}>2\sqrt{6}$；

(2) $\because (\sqrt{7}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{7})^2+2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=9+2\sqrt{14}$, $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{6})^2+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=9+2\sqrt{18}$.

又 $9+2\sqrt{18}>9+2\sqrt{14}$,

$\therefore \sqrt{7}+\sqrt{2}<\sqrt{6}+\sqrt{3}$.

方法规律

比较两个根式的大小，一般可用两种方法：平方法即比较它们的平方大小；移因式于根号内，再比较其被开方数的大小. 比较两个根式和的形式的大小，一般用平方法.

拓广延伸

例6 观察下列各式及其验证过程：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$.

验证：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2^3}{3}}=\sqrt{\frac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}=\sqrt{\frac{2(2^2-1)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$.

$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

验证：$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3}{8}}=\sqrt{\frac{(3^3-3)+3}{3^2-1}}=\sqrt{\frac{3(3^2-1)+3}{3^2-1}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

(1)按照上述两个等式及其验证过程的基本思路，猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}$ 的变形结果并进行验证；

(2)针对上述各式反映的规律，写出用 n(n 为任意自然数，且 $n\geqslant2$)表示的等式，并证明它成立.

分析 我们从两个特例入手，可以发现式子的特点：根号前面的数字因数和被开方数的分子相同，而分母等于分子的平方减1，于是易猜想出 $4\sqrt{\frac{4}{15}}$ 的变形结果，并得到一般规律.

方法技巧

(1)本题的结论没有直接给出，需要我们去寻找和发现，合理运用猜想，解这类题目，通常先从特殊情形入手，运用类比思想，发现规律，得出一般的结论. (2)本题中 $n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$，等式右边不能写成 $\sqrt{n\frac{n}{n^2-1}}$.

解答 $4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$.

验证：$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{4^3}{15}}=\sqrt{\frac{(4^3-4)+4}{4^2-1}}=\sqrt{\frac{4(4^2-1)+4}{4^2-1}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$；

(2)由题设及(1)的验证结果，可猜想对任意自然数 $n(n\geqslant2)$ 都有：

$n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$.

证明：因为 $n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3-n+n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n(n^2-1)+n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$，所以 $n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$.

课时作业

一、教材习题

教材第 11 页练习 1～3 题，第 15 页习题 1，4，5，8，9，10 题

二、补充习题

1. 等式 $\sqrt{x(x-3)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-3}$ 成立的条件是________.

2. 若 $b<0$，化简 $\sqrt{-ab^3}$ 的结果是 ( )

A. $-b\sqrt{ab}$　B. $b\sqrt{-ab}$　C. $-b\sqrt{-ab}$　D. $b\sqrt{ab}$

3. 若把 $-2\sqrt{6}$ 根号外的因式移入根号内，所得结果是 ( )

A. $\sqrt{12}$　B. $-\sqrt{12}$　C. $\sqrt{24}$　D. $-\sqrt{24}$

4. 下列各式正确的是 ( )

A. $\sqrt{3^4\times5}=6\sqrt{5}$

B. $\sqrt{(-7)^2-16\times2}=7-4\sqrt{2}$

C. $\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$

D. $\sqrt{a^2-4}=\sqrt{a+2}\times\sqrt{a-2}(a\geqslant2)$

5. 小华计算如下四个算式：①$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$；②$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$；③$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$；④$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1$. 下列用 n(n 为正整数)表示上面算式规律的等式是 ( )

A. $(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=1$

B. $(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)=1$

C. $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=1$

D. $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=1$