新锐丛书

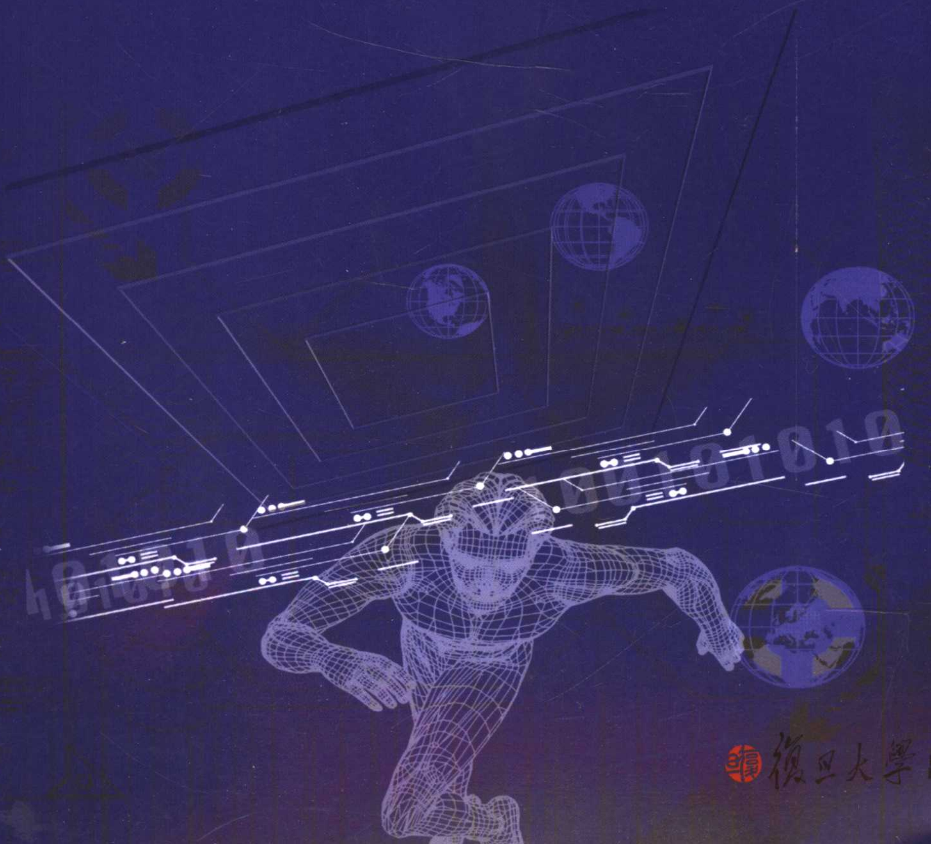
21世纪高等学校教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　万　勇　李　兵

主　审　甘志雄



復旦大學出版社

新锐丛书

21世纪高等学校教材

线性代数

主　编　万　勇　李　兵

主　审　甘志雄

安徽建筑大学 藏书 图书馆

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/万勇,李兵主编. —上海:复旦大学出版社,2006.8
(新锐丛书)
ISBN 7-309-05054-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.①万…②李…　Ⅲ.线性代数　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 070562 号

线性代数
主编　万　勇　李　兵

出版发行　复旦大学出版社　上海市国权路 579 号　邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购)　86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　范仁梅
总 编 辑　高若海
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　浙江省临安市曙光印务有限公司
开　　本　787×960　1/16
印　　张　15.75
字　　数　274 千
版　　次　2006 年 8 月第一版第一次印刷

书　　号　ISBN 7-309-05054-1/O·365
定　　价　22.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。
版权所有　侵权必究

内 容 简 介

本书是根据全国工科数学课程教学指导委员会制定的《线性代数课程教学基本要求》编写而成的. 全书共8章,内容包括:Gauss消元法与矩阵的初等变换、行列式、矩阵、向量、线性方程组的解的结构与向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性代数的应用. 本书每节配有练习,每章配有习题,书末还附有练习和习题的答案.

本书可作为综合性大学、理工科大学、高等师范院校非数学专业的数学教材,也可作为报考硕士研究生的参考用书.

序

为了适应“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的需要，高等学校的数学行家们都在对当今高等学校的数学教学理念、教学内容、教学模式进行深入细致的探讨.本书的作者们依托自己丰富的教学实践经验和对高等数学教学改革的独到认识，根据“教育部高等院校工科数学教学大纲”的要求，编写并推出了这套数学系列教材.该系列教材包括《高等数学》(上、下)、《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》等.

数学是严谨的科学，数学教学不但要教给学生数学知识，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力，还要提高他们的数学修养，养成良好的思维品格.一套好的教材无疑是达到上述目标的基本条件，本套教材就是遵循这一目标而编写的.

与其他教材相比，本套教材具有以下几个明显特点：

1. 科学性

内容安排上由浅入深，符合认知规律，理论严谨、叙述明确简练、逻辑清晰，尽可能通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握.

2. 先进性

本套教材充分考虑了内容的更新，选入了一些新颖的、能反映相应学科的新思想、新趋势的材料，充实教材内容，以适应教育发展和教学改革新形势的需要.

3. 适用性

教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具.所以本套教材对概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排，以及例题、习题的选配等方面，都是从教学的实际要求出发而做出的，使其遵循教学活动自身的规律性，方便教师教与学生学.

参加本套系列教材编写的作者们都是多年从事数学教学和研究的教授、学者，他们紧紧扣住教学大纲的要求，密切联系工科院校数学教学的实际，认

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

真研究了国内各种版本的同类教材，取长补短，编出了新意和特色. 相信这套教材在数学教学和教学改革中定能发挥相当的作用，同时也希望它在教学实践中不断地完善.

应作者之嘱托，谨作此序.

侯振挺

2006 年 6 月

前　　言

线性代数是我国高等院校非数学专业的重要基础课,也是我国硕士研究生入学考试统考课程内容之一. 这门课程的后续课程有运筹学、数值计算等,这门课程对学生今后专业学习和科学素质的培养起着非常重要的作用. 它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性和抽象性. 随着计算机科学的日益发展,许多非线性问题高精度地线性化与大型线性问题的可计算性正在逐步实现,线性代数的地位日趋重要.

国内外出版的线性代数教材,大部分采用"逻辑优先"的方法,其中不乏优秀教材,但是随着我国高等教育逐步走向普及化,学生在学习线性代数时,常常有些不适应的地方。不少学生表示自学有困难,大部分学生对线性代数的知识体系缺乏整体和清晰的认识,并有学有何用的困惑. 因此,线性代数教材如何传授给学生这门课程的知识体系、基本理论和基本方法,如何增强学生学习线性代数的主观能动性,如何增强学生运用理论知识解决实际问题的能力,就非常必要了.

我校在建设湖南省重点建设课程(线性代数)中,就如何科学地处理课程教学内容一直进行积极的研究和探索,在教研、教改方面做了一些有益的探讨,并取得了一些成果,在此基础上,我们于 2005 年编写了《线性代数》讲义并在我校教学中使用,在广泛听取了使用过此书的师生们意见的基础上,对讲义内容作了完善和修订而形成了本书. 本书具有以下特点:

一、课程体系框架新颖,结构合理

本教材紧扣全国工科数学课程教学指导委员会制定的《线性代数课程教学基本要求》以及全国硕士研究生入学考试要求,突破了原有课程的框架,将各部分内容优化组合,构建了课程体系的新框架,在内容现代化和体现数学素质教育等方面做了有益的尝试.

二、章节与教学时数搭配简洁

本教材共分 8 章,如果教学时数为 36 学时左右,那么可讲授第一章—第七章,每章 4 学时,另外可以安排 8 学时的习题课和复习课. 如果教学时数超过 40 学时,那么可讲授第八章.

三、教学层次清楚

面向经、管、农、林、矿、文等专业大类的学生,教师可以只讲授第一章、第二章的前四节,第三章—第七章的前三节.面向理工科学生,教师可以另外再选择讲授每章的“综合与提高”.

四、问题设计合理

本教材在每一章都能根据内容的需要及时而又自然地设计一些引人入胜的问题,引导、启发学生去“发现”线性代数的知识体系.

例如,教材在第一章设计了:

问题 1.0.1　模型中的线性方程组是否有解?如果有解,解是否惟一?

问题 1.0.2　对于有解的线性方程组,怎样求得其全部解或解的表达式?

五、章节的引入与衔接自然

本教材在章节内容处理上,注意每一章留下的问题要启后,而每一章的引入尽可能与前面留下的问题相衔接,以保证本书知识体系的连续性与完整性.

例如第二章行列式的引入如下:

在第一章,我们给出了 $m\times n$ 线性方程组解的存在性和惟一性的判定,下面的问题就自然地产生了.

问题 2.0.1　$n\times n$ 线性方程组(n 元线性方程组)在有惟一解的情况下,解如何表示?

问题 2.0.2　$m\times n$ 线性方程组在有解的情况下,解如何表示?

本章将给出问题 2.0.1 的回答,至于问题 2.0.2,我们将在第五章给出.

六、理论与应用相结合

本教材在第八章介绍了线性代数在经济管理和其他学科方面的应用,着重介绍了模糊综合评判模型、投入产出模型、汇率套汇模型等.

七、以学生为本,便于学生自学

本教材每章的引言都给出了本章的基本思想,告诉学生线性代数是如何思考的,我们充分相信:学生在学完这一章后就会明白线性代数为什么要这样思考.

本教材每章的引言都给出了本章的知识框架的流程图、主要概念、主要结论、主要方法.另外,学生在阅读时完全可以根据自己的能力和专业培养需要把握每章“综合与提高”的内容.

八、便于开展多媒体教学与双语教学

本教材将配备光盘和英文电子版教材,教师可以进行多媒体教学,也可以进行双语教学.

本书由万勇、李兵主编，参加本书编写的有李兵、万勇、刘进波、王跃恒、唐宝庆、王晓梅、谌跃中．编者全是长期在教学第一线执教的教师，教学经验丰富．

本书在编写过程中得到了长沙理工大学教务处、长沙理工大学教材科、复旦大学出版社的大力支持与帮助，在此深表谢意．本书在编写过程中，参考了国内一些同类型的教材，在此深表谢意．本书在编写过程中，得到了长沙理工大学数学与计算科学学院的领导、教师的热情帮助和极大关怀，在此深表谢意．

甘志雄教授详细审阅了全稿，并提出了许多宝贵意见，著名数学家侯振挺教授给予本书悉心指导，在此深表谢意．

由于编者学识水平有限，书中难免有不妥之处，恳请使用本教材的教师和学生提出宝贵意见．

编　者

2006 年 5 月

目　　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　Gauss 消元法与矩阵的初等变换

大量来自实际问题的数学模型中都含有线性方程组，例如经济学中著名的“Leontief(列昂惕夫)静态投入产出模型”①，用于分析地区经济增长率与产品结构的“混合线性多部门模型”②，某些供应与需求分析模型，如此等等，不胜枚举. 于是，下列问题就自然地产生了.

问题 1.0.1　模型中的线性方程组是否有解？如果有解，解是否惟一？我们称该问题为“解的存在性和惟一性问题”.

问题 1.0.2　对于有解的线性方程组，怎样求得其全部解或解的表达式？

本章将回答上述第一个问题，至于后一个问题，要等到第五章回答. 分析和求解线性方程组的一个基本方法是 Gauss(高斯)消元法(Gauss elimination method)，它是通过对方程组施行变换来化简方程组的方法. 为了简化分析过程，引入矩阵是方便的，不但如此，利用矩阵的“秩”来回答解的存在性和惟一性问题(见定理 1.3.1)又是十分自然的，本章的基本线索如图 1.1 所示.

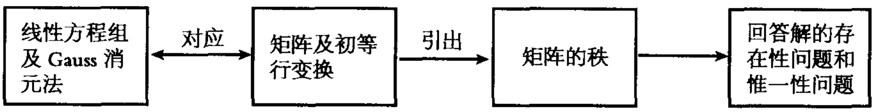


图 1.1

本章的主要内容包括：

概念：线性方程组的解(集)，矩阵，线性方程组的系数矩阵和增广矩阵，矩阵的初等变换，矩阵的秩.

结论：线性方程组有解(有惟一解、有无穷多个解)的充分必要条件(定理 1.3.1)，齐次线性方程组有非零解的充分必要条件(定理 1.3.2).

方法：(1) 通过对增广矩阵施行初等行变换，化简线性方程组；

(2) 通过对矩阵施行初等行变换，计算矩阵的秩；

---

①，②　参见第八章.

(3) 通过对矩阵施行初等变换,把矩阵化成标准形.

§1.1 线性方程组与 Gauss 消元法

1.1.1 线性方程组

问题 1.1.1 考虑某个产品的 3 个替代产品在 3 个相互分离的市场中的供需均衡问题.

设用变量 p_1, p_2, p_3 表示这 3 个产品的价格,并假定在第 i 个市场中该类产品的需求量 Q_{id} 和供应量 Q_{is} 与价格的关系为

$$Q_{1d}=16-5p_1+2p_2+p_3, Q_{1s}=-8+6p_1;$$
$$Q_{2d}=15+p_1-3p_2+2p_3, Q_{2s}=-11+3p_2;$$
$$Q_{3d}=19+p_1+2p_2-4p_3, Q_{3s}=-5+3p_3.$$

(1) 商家可否确定一组价格(p_1, p_2, p_3),使得 3 个市场都达到供需平衡?

(2) 如果可以,有多少组可选择的价格?

分析:令 $Q_{id}=Q_{is}$, $i=1,2,3$,则上面的 3 组关系式化为下列含有 3 个变量的线性(一次)关系式:

$$\begin{cases} 11p_1-2p_2-\ \ p_3=24, \\ \ \ p_1-6p_2+2p_3=-26, \\ \ \ p_1+2p_2-7p_3=-24. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

一般地,设 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间满足如下形式的线性关系:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

则称方程组(1.1.2)为含有 n 个未知量 m 个方程的**线性方程组**(linear system),简称为 $m\times n$ 型线性方程组(或 n 元线性方程组),其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表方程组(1.1.2)中出现的 n 个**未知量**,$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ 称为方程组的**系数**,$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 称为**常数项**. 如无特别说明,以后总假定系数与常数项均为实数.

n 元线性方程组(1.1.2)的一个**解**是指一个有序实数组$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$,它满足:当用 c_i 代替方程组(1.1.2)中的 $x_i (i=1,\cdots,n)$后, 每个方程都变成恒等式. 方程组 (1.1.2)的所有解构成的集合,称为这个方程组的**解集**. 如果两个线性方程组有相同的解集,则称这两个方程组**同解**.

现在可以把前面关于供需均衡分析的问题 1.1.1“翻译”成如下的代数问题(参见问题 1.0.1)：

问题 1.1.2　(1)方程组(1.1.1)是否有解？

(2)如果有解，有多少个解？

注意，由于 $m\times n$ 型线性方程组所表示的是 n 个变量之间应满足的 m 个线性关系，而这些关系并不依赖于变量记号的选取，因此一个 $m\times n$ 型线性方程组完全由它的 $m\times n$ 个系数和 m 个常数所确定. 也就是说，如果两个 $m\times n$ 型线性方程组的系数和常数项对应相等，则这两个方程组是相同的. 例如方程组(1.1.1)与下列方程组是相同的：

$$\begin{cases} 11x-2y-\ \ z=24, \\ \quad x-6y+2z=-26, \\ \quad x+2y-7z=-24. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

从几何上看，方程组(1.1.3)中的每一个方程都表示三维空间中的一个平面，于是，上述代数问题还可以用几何的形式来表述.

问题 1.1.3　(1)空间中 3 个平面 $11x-2y-z=24$，$x-6y+2z=-26$，$x+2y-7z=-24$ 是否有交点？

(2)如果有交点，则有多少个交点？

由于上面的 3 个问题是等价的，因此只要解决了问题 1.1.2，也就解决了问题 1.1.1 和问题 1.1.3，我们将在例 1.1.2 中给出问题 1.1.2 的解答.

1.1.2　Gauss 消元法

本章我们将主要讨论问题 1.0.1，即讨论线性方程组解的存在性与惟一性问题. 研究和分析问题的一个重要方法是从简单情形入手. 一般来说，具有“阶梯形”的线性方程组(见例 1.1.1)可以认为是简单的情形，因为很容易看出这些方程组是否有解.

例 1.1.1　判断线性方程组是否有解：

$$(1)\begin{cases} x_1-\ \ x_2+3x_3=1, \\ \qquad\ 3x_2+2x_3=-1, \\ \qquad\qquad\ \ 4x_3=4; \end{cases}\qquad (2)\begin{cases} x_1-x_2-x_3\qquad\quad=3, \\ \qquad\qquad\ x_3+2x_4=-2; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=1, \\ \qquad\qquad 0x_3=4. \end{cases}$$

解　(1)方程组有解，且只有一个解.

$$x_1=-3, x_2=-1, x_3=1.$$

(2) 显然，若令 $x_4=a, x_2=b, a, b$ 为任意实数，则方程组的解为

$$x_1=(3+b)-2(1+a), x_2=b, x_3=-2(1+a), x_4=a.$$

所以该方程组有解，且有无穷多个解.

(3) 该方程组无解，因为对任意 x_1, x_2, x_3 来说，“$0 \cdot x_3=4$”都是不可能成立的. 也称这样的方程组为“不相容的”.

一般的线性方程组可能不具有“阶梯形”，但我们可以使用 Gauss 消元法把它化成阶梯形，其思路是：用“初等变换”对方程组进行同解变形.

例 1.1.2 化简下列线性方程组并判断其是否有解：

$$\begin{cases} 11x_1-2x_2-\ \ x_3=24, \\ \ \ \ \ x_1-6x_2+2x_3=-26, \\ \ \ \ \ x_1+2x_2-7x_3=-24. \end{cases}$$

解 作如下变形：

先把第一个与第三个方程互换位置（这样可使第一个方程中第一个变量的系数较简单，从而减少变形过程中的计算量），方程组化为

$$\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-24, \\ x_1-6x_2+2x_3=-26, \\ 11x_1-2x_2-\ \ x_3=24. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

将方程组(1.1.4)中的第二个方程减去第一个方程，第三个方程减去第一个方程的 11 倍，这样后两个方程中的 x_1 都被消去，方程组(1.1.4)化为

$$\begin{cases} x_1+\ \ \ \ 2x_2-\ \ 7x_3=-24, \\ \ \ \ \ \ \ \ \ -8x_2+\ \ 9x_3=-2, \\ \ \ \ \ \ \ -24x_2+76x_3=288. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

将方程组(1.1.5)中的第三个方程减去第二个方程的 3 倍得 $49x_3=294$，然后将该方程乘以$\frac{1}{49}$，方程组(1.1.5)化成“阶梯形”方程组：

$$\begin{cases} x_1+\ \ \ 2x_2-7x_3=-24, \\ \ \ \ \ \ \ \ -8x_2+9x_3=-2, \\ x_3=6. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

容易看出，方程组(1.1.6)有解：$x_1=4$，$x_2=7$，$x_3=6$，而且只有这一个解. 又由于方程组(1.1.6)、(1.1.5)、(1.1.4)、(1.1.1)均为同解的方程组（为什么?），故方程组(1.1.1)有解且只有一个解，即(4,7,6).

讨论 我们知道，一个 n 元线性方程组所表示的 n 个变量的线性关系是由方程组的系数和常数项所确定的. 给定一个线性方程组，把它的系数和常

数项取出来按原次序排列起来，就确定了一个长方形的表，这个表称为该线性方程组的**增广矩阵**(augmented matrix). 例如本例中方程组的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 11 & -2 & -1 & 24 \\ 1 & -6 & 2 & -26 \\ 1 & 2 & -7 & -24 \end{pmatrix}.$$

反过来，如果给定一个长方形的表，也就确定了一个线性方程组，它以这个表为其增广矩阵. 我们可以把线性方程组和它的增广矩阵一一对应起来，一个方程就对应着增广矩阵中的一个行(row). 利用线性方程组的增广矩阵，可以把本例中的消元化简过程描述如下：

$$\begin{pmatrix} 11 & -2 & -1 & 24 \\ 1 & -6 & 2 & -26 \\ 1 & 2 & -7 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & -24 \\ 1 & -6 & 2 & -26 \\ 11 & -2 & -1 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-11\times r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & -24 \\ 0 & -8 & 9 & -2 \\ 0 & -24 & 76 & 288 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{49}\times r_3]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & -24 \\ 0 & -8 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

其中，$r_1 \leftrightarrow r_3$ 表示第一行与第三行互换位置，$r_3-11\times r_1$ 表示第三行减去第一行的 11 倍，$\frac{1}{49}\times r_3$ 表示第三行乘以 $\frac{1}{49}$，依此类推.

以最后一个表为增广矩阵的方程组就是“阶梯形”方程组(1.1.6).

注记 1.1.1　从上述过程中可以看出，化简线性方程组时我们用了 3 种变形：

(1) 互换两个方程的位置；

(2) 用一个非零数乘某个方程；

(3) 把第 j 个方程乘以一个(非零)数再加到第 i 个方程上.

这 3 种变形称为线性方程组的**初等变换**(elementary operations). 初等变换的一个重要性质是下列结论.

定理 1.1.1　施行初等变换不会改变线性方程组的解，即若一个 $m\times n$ 线性方程组经过某一个初等变换后变为另一个方程组，那么这两个方程组同解[①].

---

① 本书未直接证明的结论将在该结论所在章节“综合与提高”中补充证明. 今后不再提示.

例 1.1.3 化简线性方程组(1.1.7)并判断其是否有解.

$$\begin{cases}11x_1-2x_2-50x_3=24,\\ x_1-6x_2+\ 2x_3=-26,\\ x_1+2x_2-\ 7x_3=-24.\end{cases}\tag{1.1.7}$$

解 我们利用线性方程组(1.1.7)的增广矩阵来描述消元化简过程：

$$\begin{bmatrix}11&-2&-50&24\\1&-6&2&-26\\1&2&-7&-24\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&2&-7&-24\\1&-6&2&-26\\11&-2&-50&24\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-11\times r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&2&-7&-24\\0&-8&9&-2\\0&-24&27&288\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{bmatrix}1&2&-7&-24\\0&-8&9&-2\\0&0&0&294\end{bmatrix}.$$

以最后一个表为增广矩阵的方程组就是“阶梯形”方程组：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-7x_3=-24,\\ \quad -8x_2+9x_3=-2,\\ \qquad\qquad 0=294.\end{cases}\tag{1.1.8}$$

显然方程组(1.1.8)无解，因而方程组(1.1.7)无解.

从例 1.1.1～例 1.1.3 中我们看到，有的线性方程组无解，有的有惟一解，有的有无穷多个解. 自然要问：是否还有其他的情况出现？一个线性方程组在什么条件下一定有解？在什么条件下有惟一解？为了便于讨论，在下节我们引入矩阵、矩阵的初等行变换与矩阵的秩等重要概念.

练习 1.1

1. 填空：

(1) 一个 $m\times n$ 型线性方程组有______个方程，有______个变元，其增广矩阵有______行，有______列；

(2) 线性方程组的解是有序数组，一个 4×5 线性方程组的解含有______个实数.

2. 讨论下列简单线性方程组解的情况：

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com