普通高等教育“十五”国家级规划教材配套辅导

信号与线性系统 第4版

习题精解

李玲远 陆三兰 王正强 主编
众邦考试教育研究所 策划

管致中主编《信号与线性系统》第4版同步辅导

下册

涵盖课程重点

精炼方法技巧

精解课后习题

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套辅导

信号与线性系统(第4版)
(下册)

习题精解

李玲远　陆三兰　王正强　主编

西南交通大学出版社
·成都·

目　　录

（下　册）

第七章　离散时间系统的时域分析

1.1 基本要求

通过本章的学习,学生应熟练掌握典型序列的性质和序列的运算;熟练掌握离散系统零输入响应、零状态响应的时域分析方法。深刻理解线性系统全响应的可分解性;深刻理解抽样定理的内容,抽样信号频谱与原信号频谱之间的关系。掌握系统模拟框图以及离散系统差分方程的表示方法。

7.2 知识要点

7.2.1 离散时间信号

1. 常用序列之间的关系

$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n) \text{ 或 } \varepsilon(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}\delta(n)$$

2. 离散时间信号的表示

$$f(k)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\delta(k-n)$$

任意序列 $f(k)$ 可以表示为加权、延迟的单位样值序列之和的形式。

3. 离散时间信号的卷积和

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_1(n)f_2(k-n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_2(n)f_1(k-n)$$

卷积运算满足交换律、分配律、结合律。

$$f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k)$$

$$[f_1(k)+f_2(k)]*f_3(k)=f_1(k)*f_3(k)+f_2(k)*f_3(k)$$

$$[f_1(k)*f_2(k)]*f_3(k)=f_1(k)*[f_2(k)*f_3(k)]$$

$f(k)$ 与 $\delta(k)$ 的卷积

$$f(k)*\delta(k)=f(k)$$

$$f(k)*\delta(k-k_0)=f(k-k_0)$$

$$f(k-k_1)*\delta(k-k_2)=f(k-k_1-k_2)$$

$f(k)$ 与 $\varepsilon(k)$ 的卷积

$$f(k)*\varepsilon(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}f(n)$$

$$f(k)*\varepsilon(k-k_0)=\sum_{n=-\infty}^{k-k_0}f(n)=\sum_{n=-\infty}^{k}f(n-k_0)$$

7.2.2 离散时间系统

1. 线性时不变离散时间系统的差分方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_i y(k+i)=\sum_{j=0}^{m}b_j e(k+j)$$

2. 离散时间系统的单位样值响应

当 $$e(k)=\delta(k),y_{zs}(k)=h(k)$$

$$y_{zs}(k)=e(k)*h(k)$$

系统的零状态响应等于系统的激励与单位样值响应的卷积和。

3. 离散时间系统的模拟

差分方程的基本关系是延迟(移位)、乘分数、相加、系统的基本单元为延迟、乘系数、相加。

7.2.3 差分方程的时域求解方法

(1) 迭代法:逐次代入 $y(k)$ 的值求解。

(2) 时域经典解法:分别求差分方程的齐次解和特解,代入起始条件求系数。

(3) 移序算子运算方法:应用移序算子求系统的零输入响应、零状态响应。

(4) 卷积方法:应用卷积和方法求系统的零状态响应。

7.2.4 抽样定理

抽样定理:为了能从抽样信号 $f_s(t)$ 中恢复原连续信号 $f(t)$,抽样须满足两个条件。

(1) 被抽样信号的频谱是带限的,其带宽为 $\omega_m(f_m)$。

(2) 抽样间隔 $T_s\leqslant\dfrac{1}{2f_m}=\dfrac{\pi}{\omega_m}$;抽样频率 $f_s\geqslant 2f_m$ 或 $\omega_s\geqslant 2\omega_m$。

其最小抽样频率 $f_{smin}=2f_m$ 或 $\omega_{smin}=2\omega_m$,称为奈奎斯特频率,其允许最大抽样间隔 $T_{max}=\dfrac{1}{2f_m}=\dfrac{\pi}{\omega_m}$,称为奈奎斯特抽样间隔。

7.3 典型例题

例 7.1　华中科技大学2006级硕士研究生入学试题

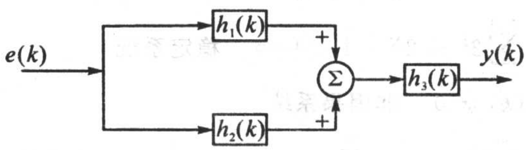
例图 7.1 所示的复合系统由三个子系统组成。已知各子系统的单位函数响应分别为 $h_1(k)=\delta(k)$，$h_2(k)=a^k\varepsilon(k)$，a 为实数，$h_3(k)=\delta(k-1)$。试回答以下问题：

(1) 写出该复合系统的前向形式差分方程。

(2) 判断该复合系统是否为因果系统。

(3) 求使该复合系统稳定的 a 值范围。

(4) 求该复合系统的阶跃响应。



例图 7.1

【解】 (1) $y(z)=E(z)\cdot[H_1(z)+H_2(z)]\cdot H_3(z)$

$$H(z)=z^{-1}+\frac{z}{z-a}\cdot z^{-1}=\frac{2-az^{-1}}{z-a}=\frac{2z-a}{z^2-az}$$

$$y(k+2)-ay(k+1)=2e(k+1)-ae(k)$$

(2) $H(z)$ 的分子最高幂次为 1，分母最高幂次为 2，系统是因果的。

(3) $H(z)$ 的两个极点为 $P_1=0, P_2=a$。

系统稳定的条件是 $|a|<1$，则极点都在单位圆内，其收敛域包括单位圆。

(4) $\varepsilon(k)\leftrightarrow \dfrac{z}{z-1}$

$$\begin{aligned}y(k)&=\mathscr{Z}^{-1}[E(z)H(z)]\\&=\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\cdot\frac{2z-a}{z^2-az}\right]\\&=\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{\frac{2-a}{1-a}}{z-1}+\frac{\frac{a}{a-1}}{z-a}\right]=\frac{2-a}{1-a}\varepsilon(k-1)+\frac{a}{a-1}a^{k-1}\varepsilon(k-1)\\&=\frac{1}{1-a}[(2-a)-a^k]\varepsilon(k-1)\end{aligned}$$

例 7.2　讨论下列各线性时不变系统的因果性和稳定性。

(1)$h(k)=-a^k\varepsilon(-k-1)$　　(2)$h(h)=\delta(k+k_0),k_0>0$

(3)$h(k)=2^kG_N(k)$　　(4)$h(k)=2^k\varepsilon(-k)$

(5)$h(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$　　(6)$h(k)=\frac{1}{k}\varepsilon(k)$

【解】 (1) $k<0$ 时，$h(k)\neq 0$　非因果系统

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=-\infty}^{-1}|a^k|=\sum_{k=1}^{\infty}a^{-k}$　只是在 $|a|>1$ 时才是稳定系统

(2) $k<0$ 时，$h(k)\neq 0$　非因果系统

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k+k_0)=1<+\infty$　稳定系统

(3) $k<0$ 时，$h(k)=0$　因果系统

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=0}^{N-1}2^k=2^N-1<+\infty$　稳定系统

(4) $k<0$ 时，$h(k)\neq 0$　非因果系统

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|2^k|=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}=1<+\infty$　稳定系统

(5) $k<0$ 时，$h(k)=0$　因果系统

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^k\right|<+\infty$　稳定系统

(6) $k<0$ 时，$h(k)=\frac{1}{k}\varepsilon(k)=0$　因果系统

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{k}\right)\varepsilon(k)\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$　非稳定系统

例 7.3　离散时间系统的差分方程 $2y(k)-y(k-1)=4x(k)+2x(k-1)$，求系统的单位样值响应 $h(k)$。

【解】 $2h(k)-h(k-1)=4\delta(k)+2\delta(k-1)$

$2\alpha-1=0\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2},\ h(k)=c\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$2h_1(k)-h_1(k-1)=4\delta(k),\ 2h_2(k)-h_2(k-1)=2\delta(k-1)$

$h_1(0)=2\Rightarrow c=2$

$h_1(k)=2\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$

$h_2(1)=1\Rightarrow c=2$

$h_2(k)=2\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k-1)$

$$h(k) = h_1(k) + h_2(k)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k-1)$$
$$= 2\delta(k) + 4\left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k-1)$$

例 7.4　已知离散系统的差分方程为 $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = x(k+1) - 2x(k)$，$x(k) = 2^k\varepsilon(k)$，$y_{zi}(0) = 0$，$y_{zi}(1) = 1$，求系统的零输入响应、零状态响应及完全响应。

【解】　求零输入响应 $y_{zi}(k)$

$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 2\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$

$y_{zi}(k) = c_1 + c_2 2^k \Rightarrow c_1 + c_2 = 0, c_1 + 2c_2 = 1$，求得 $c_1 = -1, c_2 = 1$

$y_{zi}(k) = [-1 + 2^k]\varepsilon(k)$

求单位样值响应 $h(k)$

$h(k) = B_1 + B_2 2^k$

$h(k+2) - 3h(k+1) + 2h(k) = \delta(k+1) - 2\delta(k)$

$k = -2, h(0) = 0; k = -1, h(1) = 1; k = 0, h(2) = 3 - 2 = 1$

代入 $h(k)$　$h(1) = B_1 + 2B_2 = 1, (h)2 = B_1 + 4B_2 = 1$

求得 $B_1 = 1, B_2 = 0$

$h(k) = \varepsilon(k-1)$

求零状态响应

$y_{zs}(k) = x(k) * h(k) = 2^k\varepsilon(k) * \varepsilon(k-1) = (2^k - 1)\varepsilon(k-1)$

求全响应

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k) = (-1 + 2^k)\varepsilon(k) + (2^k - 1)\varepsilon(k-1)$$
$$= 2[(2^k - 1)\varepsilon(k)]$$

7.4 习题全解

题 7.1　给出下列离散信号的图形。

(1) $(-\frac{1}{2})^{k-2}\varepsilon(k)$　　(2) $2\delta(k) - \varepsilon(k)$

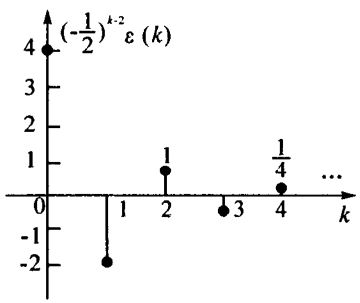
(3) $\varepsilon(k) + \sin(\frac{k\pi}{8})\varepsilon(k)$　　(4) $k(2)^{-k}\varepsilon(k)$

【解】 (1) 当 $k<0$ 时,该离散信号等于0;当 $k\geqslant 0$ 时,该离散信号是一个以4为首项,以 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 为公比的等比序列,其图形如下图(a)所示。

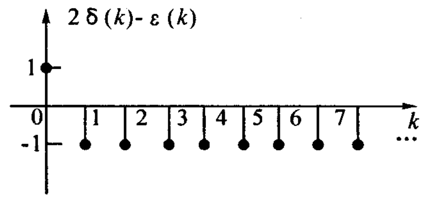
(2) 当 $k<0$ 时,$2\delta(k)-\varepsilon(k)=0$;当 $k=0$ 时,$2\delta(k)-\varepsilon(k)=1$;当 $k\geqslant 1$ 时,$2\delta(k)-\varepsilon(k)=-1$,其图形如下图(b)所示。

(3) 当 $k<0$ 时,$\varepsilon(k)+\sin\left(\dfrac{k\pi}{8}\right)\varepsilon(k)=0$;当 $k\geqslant 0$ 时,该离散信号图形为 $\sin\left(\dfrac{k\pi}{8}\right)$ 的图形向上平移一个单位,其图形如下图(c)所示。

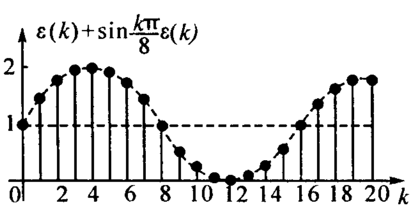
(4) 当 $k\leqslant 0$ 时,$k(2)^{-k}\varepsilon(k)=0$;当 $k>0$ 时,图形按 $k(2)^{-k}$ 的规律变化,其图形如下图(d)所示。



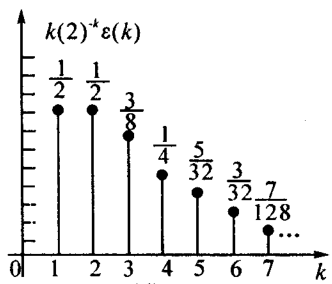
(a)



(b)



(c)



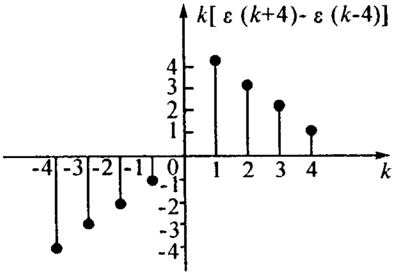
(d)

题 7.2 给出下列离散信号的图形。

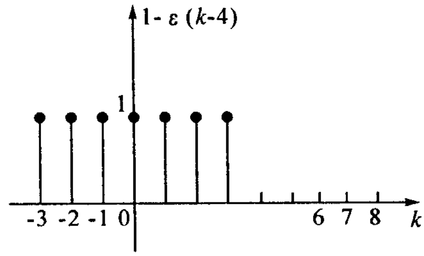
(1) $k[\varepsilon(k+4)-\varepsilon(k-4)]$ (2) $1-\varepsilon(k-4)$

(3) $2^k[\varepsilon(-k)-\varepsilon(3-k)]$ (4) $(k^2+k+1)[\delta(k+1)-2\delta(k)]$

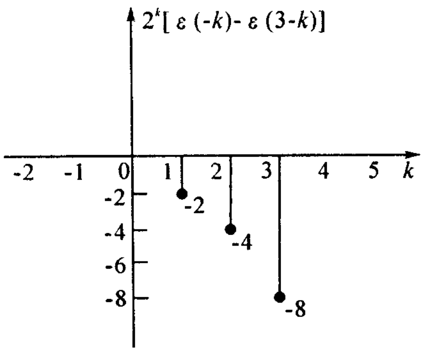
【解】 (1),(2),(3),(4)式所表示的离散信号的图形分别如下图(a),(b),(c),(d)所示。



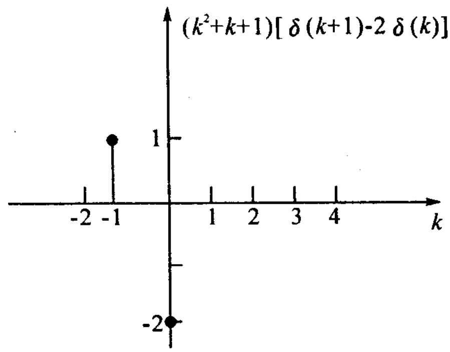
(a)



(b)

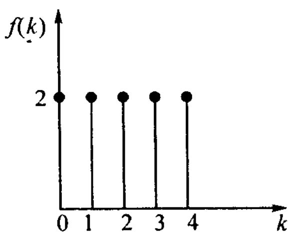


(c)

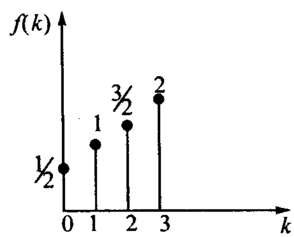


(d)

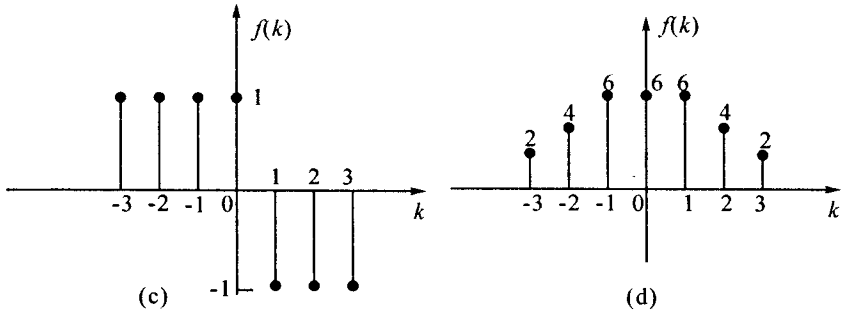
题 7.3　写出题图 7.3 所示序列的函数表达式。



(a)



(b)



题图 7.3

【解】 (1) 由题图 7.3(a) 所示波形可知,该序列仅在区间[0,4]上函数值为 2,则

$$f(k)=2[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-5)]$$

(2) 由题图 7.3(b) 所示波形可知,该序列是一个以$\frac{1}{2}$为首项,以$\frac{1}{2}$为公差的等差右边序列,则

$$f(k)=\frac{1}{2}(k+1)\varepsilon(k)$$

(3) 由题图 7.3(c) 所示波形可知,该序列在区间[-3,-1]上的值为 1,在区间[1,3]上值为 -1,则

$$f(k)=[\varepsilon(-k-1)-\varepsilon(-k-4)]-[\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-4)]$$

(4) 由题图 7.3(d) 所示波形可知,该序列在区间[-3,-1]上的值满足表达式 $8+2k$,在区间[1,3]上满足表达式 $8-2k$,且 $k=0$ 时值为 6,则

$$f(k)=(8-2k)[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)]-2\delta(k)+(8+2k)[\varepsilon(-k-1)-\varepsilon(-k-4)]$$

题 7.4 用归纳法写出下列右边序列的闭式。

(1) $\{1,-1,1,-1\cdots\}$

(2) $\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\cdots\}$

(3) $\{-2,-1,2,7,14,23\cdots\}$

(4) $\{3^2+8,5^2+11,7^2+14,9^2+17\cdots\}$

【解】 (1) 该右边序列中的 1 与 -1 交替出现,且奇数位为负,所以右边序列的表达式为$(-1)^k\varepsilon(k)$。

(2) 该右边序列分子、分母都是单调递增,满足$\frac{k}{k+1}\varepsilon(k)$。

(3) 该右边序列满足$(k^2-2)\varepsilon(k)$。

(4) 该右边序列满足$(3+2k)^2+3(3+k)-1$,故该序列的闭式满足$(4k^2+15k+17)\varepsilon(k)$。

(4) 该右边序列满足$(3+2k)^2+3(3+k)-1$,故该序列的闭式满足$(4k^2+15k+17)\varepsilon(k)$。

题 7.5　判断下列信号是否为周期性信号,如果是则其周期为多少?

(1) $\sin k$　　(2) $e^{j0.4\pi k}$

(3) $\sin(0.2\pi k)+\cos(0.3\pi k)$　　(4) $\cos(0.512\pi k)$

(5) $\operatorname{sgn}[(-0.23)^k]$　　(6) $\sin(\pi k)\varepsilon(k)$

【解】 (1) $\omega=1, T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi$,为无理数,该函数不是周期信号。

(2) $e^{j0.4\pi k}=e^{j0.4\pi(k+5m)}\quad m=0,1,2\cdots$

最小周期 $T=5$。

(3) $\sin(0.2\pi k)$ 的最小周期为 10;$\cos(0.3\pi k)$ 的最小周期为 20。

$f(k)=\sin(0.2\pi k)+\cos(0.3\pi k)$ 的最小周期为 20。

(4) $\omega=0.512\pi$

$$T_0=\frac{2\pi}{0.512\pi}=\frac{125}{32}$$

$\cos(0.512\pi k)$ 的最小周期为 125。

(5) $\operatorname{sgn}[(-0.23)^k]=\operatorname{sgn}[(-0.23)^{k+2n}], n=0,1,2\cdots$

最小周期 $T=2$。

(6) $k<0, f(k)=\sin(\pi k)\varepsilon(k)=0$

$f(k)$ 为非周期信号。

题 7.6　一频谱包含有由直流至 100Hz 分量的连续时间信号延续 2min。为便于计算机处理,对其抽样以构成离散信号,求最小的理想抽样点数。

【解】 $f_m=100\text{Hz}$,根据抽样定理

$$f_{s\min}=2f_m=200\text{Hz}$$

$$T_{s\max}=\frac{1}{f_{s\min}}=\frac{1}{200}\text{s}$$

最小理想抽样点数

$$n_{\min}=\frac{2\times 60}{\frac{1}{200}}=24\ 000$$

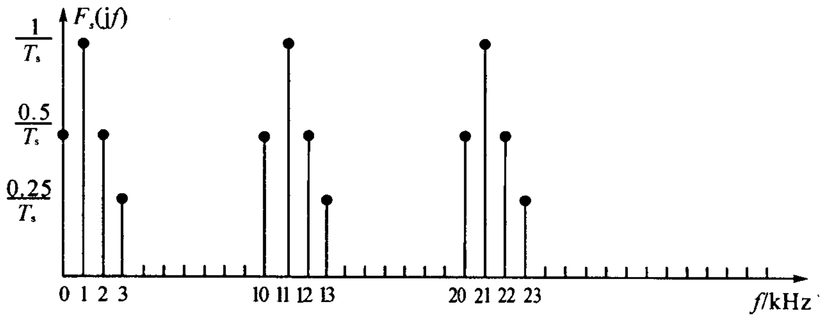
题 7.7　设一连续时间信号,其频谱包含有直流、1kHz,2kHz,3kHz 四个频率分量,幅度分别为 0.5,1,0.5,0.25;相位谱为 0,试以 10kHz 的抽样频率对该信号抽样,画出抽样后所得离散序列在 0 到 25kHz 频率范围内的频谱。

【解】　连续信号被抽样后的频谱是原连续信号频谱的周期延拓,若是理想抽样,则

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\,\omega_s)$$

$$F_s(\mathrm{j}f)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[\mathrm{j}(f-nf_s)]$$

频谱图如下图所示：



题 7.8　对信号 $f(t)=\sin C^2(\pi B_s t)=\left(\frac{\sin\pi B_s t}{\pi B_s t}\right)^2$，以抽样时间间隔分别为 $T=\frac{1}{2B_s}$ 及 $\frac{1}{B_s}$ 进行理想抽样，试绘出抽样后所得序列的频谱，并做比较。

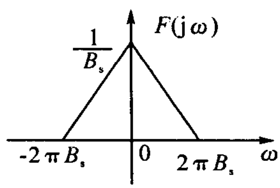
【解】 $f(t)=\sin C^2(\pi B_s t)=\sin C^2\left(\frac{2\pi B_s}{2}\cdot t\right)$，其 $\omega_m=2\pi B_s$，$f_m=B_s$

$$\omega_s\geqslant 2\cdot 2\pi B_s,\ \omega_{s\min}=4\pi B_s,\ f_{s\min}=2B_s$$

$T_{1\max}=\frac{1}{2B_s}$ 满足抽样定理；

$T_{2\max}=\frac{1}{B_s}$ 不满足抽样定理，频谱会出现混叠。

抽样后序列的频谱 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 如下图(b) 所示。



(a)

题 7.9　有人每年初在银行存款一次，银行利息为 β，每年底所得利息亦转存下一年，试用差分方程表示第 k 年的存款额。

【解】　第 k 年的本利 $y(k)$ 包括三个方面。

(1) 第 $k-1$ 年的本利 $y(k-1)$

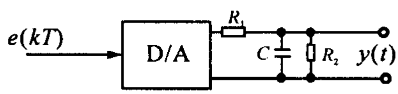
(2) 第 $k-1$ 年的利息 $\beta y(k-1)$

(3) 第 k 年的存款为 $e(k)$

$$y(k) = y(k-1) + \beta y(k-1) + e(k)$$

$$e(k) = y(k) - (1+\beta) y(k-1)$$

题 7.10　题图 7.10 表示一离散信号 $e(kT)$ 经 D/A 转换为一阶梯形模拟信号激励图示的 RC 电路，已知电路参数 $C = 1\text{F}, R_1 = R_2 = 1\Omega$，试写出描述 $y(kT)$ 与 $e(kT)$ 间关系的差分方程，这里 $y(kT)$ 为 $y(t)$ 在离散时间 kT 处的值组成的序列。



题图 7.10

【解】　RC 系统的转移函数为

$$H(S) = \frac{\dfrac{R_2 \cdot \dfrac{1}{CS}}{R_2 + \dfrac{1}{CS}}}{R_1 + \dfrac{R_2 \cdot \dfrac{1}{CS}}{R_2 + \dfrac{1}{CS}}} = \frac{\dfrac{R_2 \cdot \dfrac{1}{CS}}{R_2 + \dfrac{1}{CS}}}{\dfrac{R_1\left(R_2 + \dfrac{1}{CS}\right) + R_2 \cdot \dfrac{1}{CS}}{R_2 + \dfrac{1}{CS}}}$$

$$= \frac{R_2 \cdot \dfrac{1}{CS}}{R_1\left(R_2 + \dfrac{1}{CS}\right) + R_2 \cdot \dfrac{1}{CS}}$$

将分子与分母同乘 $\dfrac{S}{R_1 R_2}$，得

$$H(s) = \frac{\dfrac{1}{R_1 C}}{S + \dfrac{1}{C \cdot \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}}} = \frac{\dfrac{1}{R_1 C}}{S + \dfrac{1}{\tau_0}}$$

其中 $\tau_0 = C\cdot\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}$,称为电路的时间常数。

$C=1\,\text{F},R_1=R_2=1\Omega$,可得 $\qquad \tau_0=\dfrac{1}{2}$

则
$$H(S)=\frac{1}{S+2}$$

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(S)]=\frac{1}{R_1C}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}}=\mathrm{e}^{-2t}$$

$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t),y_{zi}(t)=C_1\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}}$($C_1$ 为一系数)

$e(kT)$ 是经 D/A 转换器转换成的一阶梯形激励。

在 $kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$ 间,D/A 转换器输出为 $e(kT)$,即
$$e(t)=e(kT),kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$$

由起始条件,当 $t=kT$ 时,
$$y(kT)=C_1\cdot \mathrm{e}^{-\frac{kT}{\tau_0}}$$

即
$$C_1=y(kT)\mathrm{e}^{\frac{kT}{\tau_0}}$$

所以
$$y_{zi}(t)=y(kT)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}$$

在 $kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$ 时间中,$e(t)$ 产生的零状态响应为

$$\begin{aligned}
y_{zs}(t)=h(t)*e(t)&=\frac{1}{R_1C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}}*e(t)\\
&=\frac{1}{R_1C}\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau_0}}*e(kT)\\
&=\frac{1}{R_1C}e(kT)\int_{kT}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-r)}\mathrm{d}r\\
&=\frac{\tau_0}{R_1C}e(kT)[1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}]\\
&=\frac{R_2e(kT)}{R_1+R_2}[1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}]\quad(kT\leqslant t\leqslant(k+1)T)
\end{aligned}$$

所以在 $kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$ 中的总响应为

$$\begin{aligned}
y(t)&=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)\\
&=y(kT)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}+e(kT)\frac{R_2}{R_1+R_2}[1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}]
\end{aligned}$$

将 $t=(k+1)T,\tau_0=\dfrac{1}{2},R_1=R_2=1\Omega$ 代入上式,得所求差分方程为

$$y[(k+1)T]=y(kT)\mathrm{e}^{-2T}+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{2T})e(kT)$$

$$y[(k+1)T]-\mathrm{e}^{-2T}y(kT)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{2T})e(kT)$$

题 7.11　连续时间系统中，常用有限时间积分器求取信号的平均值，即

$$y(t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}x(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

试证明可以将上述积分方程转换为下列差分方程来近似求解。

$$y(k)=\frac{1}{N}[x(k)+x(k-1)+\cdots+x(k-N+1)]=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}x(k-j)$$

【证明】　令 $\tau=NT$

$$y(t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{\tau}x(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{NT}\int_{t-NT}^{t}x(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

若 T 足够小，可认为在时间段 T 内，$x(t)$ 保持区间左端点的值不变，则 $y(t)$ 可近似为黎曼和。

$$y(t)=\frac{1}{NT}\sum_{j=0}^{N-1}x(t-jT)T$$

当 $t=kT$，可得 $y(kT)$，并记为 $y(k)$

$$y(kT)=\frac{1}{N}[x(kT)+x(kT-T)+x(kT-2T)+\cdots+x(kT-NT+T)]$$

$$\begin{aligned}y(k)&=\frac{1}{N}[x(k)+x(k-1)+\cdots+x(k-N+1)]\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}x(k-j)\end{aligned}$$

题 7.12　一初始状态不为零的离散系统。当激励为 $e(k)$ 时的全响应为

$$y_1(k)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k+1\right]\varepsilon(k)$$

当激励为 $-e(k)$ 时的全响应为

$$y_2(k)=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k-1\right\}\varepsilon(k)$$

求当初始状态增加一倍且激励为 $4e(k)$ 时的全响应。

【解】　当激励为 $e(k)$ 时，

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k+1\right]\varepsilon(k)$$

当激励为 $-e(k)$ 时，

$$y(k)=y_{zi}(k)-y_{zs}(k)=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k-1\right]\varepsilon(k)$$