地圖投影

葉 雪 安 著

龍 門 聯 合 書 局 出 版

前　　言

本書之內容詳論二種地圖投影，一爲我國多年採用之蘭孛氏圓錐投影，一爲高斯克呂格投影．此二種投影均適用於廣大之投影區域，均爲國際性之投影，尤以後者具有甚多的優越性更適用於我國． 茲將本書之主要內容述之如下：

首述大地測量對於地圖投影之要求，說明正形投影爲最適於地形圖． 第一章述正形投影基本公式，此爲重要之基礎． 第二章述雙重投影法，用此方法有時可使計算手續較直接投影爲簡便． 第三章詳述蘭孛氏正形切圓錐投影，其重點放在如何能使圓錐投影的計算手續簡化． Horvat 氏應用雙重投影法導出正形圓錐投影公式與由直接投影法所得者完全相同，利用此特點，Horvat 氏根據雙曲線函數及子午線弧長表導出適用於計算機之投影公式，此對於計算投影用表有一大進步． 方向與距離改化公式經變化後可用於東西不加限制的投影區域，並力求計算簡便．

第四章述蘭孛氏正形圓錐投影採用二條正長標準圈，亦稱割圓錐投影． 首先求出切圓錐投影與割圓錐投影之關係，然後將切圓錐投影之公式稍加變化後即可應用至割圓錐投影． 根據 Horvat 氏方法，詳述新投影表之製法並附算例．最後述方向改化及距離改化之應用使計算二三等三角點之平面坐標之工作簡易．

第五章詳述高斯克呂格投影． 本章之內容大半取材於保加利亞 Hristow 氏所著之高斯克呂格投影，重點放在如何利用投影表、計算機與對數表同時應用，使計算簡便，結果精確．

第六章述坐標變換． 第七章述蘭孛氏投影與高斯投影之比較，本章就尺度比的大小變化，接圖的便利，分帶辦法，算式的簡繁和精度等問題將二種投影作詳細之比較，以供取捨之參考． 本章所述一方面將

蘭孛氏投影加以改進，使計算方便，另一方面述高斯投影的優越點．經詳細比較後高斯投影在計算之簡繁上佔大的優勢，且各投影帶具有一樣性，又以蘇聯及世界各國大多數採用高斯投影，故我國採用高斯投影極有充分的理由．至於投影帶的寬度，按照蘇聯的方法採用 3° 寬的投影帶用於經濟建設地形圖（1:2000，1:5000 圖），而對於軍用測量可採用 6° 寬的投影帶．在 6° 寬的投影帶以國際一百萬分之一地圖一幅分為 144 幅十萬分之一地形圖． 1:5000 地形圖屬於 3° 寬的投影帶以十萬分之一地形圖一幅分為 256 幅五千分之一地形圖，五千分之一地形圖一幅分為 9 幅 1:2000 地形圖．第八章述算例及投影用表．

本書第四章第 33 節內之算例與雙曲線正切函數表等請劉葆樑先生計算，第 33 節內之表及算例請俞浩清先生計算，第八章內表及算例請郭祿光先生及楊銓曾先生計算，書內之插圖請全強保先生繪製書此誌謝．

葉雪安

1953 年 1 月 1 日於同濟大學

目　　錄

II. 視地球爲旋轉橢圓體

第四章 蘭孛氏正形圓錐投影應用二條正長標準圈

第五章 高斯克呂格投影

第六章　坐標變換

第七章　蘭孛氏投影與高斯投影之比較

第八章 公式一覽,投影用表,算例

地圖投影

（用於大地測量）

§ 1. 大地測量對於地圖投影之要求[註一]

大地測量基本之工作在求旋轉橢圓體面上各點相互間之位置，可用大三角測量與天文測量求得之．各點之位置用經緯度表示之．直角坐標不適於各主點之計算，蓋在極大區域內用後者表示各點之位置其數字極大，且每點位置之求得必先根據以前算就之點，倘數字爲極大，則其佈算必甚複雜．又因顧及實用上種種方便，總以經緯度表示之爲佳．

大地測量之工作可分爲下列數種：

1. 一等三角網
2. 填充網（Füllnetze），一等三角網之插點（Zwischenpunkt）及二等三角網
3. 小三角點作爲下列二種測量根據之用：
   a. 地籍測量（Katastervermessung）
   b. 地形測量（Topographie）．

1. 一等三角網

一等三角網用以求地球之形狀及大小並解決大地測量上諸實用問題，主要目的爲求大三角網各點之經緯度．

大三角網者乃旋轉橢圓體上各固定點連以大地線所組成之網．欲求大三角點在地球上之位置至少有一點用天文觀測求其經緯度，應用天文觀測求某一邊之方位角，並至少有一邊應用基線測量求其長度，大三角網爲全部測量工作最重要之基礎．

求各點在地球上位置以前，應先施行大三角網之角度觀測與平差，然後應用旋轉橢圓體上計算公式及與地位置算式求邊長、方位角及各點之經緯度。

由上觀之，知大三角網之計算不必用地圖投影。為顧及日後大地測量諸實用問題起見，此三角網亦應投影於平面上。所用投影方法則視諸實用問題之要求如何以為斷。

2. 填充網，一等網之插點及二等三角網

一切基於一等三角網造成之次等三角網，普通均用坐標平差法求其正確之坐標。此處宜用平面直角坐標系使各項計算工作簡單，又於解決大地測量諸實用問題時亦須利用平面直角坐標系作為一切根據。由旋轉橢圓體直接投影於平面上云者，意謂旋轉體面上各大三角點描寫於平面，經此手續後使平差方法簡易，且精度並不因此遜色，然後重返至旋轉體上。平面計算之優點全賴投影方法之是否簡單，故須導出應用極便之投影公式使各點之位置計算與一切改化計算（Reduktionen 例如方向及距離改化等）手續簡單合於規定之精度。在此處不斤斤計較各改化值之大小，而以所費手續之簡繁判斷所擇投影法之佳否。

正形投影因無角度變化故投影之手續較易，雖然此時倘不能證明應用正形投影可得最簡之投影公式，不得視正形投影為選擇投影時之必要條件，但三角點之平面坐標凡一切測量均依此為據，如無特種情形，仍以選擇適用於低等三角網最佳之投影法為宜。

3. 低等三角網

地籍測量與地形測量佔全部測量工作十分之九，故選擇投影時應注意及此。

a. 地籍測量

此處宜用平面直角坐標系以決定一切重要點之位置，每一坐標系所佔之區域應力求其廣，計算手續應力求簡單。用坐標值給各點於圖紙上其相互間之位置須與實地情形（即在旋轉橢圓體上之位置）儘量

相符，換言之，根據平面直角坐標算得之方向角與距離或由圖上直接量得之距離與方向儘量與實地情形相合.

計算大三角點時應用地圖投影之目的在求計算簡易以代橢圓體上之複雜計算. 適合於地籍測量所用之投影須使投影之誤差為極小，普通可略去不計，於是一變而為簡單之平面計算. 故在投影區域內須使其中最大之方向與距離變形及方向與距離改化不得超過規定之數，並儘量使其達於極小.

開始地籍測量時先在已設之三角網內填以三四等三角網使固定點愈加愈密，然後用導線測量與碎部測量完成地籍圖幅. 加小三角點於已設之三角網中，普通用插點法（即前後交會定點法），於計算插點時欲求精密，須先將旋轉橢圓體上實測之方向歸算於平面，方向與距離改化應使其極小，於實用時因其過小可不顧及，如此則計算之手續簡單，達省時之目的.

若投影之區域過大，則歸算於平面時方向與距離改化必超出規定之數，此時應將投影總區域分成數個投影帶，但劃分之區域愈求其廣，使劃分區域之個數愈少；因甲區域內邊境上各點應改算至乙區域內之位置，劃分區域愈多，則此種工作愈繁，欲投影帶之個數愈少，唯一之方法為選擇投影時使最大之改化數抑之極小.

實施測量時最大之工作為角度測量，故第一步應使投影後角度之變形（Winkelverzerrung）為極小. 由旋轉橢圓體描寫於平面時角度變化與角度改化有時互相抵消，有時互相累積，在方向改化最大處角度變化妨礙地圖投影之精度較方向改化為尤甚. 因方向改化不能避免，故最好能使角度變化為零. 由此可知如欲測得之球面方向，儘可能視為平面方向，當以正形投影最為適當，此時球面方向視為平面方向所引起之誤差完全為方向改化. 以大地線描寫形之彎曲度甚小，故此方向改化為數極微，且於選擇投影時注意此方向改化不得超過規定之數，故在實用上方向改化可視為零.

又距離測量及繪製平面圖亦須正形投影，其故如下：

在地籍測量除方向改化外，尙有長度比與距離改化．在非正形投影中長度比除隨地不同外，且在同一之點隨方向而異，其意謂在各個方向上其長度比例尺各不相同，如長度的投影誤差超出測量精度以外，應加顧及．

若長度比除隨點之位置而不同外且與方向有關，則在平面圖上因各個方向有其固有之比例尺，故在各點上沿任何方向比例尺各不相同，距離改化非常複雜．若投影爲正形，則比例尺在每幅平面圖上因其範圍不大可視爲一定．倘長度比在每幅圖面上儘量使其參差甚微，一切角度改化爲甚小時，則用大比例尺所繪之正形平面圖，可視爲球面上之相似描寫形．

地球面上任一面積經描寫於平面上亦受變更，一爲面積變化（Flächenverzerrung），一爲面積改化（Flächenreduktion）．在地圖上欲求某一區域之面積，應選擇等積投影，因此處面積變化爲零，但面積改化不能使其消滅．凡用方向與長度改化限制劃分投影區域之範圍，其中面積改化總較普通測量機關頒佈之面積誤差限度爲小．就各方面言，地籍圖之需要正形性尤爲重要，雖面積之計算不及等積投影之便利，但仍須採用．

由此觀之，對於地籍圖亦應採用正形投影．在正形投影中須擇一種投影其所具之方向改化應儘量使其極小，其長度比儘量近一，是爲大地測量最佳之投影．

b. 地形測量

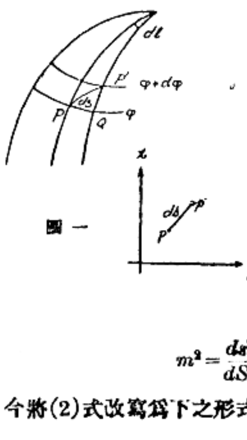
地形測量之目的爲測繪大中比例尺之地形圖，各幅地圖應互相啣接使無間隙，有此要求，故凡每幅地圖之具有固有坐標系者（例如多面體投影法（Polyederprojektion））均應捨去，然此種投影法有其特性，卽每幅地圖可視爲地球面上之相似描寫形是也．惟各幅地圖應使其接合，同時應使描寫正確．凡地圖投影適合於此二點者，吾人視爲最佳之

投影，地球面上各點之位置可由地圖上直接量得之．故就地形測量而言，若選定之正形投影能使最大之距離與方向改化為極小時，則此種正形投影即為最宜．又因此種投影適用於三角測量，故測量三角點所得之成果即直接用為地形測量之基礎，而一切大地測量之問題，得一統一之測量基礎，此尤吾人所希望者也．

第一章　正形投影基本公式

§ 2. 等量緯度 (isometrische Breite)

設橢圓體上有一點，其經緯度為 l,φ．以 M 代表子午線彎曲半徑，以 N 代表卯酉圈彎曲半徑；在平面上該點之描寫點之平面直角坐標設為 x, y，則投影公式之形式為：



圖一

$$x=f_1(\varphi,l)\ \text{及}\ y=f_2(\varphi,l) \tag{1}$$

在橢圓體上：　$P(\varphi,l), P'(\varphi+d\varphi, l+dl)$

在平面上：　$p(x,y), p'(x+dx, y+dy)$

$PP'=dS$，$PQ=N\cos\varphi dl$　$QP'=Md\varphi$

微分線段在橢圓體上：

$$dS^2=M^2d\varphi^2+N^2\cos^2\varphi dl^2\cdots \tag{2}$$

微分線段在平面上：$ds^2=dx^2+dy^2$　(3)

$\dfrac{ds}{dS}$ 稱曰長度比或稱尺度比率或放大比以 m 代表之，則

$$m^2=\frac{ds^2}{dS^2}=\frac{dx^2+dy^2}{M^2d\varphi^2+N^2\cos^2\varphi dl^2} \tag{4}$$

今將(2)式改寫為下之形式：

$$dS^2=N^2\cos^2\varphi\left(\frac{M^2}{N^2\cos^2\varphi}d\varphi^2+dl^2\right) \tag{5}$$

設

$$\frac{M}{N\cos\varphi}d\varphi=d\bar{u} \tag{5*}$$

則上式變爲 $$dS^2 = N^2\cos^2\varphi(d\mathfrak{q}^2 + dl^2) \tag{6}$$

應用(6)式之形式，則微分線段 dS 在橢圓體上成爲等量形式(isometrische Form)，按(5^*)式 $\mathfrak{q}$ 僅爲地理緯度之函數，稱曰等量緯度。$\mathfrak{q}$ 之值可由(5^*)式施行積分而得，按大地測量學得

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \qquad N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi^2)^{1/2}}.$$

由(5^*)式得 $$d\mathfrak{q} = \frac{(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} - e^2\frac{\cos\varphi d\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} \tag{7}$$

按 $$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right), \text{ 此處 } \ln \text{ 代表 } \log_e \tag{8}$$

(7)式右邊第二項中令 $\sin\varphi = x$ 則 $\cos\varphi d\varphi = dx$

$$e^2\int_0^\varphi \frac{dx}{1-e^2x^2} = \frac{e}{2}\ln\frac{1+ex}{1-ex} = \ln\left(\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}\right)^{e/2} \tag{9}$$

由(8)，(9)二式及(7)式得

$$\mathfrak{q} = \ln\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}\right)^{e/2}$$

$$\mathfrak{q} = \ln\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2} \tag{10}$$

用(10)式可製成表格由已知 φ 可檢出 $\mathfrak{q}$ 之值。又

$$e^{\mathfrak{q}} = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2} \tag{10$_a$}$$

§ 3. 等量及地理緯度差(isometrischer und geographischer Breitenunterschied)[註二]

設 $\Delta\varphi$ 爲地理緯度差，$\Delta\mathfrak{q}$ 爲相當 $\Delta\varphi$ 之等量緯度差，由(10)式得

$$\mathfrak{q} + \Delta\mathfrak{q} = F(\varphi + \Delta\varphi)$$

應用 Taylor 級數

$$\Delta\mathfrak{q} = F'(\varphi)\Delta\varphi + \frac{1}{2}F''(\varphi)\Delta\varphi^2 + \frac{1}{6}F'''(\varphi)\Delta\varphi^3 + \frac{1}{24}F^{IV}(\varphi)\Delta\varphi^4 + \frac{1}{120}F^{V}(\varphi)\Delta\varphi^5 + \cdots\cdots \tag{11}$$

此處　　$F'(\varphi)=\frac{d\overline{\omega}}{d\varphi}=\frac{M}{N\cos\varphi}=\frac{1}{V^2\cos\varphi}$(參考 §2,(5*)式)

$V^2=1+\eta^2=1+e'^2\cos^2\varphi$, $e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}$, a,b 為地球橢圓之長短半徑.

應用下之關係式:

$$\frac{dV^2}{d\varphi}=-2\eta^2\tan\varphi$$

由 $F'(\varphi)$ 得其他高次微分商,以之代入(11)式並應用下之記號:

$$t=\tan\varphi \quad \text{則得:}$$

$$\begin{aligned}\Delta\overline{\omega}\cos\varphi=&\frac{\Delta\varphi}{V^2}+\frac{1}{2}\tan\varphi(1+3\eta^2)\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^2+\frac{1}{6}(1+2t^2+4\eta^2+6\eta t^2+3\eta^4\\&+12\eta^4t^2)\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^3+\frac{1}{24}\tan\varphi(5+6t^2+19\eta^2+24\eta^2t^2+47\eta^4+30\eta^4t^2\\&+33\eta^6+60\eta^6t^2)\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^4+\frac{1}{120}(5+28t^2+24t^4+\eta^2\text{項})\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^5\end{aligned}\quad(12)$$

又

$$\begin{aligned}\Delta\overline{\omega}^2\cos^2\varphi=&\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^2+\tan\varphi(1+3\eta^2)\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^3+\frac{1}{12}(4+11t^2+16\eta^2+42\eta^2t^2\\&+12\eta^4+75\eta^4t^2)\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^4+\frac{1}{12}\tan\varphi(7+10t^2+\eta^2\text{項})\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^5+\cdots\end{aligned}\quad(13)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta\overline{\omega}^3\cos^3\varphi=&\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^3+\frac{3}{2}\tan\varphi(1+3\eta^2)\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^4+\frac{1}{4}(2+7t^2+\eta^2\text{項})\\&\cdot\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^5+\cdots\cdots\\\Delta\overline{\omega}^4\cos^4\varphi=&\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^4+2\tan\varphi(1+\eta^2\text{項})\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^5+\cdots\cdots\\\Delta\overline{\omega}^5\cos^5\varphi=&\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^5+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(13^*)$$

欲求 $\Delta\varphi$ 為 $\Delta\overline{\omega}$ 之函數可求(12)式之反算式. 求反算式可用級數回求法,所用公式如下:

$$\left.\begin{aligned}U&=z+\frac{1}{2}\alpha_1z^2+\frac{1}{6}\alpha_2z^3+\frac{1}{24}\alpha_3z^4\ \frac{1}{120}\alpha_4z^5\cdots\cdots\\z&=U+\frac{1}{2}\beta_1U^2+\frac{1}{6}\beta_2U^3+\frac{1}{24}\beta_3U^4+\frac{1}{120}\beta_4U^5\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(14)$$

此處
$$\beta_1=-a_1$$
$$\beta_2=+(3a_1^2-a_2)$$
$$\beta_3=-(15a_1^3-10a_1a_2+a_3)$$
$$\beta_4=+(105a_1^4-105a_1^2a_2+15a_1a_3+10a_2^2-a_4)$$

以(14)式應用於(12)式則得:

$$\frac{\Delta\varphi}{V^2}=\Delta\overline{u}\cos\varphi-\frac{1}{2}\tan\varphi(1+3\eta^2)(\Delta\overline{u}\cos\varphi)^2-\frac{1}{6}(1-t^2+4\eta^2-12\eta^2t^2$$
$$+3\eta^4-15\eta^4t^2)(\Delta\overline{u}\cos\varphi)^3+\frac{1}{24}\tan\varphi(5-t^2+51\eta^2-39\eta^2t^2+103\eta^4$$
$$-135\eta^4t^2+57\eta^6-105\eta^6t^2)(\Delta\overline{u}\cos\varphi)^4+\frac{1}{120}(5-18t^2+t^4+\eta^2\text{項})$$
$$(\Delta\overline{u}\cos\varphi)^5+\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

§ 4. 子午線弧長化爲等量緯度差之函數及其反式[註二]

設 G 爲子午線長由赤道至 φ，以 ΔG 表相當等量緯度差 $\Delta\overline{u}$ 之子午線長，仿照(11)式作同樣之展開，得:

$$\Delta G=\frac{dG}{d\overline{u}}\Delta\overline{u}+\frac{1}{2}\frac{d^2G}{d\overline{u}^2}\Delta\overline{u}^2+\frac{1}{6}\frac{d^3G}{d\overline{u}^3}\Delta\overline{u}^3+\frac{1}{24}\frac{d^4G}{d\overline{u}^4}\Delta\overline{u}^4$$
$$+\frac{1}{120}\frac{d^5G}{d\overline{u}^5}\Delta\overline{u}^5+\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

由(5*)式得
$$\frac{d\varphi}{d\overline{u}}=\frac{N\cos\varphi}{M}$$

又
$$\frac{dG}{d\varphi}=M$$

故
$$\frac{dG}{d\overline{u}}=N\cos\varphi$$

由此得高次微分商代入(16)式，得

$$\frac{\Delta G}{N}=\Delta\overline{u}\cos\varphi-\frac{1}{2}\tan\varphi(\Delta\overline{u}\cos\varphi)^2-\frac{1}{6}(1-t^2+\eta^2)(\Delta\overline{u}\cos\varphi)^3+$$
$$+\frac{1}{24}\tan\varphi(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4)(\Delta\overline{u}\cos\varphi)^4+$$
$$+\frac{1}{120}(5-18t^2+t^4+\eta^2\text{項})(\Delta\overline{u}\cos\varphi)^5+\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

按(14)式求(17)式之反式,得:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\bar{u}\cos\varphi=&\frac{\Delta G}{N}+\frac{1}{2}\tan\varphi\left(\frac{\Delta G}{N}\right)^2+\frac{1}{6}(1+2t^2+\eta^2)\left(\frac{\Delta G}{N}\right)^3+\\&+\frac{1}{24}\tan\varphi(5+6t^2+\eta^2-4\eta^4)\left(\frac{\Delta G}{N}\right)^4+\\&+\frac{1}{120}(5+28t^2+24t^4+\eta^2\text{項})\left(\frac{\Delta G}{N}\right)^5\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

§ 5　橢圓體上正形投影公式之一般形式

若導入等量緯度則一切進行非常簡單,投影公式變為:

$$x=f_1(\bar{u},l)\qquad y=f_2(\bar{u},l)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

由上式得

$$dx=\frac{\partial f_1(\bar{u},l)}{\partial\bar{u}}d\bar{u}+\frac{\partial f_1(\bar{u},l)}{\partial l}dl\ \text{及}\ dy=\frac{\partial f_2(\bar{u},l)}{\partial\bar{u}}d\bar{u}+\frac{\partial f_2(\bar{u},l)}{\partial l}dl$$

或寫為

$$dx=\frac{\partial x}{\partial\bar{u}}d\bar{u}+\frac{\partial x}{\partial l}dl\ \text{及}\ dy=\frac{\partial y}{\partial\bar{u}}d\bar{u}+\frac{\partial y}{\partial l}dl\qquad(20)$$

$$\begin{aligned}ds^2=dx^2+dy^2=&\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\bar{u}}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\bar{u}}\right)^2\right\}d\bar{u}^2+\left\{\left(\frac{\partial x}{dl}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right\}dl^2\\&+2\left(\frac{\partial x}{\partial\bar{u}}\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial y}{\partial\bar{u}}\frac{\partial y}{\partial l}\right)d\bar{u}dl\end{aligned}\qquad(21)$$

設

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial x}{\partial\bar{u}}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\bar{u}}\right)^2=E'\quad\frac{\partial x}{\partial\bar{u}}\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial y}{\partial\bar{u}}\frac{\partial y}{\partial l}=F'\\&\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2=G'\end{aligned}\right\}(22)$$

由此得

$$ds^2=E'd\bar{u}^2+2F'd\bar{u}dl+G'dl^2\qquad(23)$$

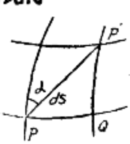


圖　二

$$m^2=\frac{ds^2}{dS^2}=\frac{E'd\bar{u}^2+2F'd\bar{u}dl+G'dl^2}{N^2\cos^2\varphi(d\bar{u}^2+dl^2)}\qquad(24)$$

按圖二得 $\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\dfrac{P'Q}{QP}=\dfrac{M\,d\varphi}{N\cos\varphi dl}$

由此得　$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{N\cos\varphi dl}{Md\varphi}$

按§2(5*) $$d\varpi=\frac{M}{N\cos\varphi}d\varphi$$

故 $$\mathrm{tg}\alpha=\frac{dl}{d\varpi}\qquad(25)$$

(24)式之分母

$$N^2\cos^2(d\varpi^2+\mathrm{tg}^2\alpha d\varpi^2)=N^2\cos^2\varphi d\varpi^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=N^2\cos^2\varphi\frac{d\varpi^2}{\cos^2\alpha}$$

倘(24)式之分子亦用同法使 dl 消去，則得

$$m^2=\frac{(E'd\varpi^2+2F'd\varpi^2\mathrm{tg}\alpha+G'd\varpi^2\mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha}{N^2\cos^2\varphi d\varpi^2}$$

或 $$m^2=\frac{E'\cos^2\alpha+2F'\sin\alpha\cos\alpha+G'\sin^2\alpha}{N^2\cos^2\varphi}\qquad(26)$$

正形投影之條件為長度比與方向 α 脫離關係，故須 $F'=0$, $E'=G'$，如是則

$$m^2=\frac{E'}{N^2\cos^2\varphi}=\frac{G'}{N^2\cos^2\varphi}$$ 此式與 α 脫離關係。 (27)

按二條件： $F'=0$ $E'=G'$ 則由(22)得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial\varpi}\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial y}{\partial\varpi}\frac{\partial y}{\partial l}=0\\&\left(\frac{\partial x}{\partial\varpi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varpi}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

由(28)式之第一式得

$$\frac{\partial y}{\partial l}=-\frac{\frac{\partial x}{\partial\varpi}\frac{\partial x}{\partial l}}{\frac{\partial y}{\partial\varpi}}$$

以上式代入(28)式之第二式則得

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varpi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varpi}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial\varpi}\right)^2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial\varpi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varpi}\right)^2\right)$$

上式僅在下之二情形下方可成立，即: