土体穩定的靜力計算

W. 費蘭紐斯 著

水利出版社

土体穩定的靜力計算

考慮摩擦力和凝聚力（附着力），
并假定系圓柱滑动面

土体穩定的靜力計算

原 書 名	ERDSTATISCHE BERECHNUNGEN
原 著 者	FELLENIUS
原出版处	VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
原出版年份	1948
譯 者	陈愈炯
出 版 者	水利出版社（北京和平門內北新華街35号） 北京市書刊出版業營業許可証出字第080号
印 刷 者	水利出版社印刷厂（北京西城成方街13号）
發 行 者	新華書店

46千字　787×1092　1/32开　2 3/16 印張

1957年9月第一版　北京第一次印刷　印数1—2,500

統一書号：15047.80　　定价：(11)0.40元

初版序言

在这本小册子里对在按圓柱面滑动的假定下的土体静力問題，作了系統分析的尝試。最初，K.E.潘得生(Pettersson)和S.胡尔頓(Hultin)曾在文献中詳細論述过这种滑动面，不过論述只限于一些比較特殊的情况和假定滑动面上僅有摩擦力的情况。

本書論述的重点是假定滑动面上只有凝聚力或既有凝聚力又有摩擦力的情况。

这里所討論的計算方法对实际的土压力計算幷無多大意义，但是对一般的土体静力計算而言，例如对土坡和疏松地基上的碼头、堤防的穩定性計算以及土体滑动的危險性計算則有較大的意义。

圓柱滑动面——与平面滑动面一样——不过是一种假定的情况。但在極大多数情形中它比平面滑动面更接近于实际。

对于少数純理論的情况而言，通常最好采用一般的彈性理論來求解土体静力問題。但在較多的实际情况下，土体具有不規則的形狀，幷且在同一建筑物中各層土質也不一致，因此应用这种方法的可能性就很小。遇到这种情形，借本書中所述的方法可以达到目的，幷能对問題具有更明确的理解。

作者希望这本小册子是实用的，幷对本書所提出的方法应用于实际問題的論文表示感謝。

斯篤哥尔摩，1926年7月

W.費蘭紐斯

第 二 版 序 言

在本書的初版售完以后，出版社建議我編寫第二版，我欣然同意了他的建議。

在第二版中，除作了少許不重要的修正外，幷乘机补編了下列的一些材料：1.关于圖4a的平衡条件；2.在摩擦力和凝聚力兼有的情况下的近似解法；3.在堤壩建筑上的应用，以及圖 27 和 28；4.应用于哥頓堡港灣某实例中說明以随深度而增加的凝聚力代替了摩擦力和凝聚力兼有的情形；5.作用于水平土壤表面上垂直荷重的計算；6.补充了少許参考文獻。

斯篤哥尔摩，1939 年 7 月

W.費蘭紐斯

目 錄

概　論

在近代技術水平下直到不久以前，对于土压力計算和其它土体静力計算差不多千篇一律地在計算中当作土体內只有摩擦力，并假定滑动面是平面。

不过根据已發生的土体滑动情形看來，在某些土体静力分析中，必須把滑动面当作曲面來計算〔1〕、〔2〕、〔3〕。

对某些土（特别是粘土）進行詳細研究后，就將概念轉向到聚力的意义上來了〔4〕、〔5〕、〔6〕。

这里把与正压力無关的抗剪强度称为凝聚力当然并不完全正确；从某种观点出發，定名为附着力或許还比較正确些。为了合乎旧的習慣起見，本書中仍保留第一种名称，这一名称勿与固体內部的凝聚力相混淆。

瑞典國家鉄道工程地質委員会曾对这方面進行了詳尽的解釋，并强調在計算中必須認为兼有摩擦力和凝聚力〔7〕。但該文献中只大略說明了相应的諸計算方法。关于这个問題亦可参見〔8〕、〔9〕、〔10〕、〔11〕。

本書試圖对所屬的問題進行比較系統的分析，其目的：一方面在于对某些簡單情形直接提供穩定条件，另一方面在其他情况下減輕尋求最危險滑动面的工作。

本書首先对只有凝聚力的少数情形進行分析，而將重点放在摩擦力和凝聚力兼有的一些情形中。在这兩种主要情况

注：〔 〕号內的編号是指書末的参考文献中相应的編号。

下，都以平面滑动面和曲面即圓柱滑动面進行分析。对土压力的計算而言，由于它在此处并無多大意义，只就填土表面为水平时主动压力作用在鉛垂牆背上的这种情形加以分析。一般的土体靜力計算的范例主要是指水平地面下的平面斜坡；不过也指出了在比較复雜的情形下的几种应用。

以后將采用下列符号：

k＝單位面積的凝聚力(附着力)，以噸/平方公尺計；

φ＝內摩擦角（$\mathrm{tg}\,\varphi$＝摩擦系数）；

γ＝土壤的容重，以噸/立方公尺計。

和通常一样，采用以垂直于圖紙寬为一公尺的土条進行計算。

I. 只有凝聚力

A. 只有凝聚力，平面滑动面

1. 鉛垂的牆背，水平的填土表面

如果假定土压力的作用为水平方向（圖 1），則其合力作用在牆背的下三分点处。对于与水平面成傾斜角 ω 的任意滑动面 AD 而言，得：

土楔体的重量

$$P=\frac{\gamma h^2}{2\,\mathrm{tg}\,\omega},$$

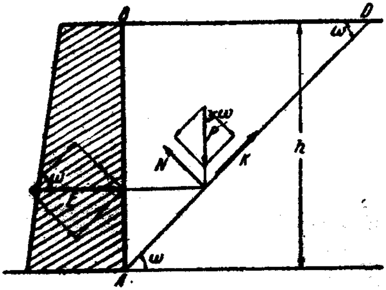

圖 1　鉛垂牆背上的土压力，只有凝聚力，平面滑动面

凝聚力 $K=k(AD)=\dfrac{kh}{\sin\omega}$.

投影在 AD 上后，得平衡方程式：

$$E\cos\omega+\frac{kh}{\sin\omega}-\frac{\gamma h^2}{2\,\mathrm{tg}\,\omega}\sin\omega=0, \qquad (1)$$

从上式，得：

$$E=\frac{\gamma h^2}{2}-\frac{kh}{\sin\omega\cos\omega}=\frac{\gamma h^2}{2}-\frac{2kh}{\sin 2\omega}. \qquad (2)$$

当 $\dfrac{1}{\sin 2\omega}$ 为最小时，就是当

$$\underline{\omega=45^\circ}$$

时，E 值为最大。于是得：

$$\boxed{E=\frac{\gamma h^2}{2}-2kh} \qquad (3)$$

就是說，土压力等于“流体压力”減去作用在牆背面或滑楔自由表面的凝聚力的兩倍。

如果 $E=0$，就是說鉛垂土牆自由直立到高度 h，則得：

$$\frac{\gamma h^2}{2}=2kh,$$

从上式，得：

$$k=\frac{\gamma h}{4}. \qquad (4)$$

反之：如果凝聚力 $=k$，則鉛垂土坡能無支承地自由直立到高度

$$\boxed{h=\frac{4k}{\gamma}} \qquad (5)$$

例如一容重为 1.6 噸/立方公尺的理想粘性土，能自由直立达 3 公尺高，相当于平面滑动面的假定下的凝聚力（应作單位面積凝聚力——譯注）$=\dfrac{1.6\times 3}{4}=1.2$ 噸/平方公尺。

同样的土（粘土）在水中（容重＝0.6并假定k不变）能直立到达$\frac{4\times 1.2}{0.6}=8$公尺高。

2. 水平地面下的平面斜坡

一与水平面倾斜成θ角及垂直高度为h的土坡(圖2)。对任意一与水平面倾斜成ω角的滑动面而言，得：

土楔体的重量$P=\frac{\gamma h^2}{2}\ \frac{\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta\sin\omega}$,

有效的凝聚力$K=k(AD)=\frac{kh}{\sin\omega}$,

投影在滑动面上后：

$$\frac{kh}{\sin\omega}-\frac{\gamma h^2}{2}\ \frac{\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta\sin\omega}\sin\omega=0, \qquad (6)$$

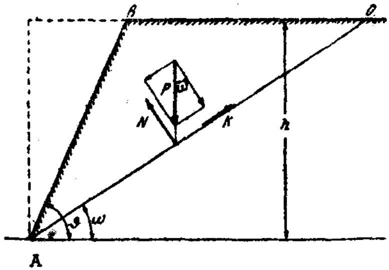

圖2　土坡的穩定，只有凝聚力，平面滑动面

从上式，得：

$$k=\frac{\gamma h}{2}\ \frac{\sin\omega\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta}. \qquad (7)$$

最危險滑动面就是k值为最大的滑动面：

$$\because\ \sin\omega\sin(\theta-\omega)=\text{最大};$$

微分，得：$\sin(\theta-\omega)\cos\omega-\sin\omega\cos(\theta-\omega)=0$;

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\theta-\omega);$$

$$\omega = \frac{\theta}{2}. \tag{8}$$

因此最危險的平面滑动面平分坡面与水平面間的夾角。在最危險滑动面上所需的單位凝聚力，根据（7）式为：

$$k = \frac{\gamma h}{2}\ \frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}};$$

$$k = \frac{\gamma h}{4}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{9}$$

当坡角为θ的土坡恰好在高度h下維持平衡，上式就表示土的單位凝聚力，而 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$称为凝聚力因数。

反之：如果已知單位凝聚力等于k，則坡角为θ的斜坡能筑高至：

$$\boxed{h = \frac{4k}{\gamma}\cot\frac{\theta}{2}} \tag{10}$$

如果令$\theta=90°$，則此公式轉变成为前述公式(4)和(5)。

当坡角較小时，本計算方法所算得的結果与应用下述假定滑动面为曲面的方法所獲得的結果相差很大。因此在实際情况中应用此方法时須加小心。

B. 只有凝聚力，曲面滑动面

假定圓柱形滑动面是通过擋土牆的趾部或土坡的坡趾。

1. 鉛垂的牆背，水平的填土表面

假設：土压力是沿着水平方向作用，其合力作用在牆下

的三分点处。

兹研究任意一个以 O 点为圆心的圆柱滑动面 AFD（圖 3）。令直綫 AD 与水平面間的夾角 ω 和圓弧 AFD 所对的中心角的一半 α 为变量。

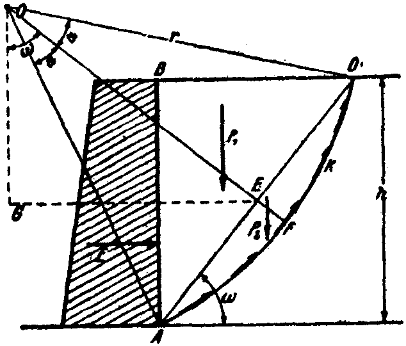

圖 3　鉛垂牆背上的土压力，只有凝聚力，曲面滑动面

作用在土体 $ABDF$ 上的力，除了重力 (P_1+P_2) 和土压力 E 外，还有垂直于滑动面并通过圓心 O 的所有正压力和滑动面上各点沿着切綫方向作用的單位凝聚力。

这样就可獲得对圓心 O 的力矩的平衡方程式。

自圖 3 中易于找到：

$$BD=\frac{h}{\operatorname{tg}\omega},\quad AD=\frac{h}{\sin\omega},\quad OE=\frac{h}{2\sin\omega\operatorname{tg}\alpha},$$

$$EG=\frac{h}{2\operatorname{tg}\alpha},\quad OG=\frac{h}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega},\quad OD=r=\frac{h}{2\sin\alpha\sin\omega}.$$

土楔体 $ABDE(=P_1)$ 的力矩 $=\dfrac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\omega}\left(\dfrac{h}{2\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{h}{6\operatorname{tg}\omega}\right)$。

弓形 $AEDF(=P_2)$ 的力矩可按熟知的关系求得，即弓形的重心与圓心間的距离等于弓形的弦長的三次方除以弓形面積的 12 倍，所以力矩 $=\gamma\dfrac{AD^3}{12}\sin\omega=\gamma\dfrac{h^3}{12\sin^2\omega}$。

凝聚力的力矩 $=k(AFD)r=k\cdot 2\alpha r^2$

$$=2k\alpha\frac{h^2}{4\sin^2\alpha\sin^2\omega}。$$

平衡方程式为：

$$E\left(\frac{h}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega}+\frac{h}{6}\right)+2ka\frac{h^2}{4\sin^2\alpha\sin^2\omega}$$

$$=\frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\omega}\left(\frac{h}{2\operatorname{tg}\alpha}-\frac{h}{6\operatorname{tg}\omega}\right)+\frac{\gamma h^3}{12\sin^2\omega}. \qquad (11)$$

$$\text{右面部分}=\frac{\gamma h^2}{2}\left(\frac{h}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega}-\frac{h}{6\operatorname{tg}^2\omega}+\frac{h}{6\sin^2\omega}\right)$$

$$=\frac{\gamma h^2}{2}\left[\frac{h}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega}+\frac{h}{6}\left(\frac{1}{\sin^2\omega}-\frac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}\right)\right]$$

$$=\frac{\gamma h^2}{2}\left(\frac{h}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega}+\frac{h}{6}\right).$$

由是獲得：

$$E=\frac{\gamma h^2}{2}-2kh\frac{\dfrac{a}{4\sin^2\alpha\sin^2\omega}}{\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega}+\dfrac{1}{6}}=\frac{\gamma h^2}{2}-2khf(\alpha,\omega),$$

上式中

$$f(\alpha,\omega)=\frac{a}{\dfrac{4\sin^2\alpha\sin^2\omega}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega}+\dfrac{4}{6}\sin^2\alpha\sin^2\omega} \qquad (12)$$

或

$$f(\alpha,\omega)=\frac{a}{\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\sin 2\omega+\dfrac{2}{3}\sin^2\alpha\sin^2\omega}. \qquad (13)$$

当 $f(\alpha,\omega)$=最小时，E 值为最大。于是最危險滑动面的 ω 和 α 值可由下述条件來决定：

$$\text{I}: \frac{\partial f}{\partial\omega}=0; \qquad \text{II}: \frac{\partial f}{\partial\alpha}=0.$$

$$\text{I}: -a\left(\sin 2\alpha\cos 2\omega+\frac{2}{3}\sin^2\alpha\, 2\sin\omega\cos\omega\right)=0,$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\omega + \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \sin 2\omega = 0,$$

$$\underline{\operatorname{tg} 2\omega = -3 \cot \alpha.} \tag{14}$$

（对平面滑动面而言，$\alpha=0$，所以$2\omega=90°$，$\omega=45°$，与前述結果相吻合。）

$$\text{II}: \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\omega + \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \sin^2 \omega$$

$$-\alpha\left(\frac{1}{2} \sin 2\omega \cos 2\alpha \cdot 2 + \frac{2}{3} \sin^2 \omega \, 2 \sin \alpha \cos \alpha\right) = 0,$$

$$\sin^2 \omega\left(\frac{2}{3} \sin^2 \alpha - \frac{2}{3} \alpha \sin 2\alpha\right) = \sin 2\omega\left(\alpha \cos 2\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{\sin^2 \omega}{\sin 2\omega} = \frac{\alpha \cos 2\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}}{\frac{2}{3}(\sin^2 \alpha - \alpha \sin 2\alpha)},$$

$$\underline{\operatorname{tg} \omega = \frac{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\frac{2}{3}(\sin^2 \alpha - \alpha \sin 2\alpha)}.} \tag{15}$$

自(14)和(15)式顯然不可能直接解得 α 和 ω 值。但可將(14)式的形式寫为 $\operatorname{tg} \omega = \frac{1 + \sqrt{1 + 9 \cot^2 \alpha}}{3 \cot \alpha}$，于是自此式和(15)式能獲得一个只含未知数 α 的方程式，但是这方程式不能直接求解。

(14)和(15)式最好采用試算法來求解：以不同的 α 值代入(14)和(15)式

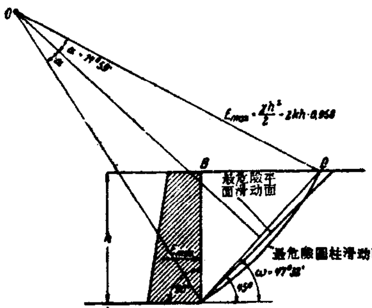

圖 4 鉛垂的牆背；只有凝聚力，最危險的平面和最危險的曲面滑动面

中，一部分按照(14)式，一部分按照(15)式算得相应的ω值后，分别繪成曲綫，此兩曲綫的交点即系解答。

这样分析的結果是：$\alpha=14°59'$和$\omega=47°32'$，或粗略地为：$\alpha=15°$和$\omega=47\frac{1}{2}°$（圖4）。

α和ω的微小增減对E值的影响并不大。

如果將上述解得的α和ω值代入(13)式中，則得：

$$f(\alpha,\omega)=0.958$$

和

$$\boxed{E=\frac{\gamma h^2}{2}-2kh0.958}. \qquad (16)$$

如果$E=0$，就是說鉛垂土坡能自由直立至高度h，則得：

$$\underline{k=\frac{\gamma h}{4}\cdot\frac{1}{0.958}=\frac{\gamma h}{4}1.044.} \qquad (17)$$

反之：如果已知單位凝聚力$=k$，則鉛垂土坡能自由直立的高度为：

$$\boxed{h=\frac{4k}{\gamma}0.958} \qquad (18)$$

以这些公式与假定为平面滑动面时所算得的相应的公式（3）、（4）和（5）式相比較，一般說來其差別并不大。对k和h而言，其差別只有4～5%。但是当h值較小时，E值的相对差就較大。当h值較大时，在本情形中（鉛垂的牆背），無論以平面或曲面滑动面來計算，E值的出入是不大的。

不过按曲面滑动面算得的E值，永远是比平面滑动面的E值大些。

圖4所示为在不同的假定情况下所求得的最危險滑动面的相互位置。

2. 水平地面下的平面斜坡

按前述同样的方法得平衡方程式（圖 4 a）：

$$\boxed{Pa = Ksr} \quad 和 \quad \boxed{K = \frac{Pa}{sr}} \qquad (18\,a)$$

上式中：

K＝土坡在極限平衡狀态时滑动面（ADC）單位面積上所需的凝聚力（注意：前述代表單位面積凝聚力的符号是 k——譯者）；

P＝單位寬度（垂直于紙面）滑动土体的重量；

a＝滑动面中心 M 与通过滑动土体的重心 E 的鉛垂綫之間的水平距离；

r＝滑动面的半徑；

s＝滑动面的長度（曲綫 ADC）（参照〔5〕）。

a ）通过坡趾的滑动面

土坡的垂直高度为 h，与水平面所成的坡角为 θ（圖 5 ）。

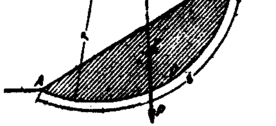

圖 4 a 土坡的穩定，只有凝聚力，曲面滑动面（示意圖）

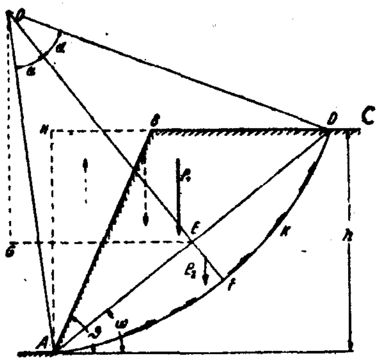

圖 5 土坡的穩定，只有凝聚力，通过坡趾的曲面滑动面

兹研究一通过坡趾的任意圆柱滑动面 AFD，該滑动面交地表面于 C 点的左侧。分析方法与第 I 節中所用者相同。

土楔 ABD 对滑动面圆心的力矩等于土楔 AHD 与 AHB 的力矩之差，因此：

$$=\frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\omega}\left(\frac{h}{2\operatorname{tg}\alpha}-\frac{h}{6\operatorname{tg}\omega}\right)-\frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\theta}\left(\frac{h}{2\operatorname{tg}\alpha}-\frac{h}{2\operatorname{tg}\omega}+\frac{h}{3\operatorname{tg}\theta}\right)$$

$$=\frac{\gamma h^3}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\omega}\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{6\operatorname{tg}\omega}\right)-\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{2\operatorname{tg}\omega}+\frac{1}{3\operatorname{tg}\theta}\right)\right].$$

平衡方程式变成（参照 11 式）：

$$2k\alpha\frac{h^2}{4\sin^2\alpha\sin\omega}=\frac{\gamma h^3}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\omega}\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{6\operatorname{tg}\omega}\right)-\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{2\operatorname{tg}\omega}+\frac{1}{3\operatorname{tg}\theta}\right)\right]+\frac{\gamma h^3}{12\sin^2\omega},\tag{19}$$

从上式，得：

$$k=\frac{\gamma h}{4}\quad\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega}-\frac{1}{6\operatorname{tg}^2\omega}-\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}+\frac{1}{2\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\omega}-\frac{1}{3\operatorname{tg}^2\theta}+\frac{1}{6\sin^2\omega}\right);$$

$$k=\frac{\gamma h}{4}\quad\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega}-\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}+\frac{1}{2\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\omega}-\frac{1}{3\operatorname{tg}^2\theta}+\frac{1}{6}\right).\tag{20}$$

最危険滑动面就是 k 值为最大的滑动面。

这就是当：

$$f(\alpha,\omega)=\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega}-\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}+\frac{1}{2\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\omega}-\frac{1}{3\operatorname{tg}^2\theta}+\frac{1}{6}\right)=\text{最大时的滑动面。}$$