数学 2

全日制十年制学校高中课本·第二册

SHUXUE

SHUXUE

人民教育出版社

全日制十年制学校高中课本
（试 用 本）
数 学
第二册
中小学通用教材数学编写组编
*
人民教育出版社出版
北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京印刷一厂印刷
*
1979年6月第1版 1981年1月第2次印刷
书号 K7012·0158 定价 0.39 元

目　　录

第五章　空间图形

在初中，我们研究过一些平面图形的性质、画法、有关计算和应用以及视图的基本知识．但是在生产和生活中，只知道这些几何知识还是不够的．例如，修筑堤坝、建造厂房、革新技术等，都需要进一步了解空间图形的有关问题．

空间图形由空间的点、线、面所构成，可以看作是空间点的集合．以前我们学过的柱、锥、台、球等，都属于空间图形．

这一章我们将在平面几何知识的基础上，进一步研究空间图形的性质、画法、有关计算和应用．

一　平面

5.1　平面

我们常见的桌面、黑板面、镜面以及平静的水面等，都给人们以平面的形象，但这样的平面不过是几何里所说的平面的一部分，几何里的平面是无限延展的．

当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们都很象平行四边形．因此，通常画平行四边形来表示平面(图 5-1)．

在画平行四边形表示水平平面时，通常把它的锐角画成 45°，横边画成等于邻边的两倍*．如果一个平面的一部分被

* 在某些情况下，也画成有 60° 角的菱形．

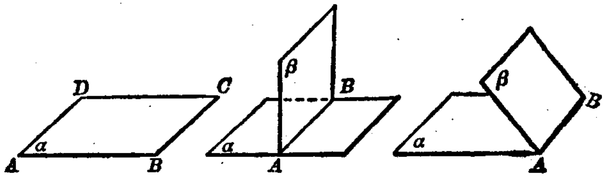


图 5-1

另一个平面遮住时，把被遮住的线条画成虚线或不画，这样看起来立体感就强一些.

平面通常用希腊字母 α、β、γ 等来表示，写作平面 α、β、γ 等，也可以用表示平行四边形两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC(图 5-1).

练　习

1. 什么叫做空间图形？
2. 平面有无界限？通常把它画成什么形状？

5.2　平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出平面有下面三个基本性质. 我们把它当作公理，作为进一步推理的基础.

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内(图 5-2).

这时我们说直线在平面内，或者说平面经过直线.

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上.

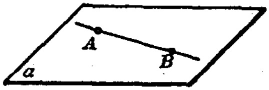


图 5-2

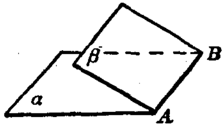


图 5-3

点 A 在直线 a 上，可记作 $A\in a$；点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；直线 a 在平面 α 内，记作 $a\subset\alpha$.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这个点的一条直线(图 5-3).

例如，教室内相邻两墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线.

平面 α 与平面 β 相交于直线 a，可记作 $\alpha\cap\beta=a$.

公理 3　经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面(图 5-4).

这时，我们也说“不共线三点确定一平面”.

例如，一扇门用两个枢轴和一把锁就可以固定了.

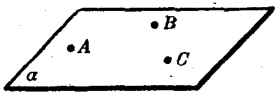


图 5-4

根据上述公理，可以得出下面的推论：

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

如图 5-5 甲，A 是直线 a 外的一点，在 a 上取两点 B、C，经过这三点有且只有一个平面 α，又因 B、C 在 α 内，所以 a 在 α 内. 因此，经过 a 和 A 有且只有一个平面.

同样，可以得出下面两个推论：

推论2 经过两条相交直线，有且只有一个平面（图5-5乙）.

推论3 经过两条平行直线，有且只有一个平面（图5-5丙）.

甲　　　　乙　　　　丙

图 5-5

练　习

1. 任意三点能否确定一平面？任意一点和一条直线呢？
2. 不过同一点且两两相交的三条直线在同一平面内，为什么？

5.3 平面图形的画法

在纸上或黑板上画空间的平面图形时，和平面几何不同，不是画它的真实形状，而是画它的直观图．这正像我们把空间里的一个正方形，看成像一个平行四边形一样(图5-6)．我们来研究水平平面图形的画法，下面讲比较常用的两种．

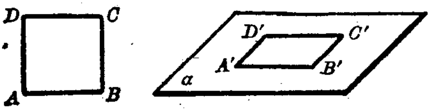


图 5-6

第一种画法的规则是：

1. 在图形上取互相垂直的 x 轴、y 轴，把它画成对应的

x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$（或 135°）. 两个轴确定的平面表示水平平面.

2. **图形上平行于 x 轴或 y 轴的线段*，分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段.**

3. **平行于 x 轴的线段，长度不变；平行于 y 轴的线段，长度变为原来的一半.**

下面举例说明具体画法.

例 1 画正六边形的直观图.

画法：1）在正六边形 $ABCDEF$ 上，取对角线 AD 为 x 轴，取轴线 GH 为 y 轴. 画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$（或 135°）.

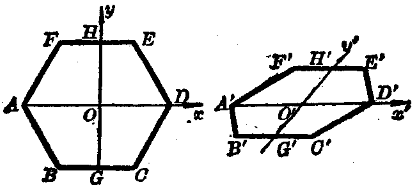


图 5-7

2）以 O' 为中点，取 $A'D'=AD$ 和 $G'H'=\frac{1}{2}GH$；以 H' 为中点画 $F'E'$ 平行于 x' 轴，并等于 FE；再以 G' 为中点画 $B'C'$ 平行于 x' 轴，并等于 BC.

3）连结 $A'B'$、$C'D'$、$A'F'$、$D'E'$，得正六边形 $ABCDEF$ 的直观图 $A'B'C'D'E'F'$.

另一种画法与前一种所不同的，只是 $\angle x'O'y'=60^\circ$（或 120°）；**并且平行于 y 轴的线段长度不变.** 画含有圆的图形

* 包括在轴上的线段.

时，常用这种画法.

例 2 画圆的直观图.

画法：1）在圆 O 上，取一对互相垂直的直径 AB、CD 分别为 x 轴、y 轴，画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y'=60°$（或 $120°$）.

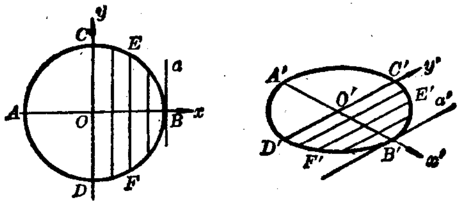


图 5-8

2）将圆 O 的直径 AB 分成 n 等分，过分点画平行于 y 轴的弦 CD、EF、…. 在 x' 轴上以 O' 为中点画线段 $A'B'$，使 $A'B'=AB$，将 $A'B'$ 分成 n 等分，以分点为中点画 y' 轴的平行线段 $C'D'$、$E'F'$、…，使 $C'D'=CD$，$E'F'=EF$，….

3）用平滑曲线连结 $A'D'F'B'E'C'\cdots$，就得到圆的直观图，它是一个椭圆.

我们看出，在这种画法中，圆的中心 O，变为椭圆的中心 O'，圆的一对互相垂直的直径（如 AB、CD）变为椭圆的一对直径（如 $A'B'$、$C'D'$）. 它们叫做椭圆的**共轭直径**. 圆的切线（如 a）变为椭圆的切线（如 a'）.

在实际画椭圆时，并不常用这种画法，而是经过椭圆的一对共轭直径端点［可再加一点（如 E'）］用椭圆模板（图 5-9）来画，或按共轭直径用圆弧连接法画近似的椭圆.

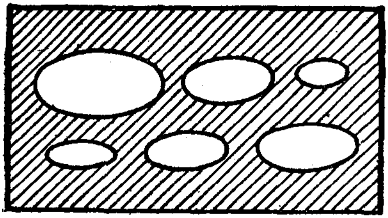


图 5-9

例3 按已知的一对共轭直径 $A'C'$、$B'D'$ 画近似椭圆.

画法: 1) 找出以 A'、C', B'、D' 为对边中点的菱形顶点 E、F(图 5-10).

2) 设 ED' 和 FA' 交于 G, EC' 和 FB' 交于 H.

3) 分别以 E、F 为圆心, ED' 为半径画弧; 再分别以 G、H 为圆心, GA' 为半径画弧, 就连接成近似椭圆.

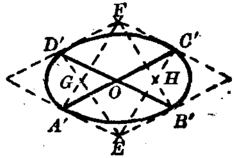


图 5-10

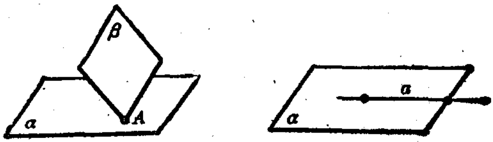
注意, 将图画好后, 要擦去辅助线.

练 习

任意画一个正方形, 然后用两种方法画出它的直观图.

习 题 一

1. 如图所示, 说平面 α 与平面 β 只有一个公共点 A(图甲); 直线 a 不全在平面 α 内(图乙). 这样说法对吗? 为什么?
2. 为什么独轮车要安上两只撑脚? 而有的自行车后轮旁只安装一只撑脚?



甲　　　　乙

（第1题）

3. 一条直线与两条平行直线相交，这三条直线是否在同一平面内？为什么？

4. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？

5. 过已知直线外一点向直线上三个点分别连结三条线段，这三条线段是否在同一平面内？为什么？

6. 四条线段顺次首尾相接，所得的封闭图形，一定是平面图形吗？为什么？

7. 要把一个圆木顺着锯开成两半，并使锯面平整，为什么要在两侧画两条平行线？

8. 用第一种方法画正三角形、正五边形的直观图（不写画法）。

二　空间两条直线

5.4　两条直线的位置关系

我们知道，同一平面内两条不重合的直线，不相交就平行，只有这两种情况，那么空间的两条直线有怎样的位置关系呢？

观察六角螺母的棱 AB 与 CD 的位置；机械部件蜗轮的

轴线和蜗杆的轴线的位置(图 5-11)，可以看出，它们都不在同一平面内.

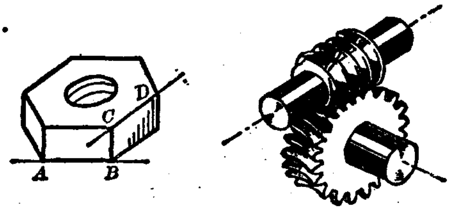


图 5-11

不在同一平面内的两条直线叫做**异面直线**.

因此，空间的两条不重合直线的位置关系有以下三种:

(1) 相交直线——只有一个公共点,
(2) 平行直线——没有公共点,
} 在同一平面内.

(3) 异面直线——没有公共点, 不在同一平面内.

画异面直线时, 为了显示出它们不在同一平面内的特点, 要把两条直线画在不同的平面内, 而且不相交也不平行(图 5-12).

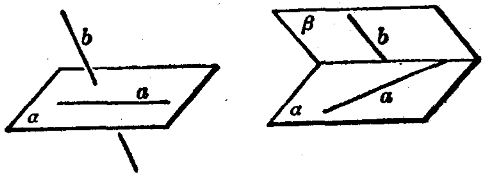


图 5-12

两条直线 a、b 相交于点 A, 写作 $a\cap b=A$; 两条直线 c、d 平行, 写作 $c\parallel d$.

练 习

1. 举出几个异面直线的实例.

2. 分别在两个平面内的两条直线，一定是异面直线吗？

5.5 平行直线

为了研究空间直线的平行关系，我们引进下面的公理：

公理 4 平行于同一条直线的另两条直线互相平行.

例如，三棱镜的三个棱或长方体的棱 $AA' \parallel BB'$，$CC' \parallel BB'$，则 $AA' \parallel CC'$（图 5-13）.

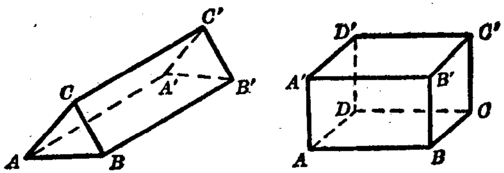


图 5-13

在初中我们学过，在同一平面上对应边平行并且方向相同的两个角相等，在空间也有相同的定理：

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

已知：如图 5-14，$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，并且方向相同.

求证：$\angle BAC = \angle B'A'C'$.

证明： 在 AB、$A'B'$、AC、$A'C'$ 上分别取 $AD = A'D'$、$AE = A'E'$，连结 AA'、DD'、EE'、DE、$D'E'$.

$\because$ $AB \parallel A'B'$，$AD = A'D'$，

$\therefore$ $AA'D'D$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AA' \parallel DD'$，$AA' = DD'$.

同理　$AA' \parallel EE'$, $AA'=EE'$.

根据公理 4, ∴　$DD' \parallel EE'$,

又　$DD'=EE'$, $EE'D'D$ 是平行四边形,

∴　$ED=E'D'$.

∴　$\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$.

∴　$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

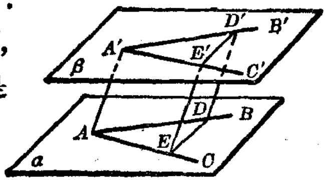


图　5-14

例　已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形(四个顶点不在同一平面内的四边形), E、H 分别是边 AB、AD 的中点, F、G 分别是边 BC、DC 的三等分点, 求证 $EFGH$ 是梯形.

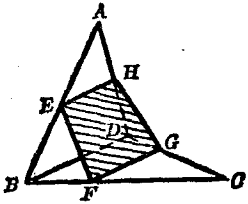


图　5-15

证明: 连结 BD(图 5-15).

EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

∴　$EH \parallel BD$, $EH=\frac{1}{2}BD$.

又在 $\triangle BCD$ 中, $BF=\frac{1}{3}BC$, $DG=\frac{1}{3}DC$.

∴　$FG \parallel BD$, $FG=\frac{2}{3}BD$.

根据公理 4, $EH \parallel FG$, 又因 EF、HG 不平行,

∴　$EFGH$ 是梯形.

练　习

已知: $BB' \underline{\parallel} AA'$, $CC' \underline{\parallel} AA'$, 并且 AA'、BB'、CC' 不共面.

求证: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

5.6 两条异面直线所成的角

a、b 是两条异面直线，经过空间任意一点 O，作 $a'\parallel a$、$b'\parallel b$，a' 和 b' 所成的角叫做**异面直线 a 和 b 所成的角**. 但 a' 和 b' 所成的角有四个，其中对顶角相等，通常说直线 a 和 b 所成的角是指 a' 和 b' 所成的锐角(或直角).

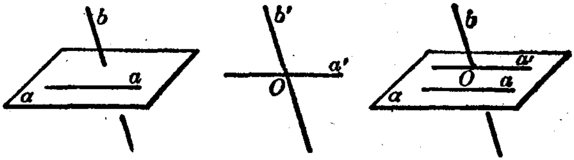


图 5-16

因为对应边平行并且方向相同的两个角相等，所以两条异面直线 a 和 b 所成的角的大小，只由 a 和 b 的位置来决定，和点 O 的位置是无关的. 因此点 O 可以取在一条直线(例如 b)上，然后经过点 O 作 $a'\parallel a$(图 5-16)，那么 a' 和 b 所成的角，就是异面直线 a 和 b 所成的角.

如果两条异面直线所成的角是直角，我们说这**两条异面直线互相垂直**.

例如图 5-11 中所画六角螺帽的两条棱 AB、CD 所在直线是成 60° 角的异面直线；蜗轮和蜗杆的轴线是互相垂直的异面直线，由蜗杆到蜗轮的传动方向变了 90° 的角.

图 5-17 中，正方体的棱 AA' 和 $B'C'$ 所在直线是两条异面直线，直线 $A'B'$ 和它们都垂直相交. 我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做**两条异面直线的公垂线**.

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长

度，叫做**两条异面直线的距离**．图 5-11 中线段 BC 的长度就是异面直线 AB 和 CD 的距离．

例 图 5-17 表示棱长为 a 的正方体．求：

(1) BA' 和 CC' 所成的角是多少度？

(2) BC 和 AA' 的距离是多少？

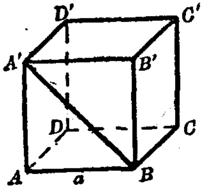


图 5-17

解：(1) $\because$ $CC' \parallel BB'$，

$\therefore$ BA' 和 BB' 所成的角就是 BA' 和 CC' 所成的角．

$\because$ $\angle A'BB'=45°$，

$\therefore$ BA' 和 CC' 所成的角是 $45°$．

(2) $\because$ $AB\perp AA'$，$AB\cap AA'=A$，

又 $\because$ $AB\perp BC$，$AB\cap BC=B$，

$\therefore$ AB 是 BC 和 AA' 的公垂线段．

$\because$ $|AB|=a$，

$\therefore$ BC 和 AA' 的距离是 a．

练　习

1. 在图 5-17 中，BA' 和 CD 所成的角是多少度？
2. 垂直于同一直线的两条直线，有几种可能的相互位置？
3. 图 5-11 中的蜗轮和蜗杆的半径分别是 15cm 和 3cm．它们轴线的距离是多少？

习　题　二

1. 什么叫平行线？什么叫两条异面直线？

2. 两条直线没有公共点，这两条直线的位置会是怎样的？

3. 画两个相交平面，在这两个平面内各画一条直线使它们成为(1)平行线；(2)相交直线；(3)异面直线.

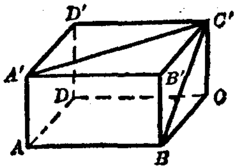
4. 已知 E、F、G、H 分别是空间四边形的四条边 AB、BC、CD、DA 的中点，求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

5. 什么叫两条异面直线所成的角？两条异面直线在什么情况下互相垂直？空间的两条垂直直线一定相交吗？

6. 求证：如果一条直线和两条平行线中的一条垂直，那么也和另一条垂直.

7. 和两条异面直线 AB、CD 同时相交的两条直线 AC、BD 一定是异面直线. 为什么？

8. 如图，已知长方体的长和宽都是 4cm，高是 2cm. (1) BC 和 $A'C'$ 所成角是多少度？(2) AA' 和 BC' 所成角是多少度？(3) $A'B'$ 和 DD'；$B'C'$ 和 CD 的距离各是多少？



(第 8 题)

三 空间直线和平面

5.7 直线与平面的位置关系

一些物体，例如一座吊桥(图 5-18)，立柱和桥面、水面都相交，铁轨在桥面上，并且和水面平行，这就反映出直线和平面有各种不同的位置关系.

一条直线和一个平面的位置关系有三种情况：

1. 直线在平面内——有无数个公共点.