

怎樣解題

臺灣中華書局印

中華民國五十五年三月臺二版

怎樣解題 (全一冊)

基本

How to solve it
分正

(郵運滙費另加)

George Polya

本局編輯部

臺灣中華書局股份有限公司代表

姚 弢 楮

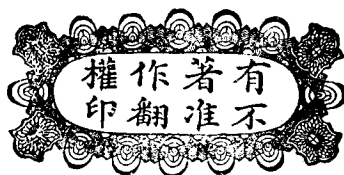
臺北市重慶南路一段九十四號

臺灣中華書局印刷廠

臺北市成都路一〇六號

臺灣中華書局

臺北市重慶南路一段九十四號



原 著 者
譯 者
發 行 人
印 刷 者
發 行 處

(臺總) 甲書

臺參(明・聯)

怎樣解題

了解問題

第一步 必須了解問題。

- △未知數是什麼？已知數是什麼？條件是什麼？
- △可能滿足條件麼？條件足夠決定未知數麼？還是不夠？或是過多？或是矛盾？
- △作一個圖，導入適當的記號。
- △分開條件的各部分，你能把它們寫下來麼？

擬定計劃

第二步 找出已知數和未知數間的關係。
假使不能找

- △你以前曾見過它麼？或者見過形式稍微不同的同樣問題麼？
- △你知道什麼有關的問題麼？你知道可能有用的定理麼？
- △注視未知數！試想出一個有相同或相似的未知數的熟問題。
- △這裏有一個與你有關而且以前解過的問題，你能應用它麼？你能應用它的結果麼？你能應用它的方法麼？你是否應該導入什麼輔助元素，以便可能應用！
- △你可能改述這問題麼？你可能改述得更不同些麼？回到定義！
- △你若不能解這問題，試先解決什麼有關的問

出關係，就得考慮輔助問題。

最後應想出一個計劃。

題。你能想出一個更接近的有關問題麼？一個更一般的問題麼？一個更特殊的問題麼？一個類似的問題麼？你能解問題的一部分麼？保留一部分條件，丟開其餘部分；這樣決定的未知數如何？它能怎樣變化？你能從已知數中得出什麼有用的東西麼？你能想出別的已知數使能用以決定未知數的麼？你能改變未知數、或已知數、必要時改變兩者，使新未知數和新已知數更能互相接近麼？

△你用了所有的已知數麼？你用了全部條件麼？問題中所包含的一切重要觀念你都已考慮到了麼？

實行計劃

第三步 實行你的計劃。

△實行你的解決計劃，校核每一步驟。你能明白看出步驟是正確的麼？你能證明它是正確的麼？

回顧

第四步 校核所得的解答。

△你能校核結果麼？你能校核論證麼？

△你能用不同的方法得出結果麼？你能一眼看得出來麼？

△你能應用這結果或方法到別的問題上去麼？

原 序

大的發見解決大的問題，但在任何問題的解決中，多少也總有一點發見的。你的問題也許是平凡的；但若它能引起你的好奇心，發揮你的發明精神，而你又用你自己的方法解決了它，那麼你就會經驗到興奮，享受到發見的喜悅。對於年輕的人，這種經驗可能引起他對心智工作的興趣，而在心情上和性格上留下終身的印象。

因此，數學教師有一個好機會。假使他把份內的時間完全用於使學生練熟常規工作，那他就扼殺了他們的興趣，阻礙了他們的知識發展，而且更誤用了他的機會。可是他若給學生的一些和他們的知識相稱的問題，藉以引起他們的好奇心，同時用些鼓勵他們的問句去幫助他們解決問題，那他將給他們以獨立思想的興趣和方法。

讀數學課程的學生也有一個特殊的機會。自然，假使他只把數學看做一種功課，必須得到多少分數，而在最後一次考試後卻可儘快地忘掉，那麼這機會就要失去了。即使這學生有些數學天才，但因為他和別人一樣，必須發見他自己的才具和興趣，所以他的機會仍然是可能失去的；因為他若永遠沒有嘗過蘿蔔包子，他就不知道他會喜歡吃它。雖然如此，他還是可以設法發覺到：數學問題可能和縱橫字謎一樣有趣，或者這種有生氣的心

智工作可能是和一場網球遊戲一樣需要的一種運動。嘗到數學的樂趣之後，他將不會忘掉它，因此就有一個好機會使數學作為他的愛好、或職業上使用的工具、或專門職業、或一種大的企圖。

著者記得那時候自己是一個學生，一個有些志向的學生，熱望着懂得一些數學和物理。他聽課，讀書，試解當前問題，可是有一個問題一再擾亂着他：“不錯，這解法看來可用，它顯得是正確的；但怎樣能夠想出這樣的解法呢？不錯，這實驗看來可用，它顯得是一個事實，可是人們怎樣能發見這個事實的呢？而我自己又怎樣才能發明或發見這些呢？”現在著者在大學裏教數學；他希望他的一些比較熱心的學生也問同樣的問題，而他則試去滿足他們的好奇心。不但要設法了解個別問題的解決，而且還要了解解決的動機和步驟，並想對別人說明這些動機和步驟，結果他就寫了這本書。他希望這書對那些想發展學生的解題能力的教師、對熱望發展自己的能力的學生，都有用處。

雖然本書對數學的學生和教師的需要特別注意，但任何關心發明和發見的途徑和方法的人，應該也會發生興趣的。這種興趣愈深入思索就愈能廣泛。一般報章雜誌上縱橫字謎或其他謎語所佔的篇幅，似乎表示人們是肯化些時間去解決不切實際的問題的。在解決這種毫無實在益處的問題的需要之下，是可能有較大的好奇心，希望了解解決的途徑與方法、動機和步驟的。

本書的寫法似很緊縮，但儘量簡單，而這是基於長期而嚴格

的解決方法的研究的。這類研究有些作者稱爲“促進發見術”（以下簡稱“促發術”——譯者），目下不大時行，但曾有長久的過去，而且或許還有未來的。

研究解題的方法，我們注意到數學的另一方面。不錯，數學有兩方面；它一方面是歐幾里德的嚴格的科學，一方面卻又是別的什麼。歐氏方法所表現的數學是一種系統的、演繹的科學；但創造中的數學卻是實驗的、歸納的科學。這兩方面卻和數學本身一般古老，但後者在某種觀點上說是新的；這種數學正在發明中，過去從未用這種形式表現於學生、教師或一般人面前過。

促發術這門學問和許多方面有關；數學者、論理學者、心理學者、教育學者、甚至哲學者，都可從中要求屬於他們專門範圍的各部分。著者深知從相反立場批評的可能，同時更感到他自己的限制，有一點要提出：他有一些解題和教授各種不同程度的數學的經驗。

著者正在編著一部更詳盡的書，對這門學問將有更完備的研討。

坡爾雅

一九四四年八月一日於斯坦福大學

導 言

本書所說的都是對一張包括許多問句和提示的表的說明。這表以“怎樣解題”為標題，印在首頁和末頁，使讀者易於翻閱。下文中所引用的表中的問句或提示時，我們在下面加曲線，提到這表時只簡稱“表”或“我們的表”。

以下將討論表的作用，以例題表明它的實際應用，並說明重要觀念和心智活動。我們可以預先聲明：假使你能適當地應用這些問句和提示來問你自己，它們可以幫助你解決你的問題。假使你能適當地應用這些同樣的問句和提示來問你的學生，你就可以幫助他解決他的問題。

本書分為三個部分。

第一部分以“數學解題教學”為題。內分二十節。第1節至第5節大體地討論我們的表的“目的”。第6節至第17節討論“方法”，說明表的“主要部分、主要問句”，並討論第一個實例。第18節至第20節更補充以“其他例題”。

第二部分很短，題為“解題問答”，使用對話寫成，是一個理想的教師回答一個理想的學生的問話。

第三部分“促發術各論”分量最重。這是關於促發（促進發明）術的小辭典，共計五十五篇，大致依照表的次序排列，其不能明顯地包括於表內某一項目的則排在最後；但因“現代促發術”

爲基本的一篇，說明這個部分的計劃及主要各篇的關聯等，所以我們將它連同與其有關的“促發術”和“促發推理”等共三篇，列在最前。還有“進步與成功”一篇，由於“現代促發術”中所說的原因，也放在前面。有幾篇中的數段內容較爲專門，概加方括號。“各論”中有幾篇直接和第一部分有關，補充了更多的例證與解釋。其餘則係說明背景，和第一部分的目的無關。這一部分各篇在外表上差異很大，但必須着重地指出，這其中是有某種統一性的。有幾篇較長，致力於一般論題系統的討論；其他則有的包含更專門的說明，有的作爲參考之用，此外更有摘引、格言、甚至遊戲之類。

“辭典”(即第三部分)不可讀得太快；文字常很緊縮，有時更有些精微。讀者可從中獲得各種特殊一點的知識。若這種特殊之點是由他對自已或學生的問題的经验而引起的，則閱讀當可獲益。

我們曾一再提起“學生”和“教師”，以後也還要屢次提到。

我們最好假定“學生”是一個高中學生、或大學生、或其他任何學習數學的人。“教師”則可能是高中教員、或大學講師、或任何對數學教學的技術有些興趣的人。著者看問題，有時以學生的立場，有時則以教師的立場(在第一部分中較偏重後者)；可是更多的時候(尤其在第三部分中)，則是以一個既非教師也非學生，而只是一個想要解決他面前的問題的人的觀點。

怎樣解題

目次

原序	1—3
導言	1—2
第一部分 數學解題教學	1—31
目的	1
1. 幫助學生	1
2. 問句、提示、心智活動	2
3. 一般性	2
4. 常識	3
5. 教師和學生、模仿和實踐	3
方法	5
6. 四個階段	5
7. 了解問題	6
8. 例	7
9. 想出計劃	8
10. 例	10
11. 實行計劃	12

12. 例	13
13. 校核解答	14
14. 例	15
15. 不同的想法	18
16. 教師發問的方法	20
17. 好問句和壞問句	21
其他例題	22
18. 作圖題	22
19. 求證題	24
20. 變率問題	27
第二部分 解題問答——對話	32—35
認識問題	32
進一步的了解	32
找出有益的意見	33
實行計劃	34
回顧	35
第三部分 促發術各論	36—200
促發術	36
現代促發術	36
促發推理	40
進步與成功	41

未知數是什麼.....	44
可能滿足條件麼.....	46
條件.....	47
畫一個圖.....	47
號形.....	47
記號.....	52
分開條件的各部分.....	58
你以前曾見過它麼.....	59
你知道什麼有關的問題麼.....	60
注視未知數.....	61
這裏有一個與你有關而且以前解過的問題.....	67
輔助原素.....	69
輔助問題.....	73
你可能改述這問題麼.....	79
定義.....	79
你若不能解這問題.....	86
問題的變更.....	86
一般化.....	91
特殊化.....	93
類似.....	99
你用了所有的已知數麼.....	107
靈機.....	110

潛意識工作.....	111
決心、希望、成功.....	113
實行計劃.....	114
列方程式.....	119
倒推法.....	123
歸納法與數學歸納法.....	128
歸謬證法與間接證法.....	135
分解與結合.....	141
巴伯士論分析與綜合.....	154
爲什麼要證明.....	160
你能校核結果麼.....	167
用維的試驗法.....	169
你能用不同的方法得出結果麼.....	172
你能應用結果麼.....	175
求解題與求證題.....	178
常規問題.....	181
診斷.....	182
拘迂與圓通.....	183
發見的規則.....	184
教學的規則.....	185
發明者的奇論.....	185
聰明的解題者.....	185

聰明的讀者·····	186
未來的數學家·····	187
舊式數學教師·····	188
實際問題·····	189
字謎·····	194
諺語的智慧·····	196
中英名辭對照·····	201
譯後記·····	203

怎樣解題

第一部分 數學解題教學

目的

1. 幫助學生——幫助學生是教師最重要的一種工作。這種工作頗不容易；它需要時間、經驗、熱心，以及正確的原則。

學生自然應該儘可能地獲得獨立工作的經驗。可是假使他獨自應付着問題，得不到一點幫助，或者即使有點幫助，卻很不够，結果他可能是毫無進步的。不過教師若幫助過多，那麼學生又將毫無所得。所以教師應幫助學生，下太多也不太少，這樣，學生才能獲得這工作的合理的一份。

即使學生能力不够，教師至少也應使他有一點獨立工作的觀念。爲了達到這目的，教師應該直接而謹慎地幫助學生。

不過最好是很自然地幫助。教師應該將自己站在學生的立場，看看學生的情形，試去了解學生心中正在如何思想，然後再問一句問句，或指示一個步驟，這種步驟是學生自己可能想到的。

2. 問句、提示、心智活動——要想有效地但同時又謹慎而自然地幫助學生，教師必須一再問着相同的問句，並指示相同的步驟。對於無數的問題，我們必須問這問句：未知數是什麼？我們可以改變字句，用各種不同的方法問這同一件事：要求的是什麼？你需要求出什麼？你打算找出什麼？這些問句的目的是使學生集中注意於未知數。有時我們用“注視未知數！”這提示可以更自然地得到同樣的效果。問句和提示都在於得到同一效果，促進同一心智活動。

在著者看來，收集那些對學生討論問題時普遍有用的問句和提示，該是有價值的事。我們的表裏，有着許多這類的問句和提示，都曾經過仔細的選擇和排列的；它們對於獨自工作的解題者也同樣有用。若讀者弄熟這表，能夠看出提示所說的做法，那他就可以實現表中所暗示的對解決問題一般有用的心智活動。在表中，這些活動是按照最可能發生的次序排列着的。

3. 一般性——一般性是我們表中所包含的那些問句和提示的一個重要性質。以下列問句為例：未知數是什麼？已知數是什麼？條件是什麼？這些問句是普遍適用的，我們應用這些問句於各種問題都可能有良好的效果。它們的用處不限於那一主題。我們的問題可以是代數的或幾何的，數學的或非數學的，理論的或實際的，嚴肅的問題或只是小玩意，這都毫無關係，這些問句都有幫助我們解決的意義。

事實上有一個約束，但這與主題無關。表中某些問句和提

示只適用於求解題，不能用於求證題。後者一類的問題中須應用不同的問句。

4. 常識——我們表中的問句和提示是一般性的，可是除了一般性以外，它們都是自然、簡單、明瞭、發自明顯的常識。例如提示：“注視未知數！試想出一個有相同或相似的未知數的熟問題。”這個提示勸你做的事，是不必勸告你也無論如何要做的，只要你是誠心對付你的問題的話。你餓了麼？你希望得到食物，你就想到得到食物熟悉的方法。你有一個幾何作圖題麼？你希望作一個三角形，你就想着作三角形的熟悉的方法。你有任何種類的問題麼？你希望找出某一未知數，你就想着找出這麼一個未知數或相似的未知數的熟悉的方法。你這麼做，就的確依照着我們表中的話了。你走的路是正確的；因為這是好提示，它指示你的是一種常能成功的辦法。

我們表中的一切問句和提示都自然、簡單、明瞭，正是明顯的常識；不過這明顯的常識，是用一般的說法表達出來的。它們所指示的，任何誠心對付問題而有一些常識的人，自己都自然會見得到。不過具有正確方法的人，常不屑用清楚的話，表示出他的做法，也許他根本不能如此表示出來；我們的表，只是試作這種表示而已。

5. 教師和學生，模仿和實踐——教師對學生說明表中的問句或提示時，應該注意兩個目的：第一、幫助學生解決目前的問題；第二、發展學生的能力，使他將來能夠自己解決問題。