

● 柳重堪 主编

多元函数微积分

高等 数学

(下册)

中央广播电视大学出版社

多元函数微积分

高等数学

(下 册)

柳重塔 主编

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册,多元函数微积分/柳重堪主编.-北京:
中央广播电视大学出版社,2000.1

ISBN 7-304-01863-1

I.高… II.柳… III.①高等数学-电视大学-教材②多元
-微积分-电视大学-教材 IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 01754 号

版权所有,翻印必究。

高等数学

(下册)

多元函数微积分

柳重堪 主编

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京密云胶印厂

开本/787×1092 1/16 印张/16 字数/363千字

版本/1999年11月第1版 2003年6月第8次印刷

印数/53501~68500

社址/北京市复兴门内大街160号 邮编/100031

电话/66419791 68519502

(本书如有缺页或倒装,本社负责退换)

书号:ISBN 7-304-01863-1/O·101

定价:28.00元

前 言

1993年出版的中央广播电视大学理工科大专教材《高等数学》(上、下册),是依据当时国家教委组织制定的《高等工程专科教育基础课程(高等数学)教学基本要求》及中央广播电视大学制定的电视大学高等数学教学大纲与教学计划,并考虑了下列因素编写的:

1. 读者对象是高等专科理工类各专业学生;
2. 电视教学的远距离、多媒体的特点;
3. 不过于追求理论上的严密性,但保持自身体系的完整性!
4. 注意启发式和几何直观,以便于自学;
5. 加强基本运算的训练,但不过分追求复杂的计算和变换;
6. 适当介绍高等数学在现代科技领域中的应用;
7. 适当补充一些超出大纲但为某些专业所需要的内容(这些内容均以“*”号标出)。

五年来这套教材经数万读者使用,得到了广大读者的充分肯定。

随着科学技术的进步,后续课程对基础课的教学内容也提出了新的要求,根据教育部1998年6月审定的《全国成人高等教育工学专科高等数学课程教学基本要求》,电大对专科理工类高等数学教学大纲的部分内容也相应做了调整。为了使这套教材符合调整后大纲的要求,同时也为了更好地适应开放办学以及远距离学习的需要,我们在保持原书优点的基础上对教材做了进一步的远距离教学工艺加工,完成了本教材的设计编写工作。

本教材的每章前为读者编写了开阔视野、拓展思维空间的导读内容,提出学习目标和学习重点,这对自学的学生了解本章的教学内容、抓住学习重点以及了解要达到的学习目标是有益的;用符号标注与文字教材配合的其他媒体的信息对有效使用多种媒体教材是必要的(如录像教材第15讲记为TV₁₅,VCD教材第20讲记为VCD₂₀,计算机课件记为CAI等);针对教学内容随时提出小思考题,注释教学知识点,对学习提出阅读建议,以帮助学生克服自学时常见的困难,提高学习效率;合并了原来与之分立的学习指导书的必要内容,这主要是为了使学生在

学习了主教材的内容后,及时得到学习辅导。每章最后安排了自我检测题,并规定了完成时间,以使读者及时检验自己的学习效果。本次出版的《高等数学》教材分为三册:一元函数微积分(原教材的第1~6章),无穷级数和常微分方程(原教材的第7~8章及第13章傅里叶级数),多元函数微积分(原教材的第9~12章)。

与本教材配套使用的电视课(1993年录制)共117学时,其中上册72学时,下册45学时。为了满足学生自主学习的需要,我们还制作了系统讲授课程重点内容的、可交互使用的VCD教材36讲。同时将典型例题的分析思路和求解方法以及大量习题制成适合学生练习和测试使用的CAI课件光盘,供具有不同自学基础和自学条件的学生选用。

参加本书原主教材部分编写的有柳重堪(第1~4章,第11~12章),王晴云(第5、6章),陈卫宏(第7章,第6章广义积分部分),赵章琳(第8章),李林曙(第7章傅里叶级数部分,第9章),梁映森(第10章),张旭红(第1~4章和第11~12章习题,附录A,B),最后由主编统一定稿。吴昌炽教授主审第1~8章,盛祥耀教授主审第9~12章,参加审校的还有施学瑜教授、龚冬保教授和文丽教授等。此外,李欧教授、叶其孝教授、刘德荫教授和仲崇彬副教授等,对本书的初稿提出了许多宝贵意见,在此谨表衷心的感谢。

参加本教材学习指导部分编写的有张旭红(第4、5、8章),陈卫宏(第3、6、7章),李林曙(第9章、第7章傅氏级数部分),梁映森(第10、12章),冯泰(第1章),顾静相(第2章),赵坚(第11章)。

本教材的教学工艺设计工作由中央广播电视大学的张旭红、陈卫宏和周永胜完成。上册第一分册(一元函数微积分)由张旭红执笔;上册第二分册(无穷级数和常微分方程)由陈卫宏执笔;下册(多元函数微积分)由周永胜、陈卫宏执笔。天津广播电视大学的李林育、理工大学的汪诚义教授、辽宁广播电视大学的柴全战参加了教学大纲及样章的审定工作。

本书编写过程中得到中央广播电视大学各级领导的大力支持和关心,在此一并致谢。由于编者的水平和经验有限,书中不当之处在所难免,请广大读者指正,以俟再版时改正。

我们真诚地希望这本书能有助于学生更主动、更有效、更轻松学好高等数学这门重要的公共基础课。希望读者及时地将学习中的有关情况告诉我们,以便我们为大家及后来的读者提供更好的教学服务。

编 者

1999年6月

目 录

第 9 章	空间解析几何与向量代数	(1)
9.1	空间直角坐标系	(2)
9.2	空间向量	(6)
9.3	平面	(22)
9.4	空间直线	(28)
9.5	空间曲线与曲面	(35)
第 10 章	多元函数微分学	(72)
10.1	多元函数的概念、极限和连续性	(73)
10.2	偏导数	(81)
10.3	全微分	(88)
10.4	复合函数和隐函数的微分法	(94)
10.5	多元函数微分学在几何上的应用	(105)
10.6	多元函数的极值	(109)
第 11 章	重积分	(160)
11.1	二重积分的概念和性质	(161)
11.2	直角坐标系中二重积分的计算	(165)
11.3	极坐标系中二重积分的计算	(173)
11.4	二重积分的应用	(178)
11.5	三重积分的概念和计算	(187)
第 12 章	第二类曲线积分	(222)
12.1	第二类曲线积分	(223)
12.2	格林公式	(228)

第9章 空间解析几何与向量代数

本章导读

我们已经学过平面解析几何,但我们生活的空间是一个三维世界.空间中各种物体其外形的基本构件是直线、平面、曲线和曲面.如何描述空间中的平面和直线,以及一些简单的曲面和曲线,这是本章的基本内容.为了进行这种描述,需要建立空间直角坐标系,还需要引入一种特殊的量——向量.

向量是既有大小又有方向的量.它有一些特殊的运算,这些运算来源于实践.

学习本章时需要经常进行对比.空间直角坐标系与平面直角坐标系的对比,向量与数量的对比,空间解析几何与平面解析几何的对比,等等.在对比中温故而知新,在对比中继承和发展.

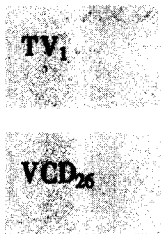
学习目标

1. 了解空间直角坐标系,掌握两点间的距离公式.
2. 掌握向量概念:模、单位向量、方向余弦,特别是向量的坐标表示.
3. 掌握向量的数量积和向量积概念、坐标表示,掌握向量平行和垂直的判别条件.
4. 掌握平面的点法式方程和一般方程,会求点到平面的距离.
5. 掌握空间直线的标准方程、参数方程和一般方程,会进行方程间的互化.
6. 会用方向向量和法向量讨论平面之间、直线之间以及平面与直线之间的位置关系.
7. 知道球面、椭球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转抛物面的方程.

学习重点

向量概念,向量的运算,平面的点法式方程,直线的标准方程.

9.1 空间直角坐标系



我们知道,平面直角坐标系 OXY 是由两条互相垂直并以交点为原点的数轴 OX, OY 构成的;把它所在的平面称为 OXY 平面(图 9-1-1). 现在,将此 OXY 平面置于空间中,并过 O 点作一垂直于 OXY 平面的数轴 OZ (如图 9-1-2 所示),这样 OX, OY, OZ 就构成一空间直角坐标系 $OXYZ$, O 仍称为坐标原点; OX 轴、 OY 轴仍分别称为横轴、纵轴,或称为 X 轴、 Y 轴, OZ 轴则称为立轴,或称为 Z 轴,统称为坐标轴.

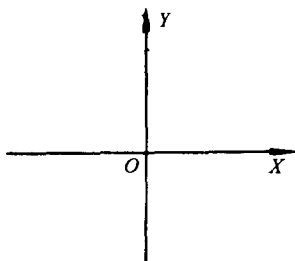


图 9-1-1 平面直角坐标系

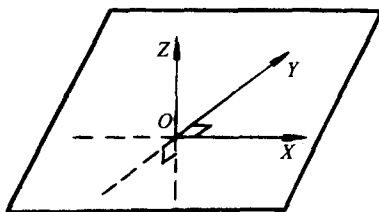


图 9-1-2 空间直角坐标系的构成

注意到上面所作的垂直于 OXY 平面的 OZ 轴其方向可以有两个,一个朝上,一个朝下,我们将如图 9-1-2 朝上的坐标系称为右手系(即用右手四指由 X 轴正向到 Y 轴正向的方向握住 Z 轴,大拇指的指向规定为 Z 轴的正向). 以后我们均采用右手系.

X 轴与 Y 轴, Y 轴与 Z 轴, Z 轴与 X 轴所组成的平面分别称为 OXY 平面, OYZ 平面, OXZ 平面,统称为坐标平面.

对于空间直角坐标系 $OXYZ$ 中的任意一点 P_0 ,我们可用类似于平面直角坐标系中的方法来规定 P_0 的空间直角坐标. 如图 9-1-3 所示,从点 P_0 作 OXY 平面的垂线与 OXY 平面交于点 P_1 (P_1 称为点 P_0 在 OXY 平面上的投影),设 P_1 在平面直角坐标系 OXY 中的坐标为 (x_0, y_0) ,再过点 P_0 作 Z 轴的垂直平面与 Z 轴相交,设此交点在 OZ 轴上的坐标为 z_0 . 这样,空间中任意一点 P 就对应了三个有序实数 (x_0, y_0, z_0) . 反之,任给三个有序实数 (x_0, y_0, z_0) ,都可以下列方式确定空间中一个相应的点:先在 OXY 平面上确定一点 P_1 ,其平面坐标为 (x_0, y_0) ,再过 P_1 点作 OXY 平面的垂直线段 P_1P ,使得 $\overline{P_1P}$ 的长度为 $|z_0|$, P 在 OXY 平面的上方或下方取决于 z_0 的值为正或为负,称 (x_0, y_0, z_0) 为点的空间直角坐标.

由上可见,在空间直角坐标系中,空间中的点与三个有序实数是一一对应的.

显然,坐标原点的坐标是(0,0,0),点(a,0,0)在X轴上.对于一般的点,例如(4,3,-2),我们可按照如图9-1-4所示的方法确定其在空间直角坐标系中的位置.

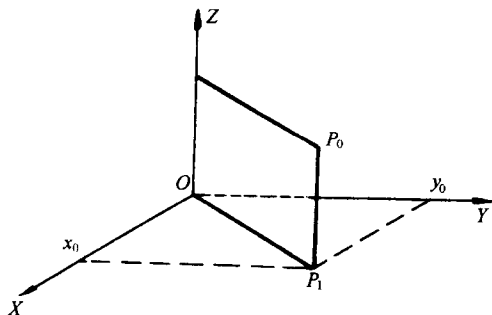


图 9-1-3 空间点 P_0 的坐标

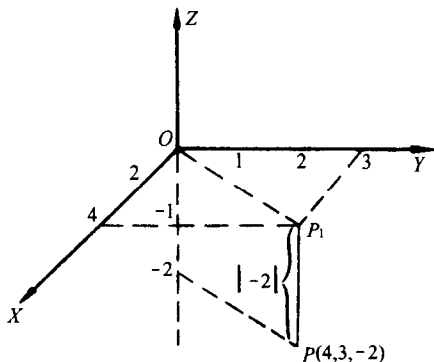


图 9-1-4 点(4,3,-2)在坐标系 OXYZ 中的位置

三个坐标平面把空间划分成八个区域,如图9-1-5所示.每一区域称为卦限.在每个卦限内,点的坐标的符号是固定的.

由图9-1-5可知,八个卦限中坐标的符号依次为:

- I (+, +, +), II (-, +, +),
- III (-, -, +), IV (+, -, +),
- V (+, +, -), VI (-, +, -),
- VII (-, -, -), VIII (+, -, -).

例 1 求空间中任意两点

$$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$$

之间的距离 d .

解 记点 P_1 与 P_2 在 OXY 平面上的投影分别为点 Q_1, Q_2 , 显然在 OXY 平面上点 Q_1 和点 Q_2 的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 按照平面上两点距离公式知

$$|Q_1Q_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

连接 P_1, P_2 和 Q_1, Q_2 , 并过点 P_1 作 Q_1Q_2 的平行线交 P_2Q_2 于 A 点, 由图9-1-6可知

$$|P_1P_2|^2 = |P_1A|^2 + |AP_2|^2$$

而

$$|P_1A| = |Q_1Q_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AP_2| = |z_2 - z_1|$$

于是得

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

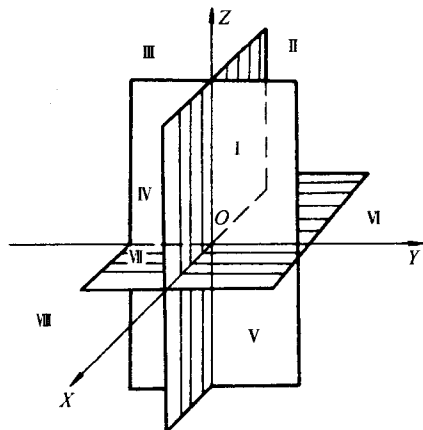


图 9-1-5 空间直角坐标系中的八个卦限

即

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (9-1-1)$$

此即空间直角坐标系中两点间距离公式. 显然, 它是平面直角坐标系中两点间距离公式的直接推广

例2 空间中的球面方程.

设有一个球面, 球心为 P_0 , 半径为 R ($R > 0$). 在建立空间直角坐标系后, 球心 P_0 的坐标便是确定的, 设为 (x_0, y_0, z_0) . 我们来考虑位于该球面上的点的坐标应满足什么样的关系式. 显然, 球面上任一点到球心 P_0 的距离恒为 R , 故若设 $P(x, y, z)$ 为球面上任意一点, 则根据两点间距离公式(9-1-1), 有

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

或

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (9-1-2)$$

易知, 球面上的点其坐标必满足方程(9-1-2), 球面外的点其坐标则不满足方程(9-1-2). 我们称(9-1-2)为球心在 P_0 、半径为 R 的**球面方程**.

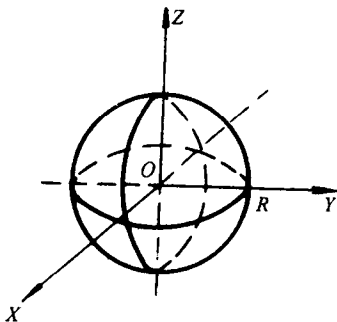


图 9-1-7 球心在原点, 半径为 R 的球面

(x, y, z) 都满足方程 $F(x, y, z) = 0$, 而任一组满足方程 $F(x, y, z) = 0$ 的有序数 (x, y, z) 所对应的点都在曲面 S 上, 则称 $F(x, y, z) = 0$ 为曲面 S 的方程, 也称曲面 S 为方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.

有时, 空间曲面也可用下列形式的方程

$$z = f(x, y)$$

来表示, 这里 $f(x, y)$ 是关于自变量 x, y 的二元函数. 例如, 对于球面方程(9-1-3)可解出 z :

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

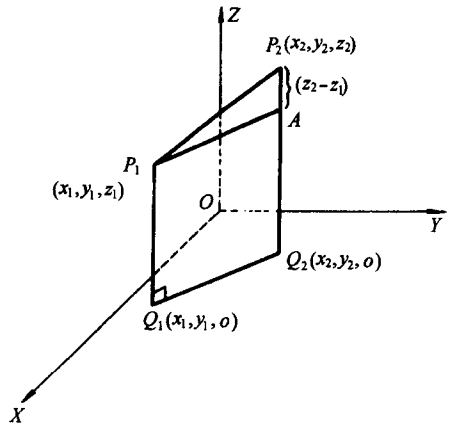


图 9-1-6 推导两点距离的示意图

特别, 球心在原点 $(0, 0, 0)$, 半径为 R 的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (9-1-3)$$

其图形如图 9-1-7 所示.

方程(9-1-2)又可写成

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0$$

一般地, 在空间直角坐标系中的一个曲面 S 可以用一个关于 x, y, z 的方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (9-1-4)$$

来表示. 其中 $F(x, y, z)$ 是一个三元函数, 即含有三个自变量的函数. 确切地说, 如果曲面 S 上每一点的坐标

及

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

显然,前者是上半球面的方程,后者是下半球面的方程.

本节关键词 空间直角 坐标系 坐标轴 坐标平面 卦限

练习 9.1

1. 在空间直角坐标系中,画出下列各点:

$A(2, 3, 4), B(1, 2-1), C(-2, -2, 2), D(2, -2, -2), E(0, 0, -4), F(0, 3, 4)$

2. 点 $P(x, y, z)$ 的三个坐标 x, y, z 中若有一个为 0, 这个点在何处? 若有两个为 0, 这个点在何处?

3. 指出下列各点位置的特点:

$A(2, 0, 0), B(0, -3, 0), C(0, -3, 1), D(-5, 0, 3), E(3, 2, 0), F(0, 0, 0)$

4. 求出定点 $(2, -3, -1)$ 关于:(1)各坐标平面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

5. 一立方体放置在 OXY 平面上. 其底面的中心与原点相合, 底面的顶点在 X 轴和 Y 轴上. 已知立方体的边长为 a , 求它各顶点的坐标.

6. 求两点 $(1, 2, 2)$ 和 $(-1, 0, 1)$ 间的距离.

7. 分别求出点 $P(x, y, z)$ 到(1)各个坐标平面;(2)各个坐标轴;(3)坐标原点间的距离.

8. 根据下列条件求点 B 的坐标:

(1) $A(4, -7, 1), B(6, 2, z), |AB| = 11$;

(2) $A(2, 3, 4), B(x, -2, 4), |AB| = 5$.

9. 求下列球面的球心与半径:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 7 = 0$,

(2) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5z - 8 = 0$.

9.2 空间向量

TV₂

一、向量概念

在实际问题中,有一类量(例如高度,重量,温度等)是完全可以一个实数来表示的,这种量通常称为数量或标量.但另有一类量,例如位移,力,速度,加速度,电场强度等却是不能用一个实数来完全表示的,因为它们都还有方向,如果方向不同,则它们产生的效果也不同,也就是说,这类量既有大小又有方向,通常称之为向量或矢量.

在数学中,引进向量的概念及其运算,也有助于用代数方法来解决有关问题,例如空间解析几何中平面、直线表示等.

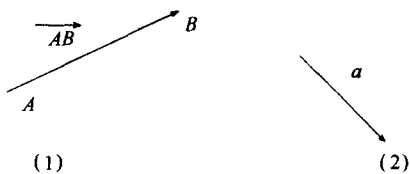


图 9-2-1 向量的图形表示

向量的几何表示是一条带有箭头的线段,此线段的长度表示该向量的大小,而箭头表示该向量的方向.如图 9-2-1(1)中所示的向量,其起点为 A ,终点为 B ,我们把这个向量记为 \overrightarrow{AB} ,而该向量的长度则用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示.有时为了简单起见,还可用小写黑体字例如 a, b 等来表示向量,如图 9-2-1(2)所示的 a .相应地, a 的长度记为 $|a|$.向量的长度通常又称为向量的模.

?

1. 向量能比较大小吗?

根据向量的定义,如果两个向量的模相等,而且方向也相同,则这两个向量相等.如图 9-2-2 中, $a = b, c = \overrightarrow{AD}$.由此可见,向量可以在空间中任意地平行移动.

?

2. 模相等且互相平行的两个向量相等吗?

方向相同或相反的向量称为是平行的,并记为 $a \parallel b$.

总之,向量有两个要素:模和方向.

向量本身不能比较大小,但其模是一实数,是可以比较大小的.

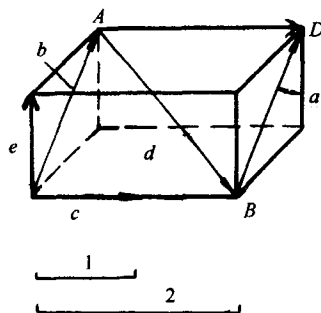


图 9-2-2 向量的平行移动

模为 1 的向量称为单位向量. 如图 9-2-2 中的 e, c, \dots .

模为 0 的向量称为零向量, 记作 0 . 零向量的方向规定为任意的. 即零向量可以认为平行于任何向量.

二、向量的加减法

向量可以进行加减运算.

向量的加法可用下述三角形法则来定义: 如图 9-2-3(1) 所示, 已知两向量 a 和 b , 将 b 平移使其始点与 a 的终点重合, 则以 a 的始点为始点, 以 b 的终点为终点的向量 c 就是 $a + b$, 即

$$c = a + b$$

向量 c 称为向量 a 与 b 的和.

由两个向量的加法很容易推广到有限多个向量的加法, 从图 9-2-3(2) 可以看到, 只要把这些向量首尾相连, 而以第一个向量的始点为始点, 以最后一个向量终点为终点的向量就是这些向量的和, 这种加法又称为折线法.

另外, 向量加法也可用平行四边形法则来进行: 平移 a 和 b , 使它们的始点重合, 以 a 和 b 为相邻两边作平行四边形, 则以 a 和 b 的始点为始点的对角线向量 c 就是 $a + b$. 如图 9-2-3(3) 所示. 显然由于 b 的对边向量也等于 b , 故向量加法的平行四边形法则与上述三角形法则是等价的.

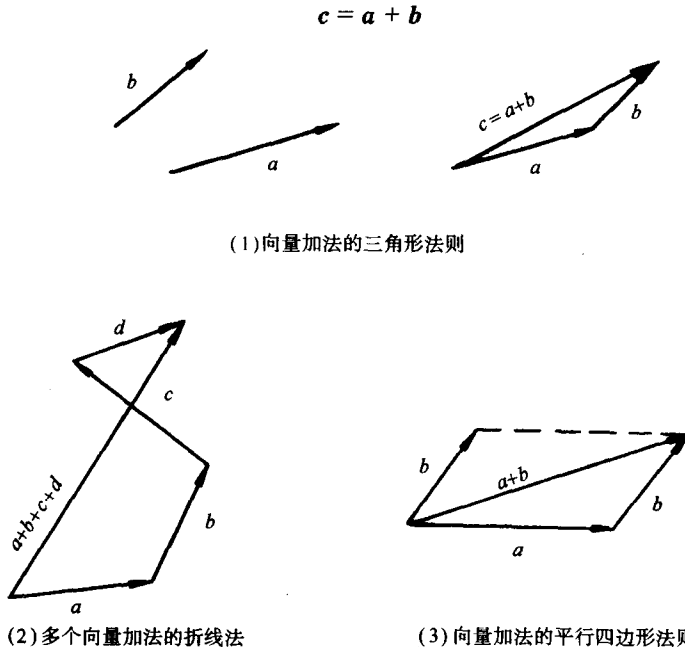


图 9-2-3 向量的加法

向量加法的物理意义是: 如果 a 和 b 表示作用于某物体同一点处的两个力, 则 $a + b$ 表示它们的合力.

由图 9-2-4 可验证, 向量加法满足下列运算规律

(1) 交换律 $a + b = b + a$

(2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$

可见它们和实数加法的运算规律是相同的。

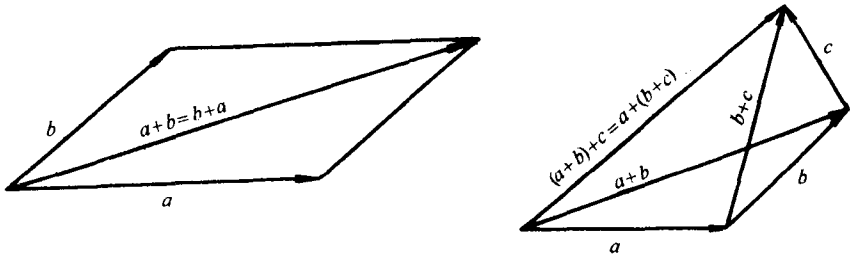


图 9-2-4 向量加法运算规律的图解

由向量加法的三角形法则可以看出

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (9-2-1)$$

等号成立当且仅当 a, b 的方向相同。事实上, 若 $a, b, a + b$ 构成一个三角形, 则由三角形两边之和大于第三边知

$$|a + b| < |a| + |b|$$

若 a 与 b 方向相同, 则 $|a + b| = |a| + |b|$ 。反之亦然。

不等式(9-2-1)称为三角不等式。由此也可看出, 一般地说, 两向量和的模并不等于这两个向量模的和, 除非它们的方向相同。

与数量的减法是加法的逆运算一样, 向量的减法定义为向量加法的逆运算: 对于给定的两个向量 a, b , 如果向量 c 满足下式

$$c + b = a$$

则向量 c 称为向量 a 与 b 的差, 并记为

$$c = a - b$$

向量的差也可用三角形法则来求得, 如图 9-2-5 所示, 其方法是通过平行移动将 a, b 首首相接, 则两者尾尾相连的向量即为 $a - b$, 其方向指向被减向量 a 。这很容易通过加法的三角形法则来验证。

三、向量的数乘运算

如图 9-2-6 所示, 设作用在重物 M 上有四个力: f, f_1, f_2, f' , 它们之间的关系是: f, f_1, f_2 同向, 但均与 f' 反向, 且有

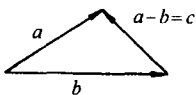


图 9-2-5 向量的减法

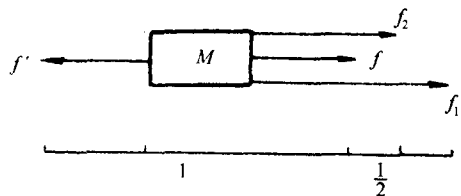


图 9-2-6 重物 M 受力图

$$|f_1| = 2|f|, |f_2| = \frac{3}{2}|f|, |f'| = |f|$$

为处理方便,很自然地记

$$f_1 = 2f, f_2 = \frac{3}{2}f, f' = (-1)f$$

这就导致数与向量相乘,即向量的数乘运算.

定义 9.1 实数 λ 与向量 a 的乘积是一个向量,称为 λ 与 a 的数乘,记作 λa ,它的模 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$,当 $\lambda > 0$ 时, λa 的方向与 a 相同;当 $\lambda < 0$ 时, λa 的方向与 a 相反;当 $\lambda = 0$ 时, λa 是零向量.

由定义 9.1 可知,无论 λ 为正为负或为零,向量 λa 都是与向量 a 平行的.于是我们有

定理 9.1 向量 b 与非零向量 a 平行的充分必要条件是存在一个实数 λ ,使 $b = \lambda a$.

由定义亦可知,对任意 $a \neq 0$, $\frac{a}{|a|}$ 是与 a 同向,且模为 1 的单位向量,若记其为 $a^0 = \frac{a}{|a|}$,则对任意非零向量 a ,都可写成

$$a = |a| a^0 \quad (9-2-2)$$

另外,对任意向量 a ,称 $(-1)a$ 为向量 a 的负向量,记作 $-a$; $-a = (-1)a$.例如图 9-2-6 中的 $f' = -f$ 即是 f 的负向量.

容易验证,向量的减法 $a - b$ 可看作是向量 a 加上向量 b 的负向量,即

$$a - b = a + (-1)b \quad (9-2-3)$$

式(9-2-3)可用图 9-2-7 来验证

由数乘向量的定义,可以验证它满足下列运算规律

- (1) 结合律 $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a = \mu(\lambda a)$
- (2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (对于数的分配律)
- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (对于向量的分配律)

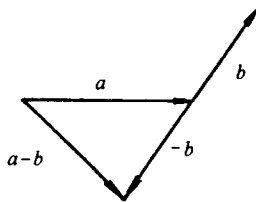


图 9-2-7 式(9-2-3)的图示

例 1 $\triangle ABC$ 边 BC 的三等分点为 D, E , 记 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b$, 试用 a 和 b 表示 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$.

解 如图 9-2-8 所示,由向量的加法和减法法则以及数乘向量的定义知

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= b - a \\ \overrightarrow{BD} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(b - a) \\ \overrightarrow{EC} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(b - a) \\ \overrightarrow{AD} &= a + \overrightarrow{BD} \\ &= a + \frac{1}{3}(b - a) = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \\ \overrightarrow{AE} &= b - \overrightarrow{EC} = b - \frac{1}{3}(b - a) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$$

例2 设 $ABCD$ 为平行四边形, M, N 分别为 DC, BC 的中点, 已知 $\overrightarrow{AM} = \mathbf{c}, \overrightarrow{AN} = \mathbf{d}$, 试用 \mathbf{c} 和 \mathbf{d} 表示 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

解 由图 9-2-9, 设

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$$

则

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{a} \quad (1)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \quad (2)$$

由

$$2 \times (1) - (2): 2\mathbf{c} - \mathbf{b} = \frac{3}{2}\mathbf{b}$$

$$2 \times (2) - (1): 2\mathbf{d} - \mathbf{c} = \frac{3}{2}\mathbf{a}$$

故

$$\mathbf{a} = \frac{2}{3}(2\mathbf{d} - \mathbf{c}), \mathbf{b} = \frac{2}{3}(2\mathbf{c} - \mathbf{d})$$

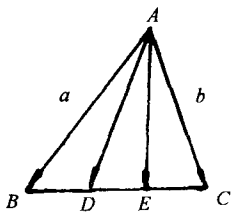


图 9-2-8 例 1 图

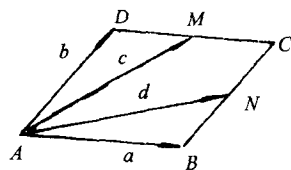


图 9-2-9 例 2 的示意图

TV₃

四、向量的坐标表示

根据向量的定义, 一个向量由其模及方向所确定. 但到目前为止我们对向量的认识还只停留在图形表示上, 这对于研究向量和利用向量去解决其它实际问题是很不方便的, 下面我们引进向量的坐标表示.

在空间直角坐标系中, 以原点为始点, 而终点分别为点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 的三个单位向量, 相应地记作 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 称为该坐标系的基本单位向量.

对于任意一个向量 \mathbf{a} , 先将其平移使其始点落在原点 O , 设此时 \mathbf{a} 的终点为

$$M(a_1, a_2, a_3),$$

即 $\vec{a} = \vec{OM}$, 如图 9-2-10 所示. 并设点 $A(a_1, 0, 0)$, $B(a_1, a_2, 0)$, 根据向量加法, 显然有

$$\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM}$$

而

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

∴

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BM}$$

再由数乘向量的定义及

$$\vec{OA} // \vec{i}, \vec{AB} // \vec{j}, \vec{BM} // \vec{k}$$

知

$$\vec{OA} = a_1 \vec{i}, \vec{AB} = a_2 \vec{j}, \vec{BM} = a_3 \vec{k}$$

于是有

$$\vec{OM} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

可以看出上式中三个系数 (a_1, a_2, a_3) 正好是点 M 的坐标. 由于任意向量 \vec{a} 都可将其平移成始点在原点 O 的向量 \vec{OM} , 故将构成点 M 坐标的一组有序实数 (a_1, a_2, a_3) 定义为向量 \vec{a} 的坐标.

向量的坐标表示法有两种写法: 一种是

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

这种写法比较清楚但稍繁一些;

第二种是较简单地写成

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

这种写法需要从上下文来判断其表示的是否是向量, 以免与点的坐标混淆. 其实, 向量的坐标与点的坐标有着密切的关系. 向量 \vec{OM} 称为点 M 的向径(或矢径). 从图 9-2-10 可见, 向量 \vec{OM} 的坐标与点 M 的坐标相同, 即一点的坐标与该点的向径的坐标相同. 或者换一个说法, 当一个向量始点在原点时, 向量的坐标就是其终点的坐标.

至于始点不在原点时向量的坐标与始、终点的坐标的关系将在下面讨论.

用向量的坐标很容易表示向量相加、相减和数乘向量.

设

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

则由数乘向量的运算规律及向量加法运算规律易知

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1) \vec{i} + (a_2 + b_2) \vec{j} + (a_3 + b_3) \vec{k} \quad (9-2-4)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1) \vec{i} + (a_2 - b_2) \vec{j} + (a_3 - b_3) \vec{k} \quad (9-2-5)$$

即向量之和(差)的坐标等于它们对应坐标之和(差)

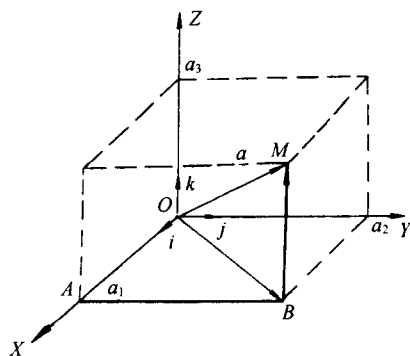


图 9-2-10 向量的坐标