高等代数题解

上　册

北京化工学院

数学教研组

目　　录

前　　言

这本"题解"是我组张纪泉等同志演算了北京大学编的"高等代数"中的习题而编成的。在演算过程中曾参考了一些兄弟院校的资料。并请了南开大学数学系控制理论教研组李铁钧同志进行了审阅，并作了不少修改，对此我们表示衷心地感谢。

由于我们水平所限，缺点、错误在所难免，盼望读者提出宝贵意见，以求订正和改进。

北京化工学院

数学教研组

一九七九年九月

第一章　　多项式

1. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$，求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$：

1）$f(x)=x^3-3x^2-x-1$，　$g(x)=3x^2-2x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
\hline
3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x \\
\cline{2-2}
 & -2\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 \\
 & -2\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} \\
\cline{2-2}
 & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}
\end{array}
$$

解：

$\therefore q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$，　$r(x)=-2\frac{8}{9}x-\frac{2}{9}$

2）$f(x)=x^4-2x+5$，　$g(x)=x^2-x+2$

解：$q(x)=x^2+x-1$，　$r(x)=5x+7$

2. m，p，q 适合什么条件时有

1）$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$　　解：$p=-m^2-1$，$q=m$

2）$x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$　　$p=2-m^2$，$q=1$

3. 用综合除法求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$

1）$f(x)=2x^5-5x^3-8x$，$g(x)=x+3$

解：
$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2 & +0 & -5 & +0 & -8 & +0 \\
-3 & & -6 & +18 & -39 & +117 & -327 \\
\hline
 & 2 & -6 & +13 & -39 & +109 & -327
\end{array}
$$

$\therefore q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$

$r(x)=-327$

2）$f(x)=x^3+x^2-x$，$g(x)=x-1+2i$

解：$q(x)=x^2-2ix+(-5-2i)$， $r(x)=-9+8i$

4.用综合除法把 $f(x)$ 表成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成 $c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots\cdots$ 的形式：

1）$f(x)=x^5$，$x_0=1$

解：$f(x)=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$

2）$f(x)=x^4-2x^2+3$， $x_0=-2$

解：$f(x)=11-24(x+2)+22(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$

3）$f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$ ， $x_0=-i$

解：$f(x)=7+5i-5(x+i)-(1+i)(x+i)^2-2i(x+i)^3+(x+i)^4$

5. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式：

1） $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$

$g(x)=x^3+x^2-x-1$

解：

x	$x^4+x^3-3x^2-4x-1$	x^3+x^2-x-1	$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$
	$x^4+x^3-x^2-x$	$x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	
$\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$	$-2x^2-3x-1$	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$	$\frac{1}{4}$
	$-2x^2-2x$	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	
$\frac{4}{3}$	$-x-1$	$-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	
	$-x-1$		
	0		

$\therefore (f(x),g(x))=x+1$

2） $f(x)=x^4-4x^2+1$， $g(x)=x^3-3x^2+1$

解： $(f(x),g(x))=1$

3）$f(x)=x^4-10x^2+1$ ， $g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$

解：$(f(x), g(x)) = x^2-2\sqrt{2}x-1$

6.求 $u(x)$，$v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$：

1）$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$，$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$

解：

1	$x^4+2x^3-x^2-4x-2$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	$x+1$
	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	x^4+0-2x^2	
x	x^3+0-2x	x^3+x^2-2x-2	1
	x^3+0-2x	x^3+0-2x	
	0	x^2+0-2	

$$\therefore x^2-2=g(x)-(x^3-2x)(x+1)=g(x)-[f(x)-g(x)]$$
$$(x+1)=g(x)-f(x)(x+1)+g(x)(x+1)$$
$$=f(x)(-x-1)+g(x)(x+2)$$

$\therefore u(x)=-x-1$，$v(x)=x+2$

2）$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$，$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$

解：$(f(x), g(x))=x-1$，$u(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$，$v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$

3）$f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$，$g(x)=x^2-x-1$

解：$(f(x), g(x))=1$，$u(x)=-x-1$，$v(x)=x^3+x^2-3x-2$

7.设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$，$g(x)=x^3+tx^2+u$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 t，u 的值。（此题书上 $g(x)=x^3+tx+u$，少印一个2）

解：

$1+(1+t)+2+2u$	$1+t+0+u$
$1+\quad t+0+u$	$1+2+u$
$1+2+u$	$t-2-u+u$
	$t-2+(2t-4)+(tu-2u)$
	$(-2t-u+4)+(-tu+3u)$

$\therefore \begin{cases} 4-u-2t=0 \\ 3u-tu=0 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} t=2 \\ u=0 \end{cases}$ $\begin{cases} t=3 \\ u=-2 \end{cases}$

8. 证明：如果 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$ 且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

解：已知 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，且 $d(x)=f(x)u(x)+g(x)u(x)$

设 $d'(x)|f(x)$，$d'(x)|g(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的任一公因式，则 $f(x)=d'(x)q_1(x)$，$g(x)=d'(x)q_2(x)$，$\Longrightarrow u(x)f(x)=u(x)q_1(x)d'(x)$，$v(x)g(x)=v(x)q_2(x)d'(x) \Longrightarrow$

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)=d'(x)(u(x)q_1(x)+v(x)q_2(x))$$

$\therefore d'(x)|d(x)$，又因 $d(x)$ 是 f，g 的公因式，$\therefore d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式。（证毕）

9. 证明：$(f(x)h(x), g(x)h(x))=(f(x), g(x))h(x)$

（$h(x)$ 的首项系数为 1）

解：设 $(f(x), g(x))=d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$

$$f(x)u(x)h(x)+g(x)v(x)h(x)=d(x)h(x)=(f(x), g(x))h(x)$$

又因 $(f(x), g(x))h(x)$ 为 $f(x)h(x)$，$g(x)h(x)$ 的公因式，$\therefore$

$$(f(x)h(x), g(x)h(x))=(f(x), g(x))h(x) \quad \text{（证毕）}$$

10. 如果 $f(x)$，$g(x)$ 不全为另，证明：$\left(\dfrac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \dfrac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right)=1$

解：设$(f(x), g(x))=d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$，

$f(x)=d(x)q_1(x)$，

$q(x)=d(x)q_2(x)$，$\therefore d(x)(u(x)q_1(x)+v(x)q_2(x))=d(x)$，

$\therefore q_1(x)u(x)+q_2(x)v(x)=1$，$\therefore (q_1(x), q_2(x))=1$

据设的条件知 $\dfrac{f(x)}{(f(x), g(x))}=q_1(x)$，

$$\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}=q_2(x),$$

$$\therefore \left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right)=1$$ （证毕）

//.证明：如果$f(x)$，$g(x)$不全为另，且$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$

那么 $(u(x), v(x))=1$

解：设$(f(x), g(x))=d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$，

$f(x)=d(x)q_1(x)$，

$g(x)=d(x)q_2(x)$，则 $q_1(x)u(x)+q_2(x)v(x)=1$

$\therefore (u(x), v(x))=1$ （证毕）

12.证明：如果$(f(x), g(x))=1$，$(f(x), h(x))=1$

那么 $(f(x), g(x)h(x))=1$

解：设$f(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)=1$，

$f(x)u_2(x)+h(x)v_2(x)=1$

左，右两端分别相乘，得：

$\therefore (f(x), g(x)h(x))=1$ （证毕）

13.设 $f_1(x), f_2(x)\cdots\cdots f_m(x), g_1(x), g_2(x)\cdots\cdots g_n(x)$ 都是多项式，而且 $(f_i(x), g_j(x))=1$

$(i=1.2,\cdots\cdots m, j=1.2,\cdots\cdots n)$ 求证：

$(f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots\cdots g_n(x))=1$

解：$\because (f_1(x), g_1(x))=1$，$(f_1(x), g_2(x))=1$，$\cdots\cdots$

$(f_1(x), g_n(x))=1$ 则由上题，有：

$(f_1(x), g_1(x)g_2(x))=1$，$\cdots\cdots (f_1(x), g_1(x)g_2(x)\cdots\cdots g_n(x))=1$

同理：$(f_i(x), g_1(x)g_2(x)\cdots\cdots g_n(x))=1$ $(i=2, 3, \cdots\cdots m)$

$\therefore (f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots\cdots g_n(x))=1$

（证　　毕）

14.证明：如果 $(f(x), g(x))=1$，那么 $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$

解：$\because (f(x), g(x))=1 \therefore f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$

$f(x)u(x)+g(x)v(x)+f(x)v(x)-f(x)v(x)=1$

$f(x)(u(x)-v(x))+(f(x)+g(x))v(x)=1$

$\therefore (f(x), f(x)+g(x))=1$ 同理 $(g(x), f(x)+g(x))=1$

$\therefore (f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$ （证毕）

15.求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式分解。

解：复数范围内：$x^n-1=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n})$

实数范围内：在复数范围分解中复数根都是共轭成对出现，把共轭的两个复数根相乘，得到 x^n-1 在实数范围内的分解式。具体地有：

当n为奇数时，$x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1)$

当n为偶数时，$x^n-1=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1)$

16.求下列多项式的公共根：$f(x)=x^3+2x^2+2x+1$，

$g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$

解：$(f(x),g(x))=x^2+x+1$，由$x^2+x+1=0$

解得：$x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

17.判别下列多项式有无重因式：

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

解：$f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$，$(f(x),f'(x))=$

x^2-4x+4

有公因式，∴ $f(x)$有重因式。

2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$

解：$f'(x)=4x^3+8x-4$，$(f(x),f'(x))=1$，互素，∴无重因式。

18.求t值，使$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根。

解：$f'(x)=3x^2-6x+t$

$$\begin{array}{l|l|l}
\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} & x^3-3x^2+tx-1 & 3x^2-6x+t \\
 & x^3-2x^2+\frac{t}{3}x & \\
\hline
 & -x^2+(t-\frac{t}{3})x-1 & \\
 & -x^2+2x-\frac{t}{3} & \\
\hline
 & (\frac{2}{3}t-2)x+(\frac{t}{3}-1) &
\end{array}$$

由 $\frac{2}{3}t-2=0$

$\frac{t}{3}-1=0$

解得 $t=3$

$\therefore$ t取3时，f（x）有重根，，又$(\frac{2}{3}t-2)x+(\frac{t}{3}-1)=(\frac{t}{3}-1)$（2x+1）当t≠3时2x+1，和$3x^2-6x+t$可能有重根，同样可推出当$t=-\frac{15}{4}$时有重根。

19.求多项式x^3+px+q有重根的条件

解：有重根的条件：$4p^3+27q^2=0$

20.如果$(x-1)^2|Ax^4+Bx^2+1$，求A，B

解：A＝1，B＝2

21.证明：$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$不能有重根，

解：$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$，$f(x)=f'(x)+\frac{x^n}{n!}$

x是$\frac{x^n}{n!}$的n重因式，是唯一的因式，而x显然不是f'(x)的因式，

$\therefore (f'(x),\frac{x^n}{n!})=1 \quad (f(x),f'(x))=(f'(x),\frac{x^n}{n!})=1$，

$\therefore$ f(x)不能有重根。

22.如果α是$f'''(x)$的一个k重根，证明α是$g(x)=\frac{x-\alpha}{2}[f'(x)+f'(\alpha)]-f(x)+f(\alpha)$的一个k＋3重根。

解：$g'(x)=\frac{1}{2}f'(x)+\frac{x-\alpha}{2}f''(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f'(\alpha)$

$$g''(x)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{x-\alpha}{2}f'''(x)-f''(x)=\frac{x-\alpha}{2}f'''(x)$$

由α是$f'''(x)$的k重根，$\therefore g''(\alpha)=0$，$\therefore (x-\alpha)^k|f'''(x)$，

$(x-\alpha)^{k+1}|g''(x)$，又$\because$α是g(x)的根，也是g'(x)的

$x-\alpha$是$g''(x)$的$k+1$重因式$\Longrightarrow(x-\alpha)$是$g'(x)$的$k+2$重因式，$\Longrightarrow(x-\alpha)$是$g(x)$的$k+3$重因式，$\therefore\alpha$是$g(x)$的$k+3$重根。

23证明：x_0是$f(x)$的k重根的充分必要条件是$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$，而$f^{(k)}(x_0)\neq0$

解：由x_0是$f(x)$的k重根知$(x-x_0)^k\mid f(x)$，即$(x-x_0)$是$f(x)$的k重因式，$\Longrightarrow x-x_0$是$f'(x)$的$k-1$重因式，$f''(x)$的$k-2$重因式，……，$f^{(k-1)}(x)$的单因式，而不是$f^{(k)}(x)$的因式。

$\therefore f(x_0)=f'(x_0)=\cdots\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$，而$f^{(k)}(x_0)\neq0$。

由$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$知$(x-x_0)$是$f(x)$，$f'(x)$，……$f^{(k-1)}(x)$的因式，又因$f^{(k)}(x_0)\neq0$知$(x-x_0)$不是$f^{(k)}(x)$的因式，$\therefore x-x_0$是$f(x)$的$k$重因式，

$\therefore x_0$是$f(x)$的k重根。

24举例说明断语"如果α是$f'(x)$的m重根，那么α是$f(x)$的$m+1$重根"是不对的。

解：如x^2+x+1在有理数域上是不可约的，但$(x^2+x+1)'=2x+1$，$\therefore-\frac{1}{2}$是$(x^2+x+1)'$的根，所以上述断语是不对的。

25证明：如果$(x-1)\mid f(x^n)$，那么$(x^n-1)\mid f(x^n)$

解：$\because(x-1)\mid f(x^n)$，$\therefore1$是$f(x^n)$的根，而1也是f(x)的根，从而任一个n次单位根x也是f(x^n)的根，$f(x^n)=f(1)=0$，$\therefore(x^n-1)\mid f(x^n)$

26证明：如果$(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，那么$(x-1)\mid$

$f_2(x)$

解：x^2+x+1 的根是三次单位根 $\omega_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 由题设知 $(x^2+x+1)q(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)$

$\therefore$ 用 ω_1 代入得 $(\omega_1^2+\omega_1+1)q(\omega_1)=f_1(\omega_1^3)+\omega_1 f_2(\omega_1^3)=0$

$\therefore f_1(1)+\omega_1 f_2(1)=0$

$\therefore f_1(1)=0$ $f_2(1)=0$，$\therefore (x-1)\mid f_1(x)$，$(x-1)\mid f_2(x)$

27 求下列多项式的有理根：

1) $x^3-6x^2+15x-14$

解：此多项式的有理根只可能是 ±1，±2，±7，±14，用综合除法可验证除 x＝2 外，其它均不是此多项式的有理根。

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 15 & -14 & 2 \\ & 2 & -8 & 14 & \\ \hline 1 & -4 & 7 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 15 & -14 & -2 \\ & -2 & +16 & -62 & \\ \hline 1 & -8 & 31 & -76 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 15 & -14 & -7 \\ & -7 & 91 & -742 & \\ \hline 1 & -13 & 106 & -756 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 15 & -14 & 14 \\ & 14 & 112 & 1778 & \\ \hline 1 & 8 & 127 & 1764 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 15 & -14 & 7 \\ & 7 & 7 & 154 & \\ \hline 1 & 1 & 28 & 140 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 15 & -14 & -14 \\ & -14 & 280 & -4130 & \\ \hline 1 & -20 & 295 & -4144 & \end{array}$$

2) $4x^4-7x^2-5x-1$

解：此多项式的有理根只可能是 $\pm\frac{1}{4}$，$\pm\frac{1}{2}$，±1，用综合除法可验

证除 $x=-\frac{1}{2}$ 外，其它都不是它的根。

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$

解：此多项式的有理根只可能是：±1，±3，用综合除法可验证 $x=3$，$x=-1$ 是其根，其它的不是它的根。

28.下列多项式在有理数域上是否可约？

1) x^2+1

解：令 $x=y-1$，$(y-1)^2+1=y^2-2y+2$，$\because 2\nmid 1$，$2\mid 2$，$2\nparallel 2$ $\therefore x^2+1$ 不可约。

2) $x^4-8x^3+12x^2+2$

解：设 $P=2$，$P\nmid 1$，$P\mid 8$，$P\mid 12$，$P\nparallel 2$ $\therefore x^4-8x^3+12x^2+2$ 不可约。

3) x^6+x^3+1

解：设 $x=y+1$ 代入 $(y+1)^6+(y+1)^3+1=y^6+6y^5+15y^4+20y^3+15y^2+6y+1+y^3+3y^2+3y+1+1=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$，设 $P=3$ $3\nmid 1$，$3\mid 6$，15，21，18，9，$3\nparallel 3$，$\therefore x^6+x^3+1$ 不可约。

4) x^p+px+1 P为奇素数。

解：如果 $f(x)=x^p+px+1$ 可约，至少有一个有理根，但 $f(x)$ 的有理根只可能是 ±1，若 $x=1$ 是根，则 $1+p+1=0$，$p=-2$，不是奇素数，若 $x=-1$ 是根，则 $(-1)^p-p+1=0$，$p=1+(-1)^p$，由 P为奇素数知 $p=0$ 矛盾，$\therefore$ 不可约。

5) $x^4+4kx+1$ k为整数

解：此多项式的有理根只可能是 ±1，若 $x=1$ 是根，则 $1+4k+1=0$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$，若 $x=-1$ 是根，则 $1-4k+1=0$，$k=\frac{1}{2}$，均与 k为整数矛盾，故 $x^4+4kx+1$ 不可约。

29用初等对称多项式表出下列对称多项式：

1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2=f$

解：

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3
2	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

设 $f=\sigma_1\sigma_2+a\sigma_3$

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	1	3	3	1	6

$\therefore 6=3\cdot 3+a \quad \therefore a=-3, \quad f=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$

2) $f=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$

解: $f=\sigma_1^3-\sigma_1^2x_1-\sigma_1^2x_2-\sigma_1^2x_3+\sigma_1(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
$-x_1x_2x_3=\sigma_1^3-\sigma_1^2(x_1+x_2+x_3)+\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$

3) $f=(x_1-x^2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$

解: $f=\sigma_1^2\sigma_2^2+a\sigma_1^3\sigma_3+b\sigma_2^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3^2$

$=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3-18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2$

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3
4	2	0	2	2	0
4	1	1	3	0	1
3	3	0	0	3	0
3	2	1	1	1	1
2	2	2	0	0	2

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3
1	−1	0	0	−1	0
1	2	−2	0	−3	−2
1	−2	−2	−3	0	4
1	1	1	3	3	1

$\therefore 4=-b$，$b=-4$，$0=(-4)\sigma_2^3+d\sigma_3^2=(-4)(-3)^3+d(-2)^2$
$=(-4)(-27)+4d$

$\therefore d=-27$，　$0=a\sigma_1^3\sigma_3+(-27)\sigma_3^2$，　$a=-4$，　$c=-18$，

4）$f=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2$
$+x_3^2x_4^2$

解：方法同上，$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$

5）$f=(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$

解：$f=(x_1x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_1^2x_2+x_1x_3)(x_3x_1+x_2)$
$=(x_1^2x_2^2x_3^2+x_1x_2x_3^3+x_1^3x_2x_3+x_1^2x_3^2+x_1x_2^3x_3$
$+x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2+x_1x_2x_3)=x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^3x_2x_3+x_1x_2$
$x_3^3+x_1x_2^3x_3+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1x_2x_3$
$=\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_3$

6）$f=(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$

解：$f=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2\sigma_3$

30. 用初等对称多项式表出下列n元对称多项式：

1）Σx_1^4

解：由牛顿公式：$S_4=\Sigma x_1^4=\sigma_1S_3-\sigma_2S_2+\sigma_3S_1-4\sigma_4$
$=\sigma_1(\sigma_1S_2-\sigma_2S_1+3\sigma_3)-\sigma_2(\sigma_1S_1-2\sigma_2)+\sigma_3\sigma_1-4\sigma_4$
$=\sigma_1^2(\sigma_1S_1-2\sigma_2)-\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_1\sigma_3-\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3$
$-4\sigma_4$
$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$

2）$\Sigma x_1^2x_2x_3=\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$

3）$\Sigma x_1^2x_2^2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$

4）$\Sigma x_1^2x_2^2x_3x_4=\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5+9\sigma_6$

（$\Sigma ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots\cdots x_n^{l_n}$ 表示所有由 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots\cdots x_n^{l_n}$ 经过对换得到

的项的和）

31. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，是方程$5x^3-6x^2+7x-8=0$的三个根，计算：

$$(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2)$$

解：由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，是方程的三个根，则$\varphi(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)=\sigma_1^2\sigma_2^2+a\sigma_1^3\sigma_3+b\sigma_2^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3^2$ 同待定系数法得 $a=b=-1$，$c=d=0$

$$\varphi(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)=\left(\frac{42}{25}\right)^2+(-1)\left(\frac{6}{5}\right)^3\left(\frac{8}{5}\right)+(-1)\left(\frac{7}{5}\right)^3$$

$$=-\frac{1679}{25^2}$$

32. 证明：三次方程$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$的三个根成等差数列的充分必要条件为：$2a_1-9a_1a_2+27a_3=0$

解：设方程的三个根x_1,x_2,x_3成等差数列，则

$$(x_1+x_2-2x_3)(x_1+x_3-2x_2)(x_2+x_3-2x_1)=0$$

$$\varphi(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)=-2\sigma_1^3+a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3=0$$

用待定系数法得 $b=-27$，$a=9$

$$\therefore\ 2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3=0$$

补　充　题

1. 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$

且 $ad-bc\neq0$ 证明：

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$$

解：设 $d_1(x)=(f_1(x),g_1(x))$，$d_2(x)=(f(x),g(x))$

①$\because d_2(x)\mid f(x),g(x)\ \therefore d_2(x)\mid af(x)+bg(x)=f_1(x)$，