高等职业技术教育教材

高等数学

下册

第2版

高职数学教材编写组　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等职业技术教育教材

高　等　数　学

下　册

第2版

高职数学教材编写组　编

本套教材　主　编　王化久
　　　　　副主编　郑长波
　　　　　主　审　王　哲

机械工业出版社

本套教材是根据教育部高等职业教育数学课程的基本要求，在第1版的基础上修订而成的。共分上下两册。本书为下册，内容包括多元函数微积分及其应用，矩阵与线性规划，无穷级数，拉氏变换，概率与数理统计等。本教材从实例引入问题，以问题为引线进行数学概念及实际意义、数学思想方法等介绍，并引入数学建模的知识。本书采用模块化设计，以便于不同专业选用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下册/王化久主编．—2版．—北京：机械工业出版社，2003.7

高等职业技术教育教材

ISBN 7-111-12417-0

Ⅰ．高… Ⅱ．王… Ⅲ．高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第048029号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑：韩雪清、郑 丹
责任编辑：卢若薇 版式设计：冉晓华 责任校对：李秋荣
封面设计：姚 毅 责任印制：路 琳
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2003年8月第2版第2次印刷
1000mm×1400mm B5 · 9.125印张 · 352千字
定价：21.00元

前　　言

为适应我国高等职业技术教育蓬勃发展的需要，必须加快教材建设步伐。本书是我们根据教育部新制定的《高职高专数学教学的基本要求》，在原第1版高职数学教材的基础上，遵循“拓宽基础，强化能力，立足应用”和“必需，够用”的原则编写的。

在编写中，我们努力体现高等职业技术教育特点，力求兼顾不同产业部门的需要，以实例引入的问题为引线，将抽象的概念形象化，然后讲授定理及其实际内涵并介绍数学方法。最后根据部分内容的特点，本书常以图、表直观地讲解概念，有些数学定理用直观解释代替证明，使教材具有一定的弹性。书中标有 * 的内容可酌性选学。

本书内容逐步渗透数学建模的思想。为了适应时代需要，我们增加了“第十三章　Mathematica 使用简介(二)。”

在编写中，每章安排了专题学习内容，列为“应用与实践，”较集中地应用数学知识，参与数学实践活动，从而激发学生的学习兴趣，扩大知识面，提高应用数学的意识和能力。

在编写中，结合高等职业技术院校的学生实际，力求使教材结构紧凑，语言简练，对必要的基础理论、基本方法和基本技能，阐述详细，深入浅出，通俗易懂，以便于教与学。

本套教材分上、下两册，本书是下册，内容包括：空间解析几何与向量代数简介，多元函数微积分，矩阵及其应用，无穷级数，拉普拉斯变换，概率与数理统计，Mathematica 使用简介(二)。在每章、节后都配有一定数量的习题和复习题，以供教师和学生选用。书末附有部分习题答案。

本书为高等职业技术院校、职工大学、电视大学相关专业数学教材，也可做工程技术人员掌握数学方法、提高计算技术的参考书。本书的参考学时为 80～100 学时。在教学中可根据专业不同进行选讲。

参加本册书编写的有：韩志刚，王永森，陈博，卫东，张素芳，陈津，王化久。主编韩志刚，副主编王永森，主审井瑞峰。

本册书的参编院校有：辽宁石化职业技术学校，沈阳高等职业技术学院汽车分院，辽宁机电职业技术学院，沈阳职业学院机械电子学院，辽宁职工大学，天津无线电仪表工业学校。

在编写过程中曾得到机械工业出版社的热情关怀和指导，各编、审同志所在院

校对编审工作给予了大力支持和协助,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

高职数学教材编写组

2003 年 3 月

目　录

第八章　多元函数微积分

我们知道，只有一个自变量的函数 $y=f(x)$，叫做一元函数。但在许多实际问题中，变量之间的对应关系不只是依赖于一个变量，而是依赖于多个变量，于是需要引入多元函数的概念。多元函数与一元函数在概念、理论及研究方法等方面都有许多相同之处，因此，多元函数微积分是一元函数微积分的推广和发展。

本章我们首先介绍空间解析几何，向量代数的一些基本知识及多元函数的有关概念，然后着重研究多元函数的微分学和积分学及它们的应用。

第一节　空间解析几何简介

一、空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置，需要建立平面直角坐标系。为了确定空间任意一点的位置，相应地要引入空间直角坐标系，从而将空间的点与三元有序数组建立起一一对应的关系。

过空间一定点 O，作三条互相垂直的数轴 Ox、Oy 及 Oz（一般具有相同的长度单位），就构成了空间直角坐标系 $Oxyz$。点 O 叫做坐标系的**原点**。三条数轴分别叫做 **x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）及 z 轴（立轴）**，统称为**坐标轴**。通常把 x 轴和 y 轴放在水平面上，z 轴在铅垂方向。三条坐标轴满足右手系，即当右手的四个手指由 x 轴正向到 y 轴正向握住 z 轴时，大拇指的指向规定为 z 轴的正向（见图 8-1）。

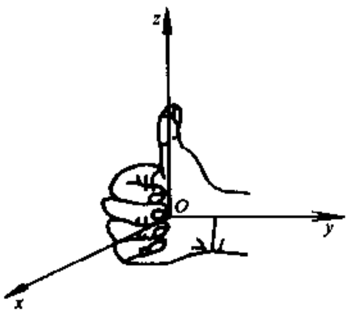

图　8-1

在空间直角坐标系中，任意两条坐标轴可以确定一个平面，这样定出的三个互相垂直的平面统称为**坐标平面**。x 轴及 y 轴所确定的坐标平面叫做 **xOy 面**；y 轴和 z 轴所确定的坐标平面叫做 **yOz 面**；z 轴和 x 轴确定的坐标平面叫做 **xOz 面**。三个坐标平面把整个空间分成 8 个部分，每一部分叫做一个**卦限**（见图 8-2）。上半空间（$z>0$）分别为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限；下半空间（$z<0$）中，与第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限相对应的是第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限。

确定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间中的点与数组之间的一一对应关系。

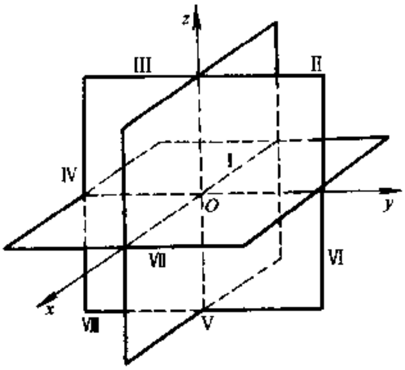

图 8-2

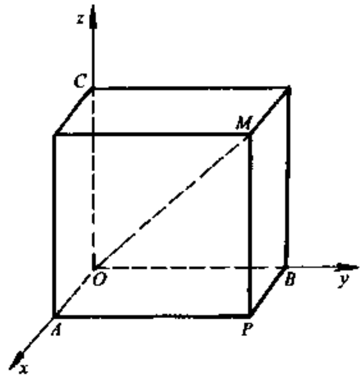

图 8-3

设 M 为空间中的一点，过 M 点作三个平面分别垂直于三条坐标轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别是 A、B、C（见图 8-3）。设 A、B、C 三点在三个坐标轴上的坐标依次为 x、y、z，于是空间中一点 M 就惟一地确定了一个三元有序数组（x、y、z）；反过来，给定一个三元有序数组（x、y、z），就可以惟一地确定空间中一点 M，于是就建立了空间中的点 M 与有序数组（x、y、z）之间的一一对应关系，有序数组叫做点 M 的**坐标**，记作 $M(x,y,z)$。x、y 和 z 依次叫做点 M 的**横坐标、纵坐标和竖坐标**。

由上述规定可知，原点的坐标为 $O(0,0,0)$；x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别是 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$；xOy 面、yOz 面、xOz 面上点的坐标分别是（x、y、0）、$(0,y,z)$ $(x,0,z)$。为了便于确定空间中的点 M（x、y、z）的位置，现将其坐标 x,y,z 在各卦限中的符号列于表 8-1。

表 8-1

卦限	坐　标	卦限	坐　标
Ⅰ	$x>0, y>0, z>0$	Ⅴ	$x>0, y>0, z<0$
Ⅱ	$x<0, y>0, z>0$	Ⅵ	$x<0, y>0, z<0$
Ⅲ	$x<0, y<0, z>0$	Ⅶ	$x<0, y<0, z<0$
Ⅳ	$x>0, y<0, z>0$	Ⅷ	$x>0, y<0, z<0$

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，为了用两点的坐标来表示它们之间的距离 d，我们过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面。这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（见图 8-4）。

由勾股定理

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2$$

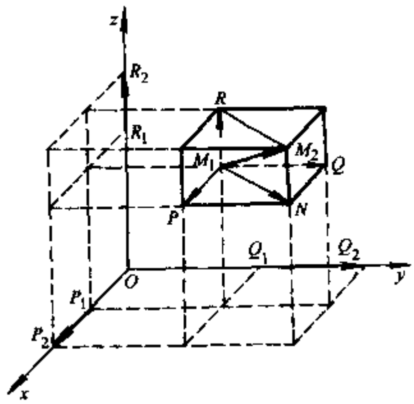

图 8-4

又由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$$

$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$$

$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$$

于是得空间任意两点间的距离公式

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{8-1}$$

特别地,点 $M(x,y,z)$到坐标原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{8-2}$$

例 1 求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形。

证明 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14$$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6$$

所以$|M_2M_3| = |M_3M_1|$,即三角形 $M_1M_2M_3$ 是一个等腰三角形。

三、曲面方程

与平面解析几何中把平面曲线当作动点轨迹一样,在空间解析几何中,任何曲面都可以看作点的轨迹。在这样的意义下,如果曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z) = 0$$

有如下关系:

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足该三元方程。

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足该三元方程。

那么,这个方程就叫做**曲面 S 的方程**,而曲面 S 叫做这个**方程的图形**(见图 8-5)

现在我们来建立几个常见的曲面的方程。

例 2 建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面方程。

解 设 $M(x,y,z)$是球面上的任意一点(见图 8-6),那么

$$|M_0M| = R$$

即

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

两边同时平方,得所求的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{8-3}$$

如果球心在原点，那么 $x_0=y_0=z_0=0$，这时球面的方程为

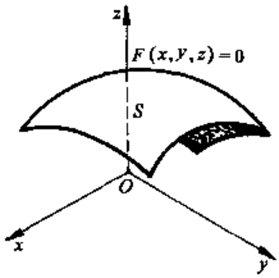

图 8-5

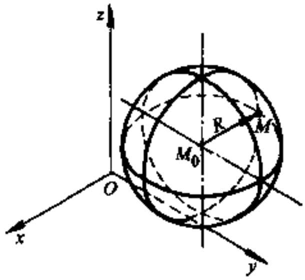

图 8-6

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{8-4}$$

例 3 设有点 $A(1,2,3)$和 $B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面方程。

解 依题意，所求的平分面就是与 A 和B 等距离的点的轨迹，设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上任意一点，由于

$$|AM|=|BM|$$

所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

等式两边平方，化简得

$$2x-6y+2z-7=0$$

这就是所求的平面方程。

可以证明，在空间直角坐标系中，任意一个三元一次方程 $Ax+By+Cz=D$ (A、B、C 不同时为零)都表示一个平面；反过来，任意一个平面的方程都是一个三元一次方程。

对于特殊的三元一次方程，应该熟记它们图形的特点。

$Ax+By+Cz=0$ 表示一个通过原点的平面。

$x=a$，表示平行于 yOz 面的平面，且与 yOz 面的距离为$|a|$。

$y=b$，表示平行于 xOz 面的平面，且与 xOz 面的距离为$|b|$。

$z=c$，表示平行于 xOy 面的平面，且与 xOy 面的距离为$|c|$。

$x=0$，$y=0$，$z=0$ 分别表示 yOz，xOz，xOy 三个坐标平面。

例 4 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面？

解 经过配方，原方程可以写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$$

由例 2 可知，原方程表示球心在点 $M(1,-2,0)$、半径为 $R=\sqrt{5}$的球面。

一般地，设有三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

其特点是缺 xy、yz、xz 各项,各平方项的系数相同,那么它的图形就是一个球面。

四、简单的二次曲面

三元二次方程所表示的曲面叫做**二次曲面**。下面讨论两种简单的二次曲面。

1. 柱面

例 5 求作方程 $x^2+y^2=R^2$ 的图形。

解 方程 $x^2+y^2=R^2$ 在 xOy 平面上表示一个圆,但在空间直角坐标系中,它不含 z,这就意味着 z 可以任意取值,只要 x 与 y 能满足 $x^2+y^2=R^2$ 就行了。因此,它表示的曲面是平行于 z 轴的直线(母线)沿 xOy 平面上的圆 $x^2+y^2=R^2$(准线)平移而形成的一个圆柱面(见图 8-7)。

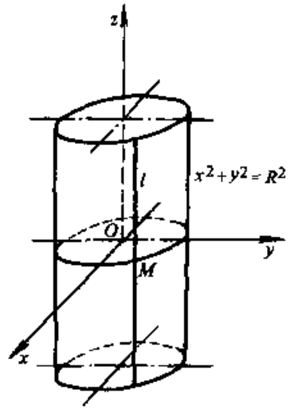

图 8-7

一般地说,满足方程 $F(x,y)=0$ 的图形是母线平行于 z 轴的柱面;满足方程 $F(y,z)=0$ 的图形是母线平行于 x 轴的柱面;满足方程 $F(x,z)=0$ 的图形是母线平行于 y 轴的柱面。

方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$表示双曲柱面(见图 8-8)。

方程 $y^2=2Px$ 表示抛物柱面(见图 8-9)。

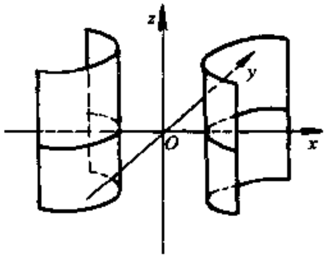

图 8-8

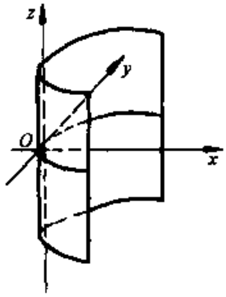

图 8-9

2. 旋转曲面

将 yOz 平面上的一条曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周,就得到一个旋转曲面,它的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0 \tag{8-5}$$

同理,绕 y 轴旋转得到的旋转曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0 \tag{8-6}$$

球面、圆锥面、柱面等都可以看作是旋转曲面。其他如

(1) yOz 而上抛物线 $y^2=2Pz(P>0)$绕 z 轴旋转,得到的曲面叫做**旋转抛物**

面(见图 8-10),它的方程为

$$x^2+y^2=2Pz$$

(2) xOz 面上椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$绕 x 轴或 z 轴旋转,得到的曲面叫做**旋转椭球面**,它们的方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

和

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

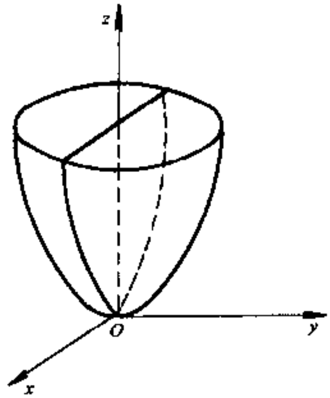

图 8-10

(3) yOz 面上的直线 $z=ky$ 绕 z 轴旋转,得到的旋转曲面叫做**圆锥面**,它的方程为

$$z^2=k^2(x^2+y^2)$$

习 题 8-1

1. 已知三角形的顶点 $A(3,2,0)$、$B(-1,-1,0)$和 $C(11,-6,0)$,求三角形的周长。

2. 指出下列各点所在的卦限:

(1) $A(3,1,-2)$ (2) $B(3,-1,-2)$

(3) $C(-3,-1,2)$ (4) $D(-3,-1,-2)$

3. 求满足下列各条件的平面方程:

(1) 过 $O(0,0,0)$、$M_1(2,-2,2)$和 $M_2(1,-1,2)$三点的平面方程。

(2) 与 xOy 面平行,且与 xOy 面距离为 5 的平面方程。

4. 建立以点(1,3,2)为球心,且通过坐标原点的球面方程。

5. 指出下列方程在平面解析几何和空间解析几何中分别表示什么图形。

(1) $y=2$ (2) $x^2+y^2=4$

(3) $x=0$ (4) $y=3x$

(5) $y^2=2px$ (6) $\begin{cases}x^2+y^2=25\\y=4\end{cases}$

6. 指出下列方程各表示什么曲面,并绘出图形:

(1) $x^2=4y$

(2) $z^2-\frac{y^2}{4}=1$

(3) $x^2+y^2+z^2-2x=0$

(4) $z=x^2+y^2$

(5) $y=0$

(6) $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{5^2}=1$

第二节 空间向量及其线性运算

一、向量的概念

在实际问题中会遇到一类量,它们既有大小,又有方向,例如速度,加速度,电场强度等。像这样既有大小,又有方向的量叫做**向量**或**矢量**。

向量可以用一条有向线段来表示。有向线段的长度表示向量的大小,而箭头表示向量的方向。图 8-11a 是一个以 A 为起点、B 为终点的向量,可以记为$\overrightarrow{AB}$,为了简单起见,还可以用小写黑体字 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 或$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{u}$,$\vec{v}$来标记向量(见图 8-11b)。

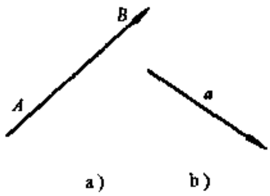

图 8-11

我们所研究的向量只与大小和方向有关,而与起点无关,这样的向量叫做**自由向量**。

以坐标原点 O 为起点的向量叫做**向径**。如$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$等,向径可以记为 r。

向量的大小叫做向量的**模**。向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\boldsymbol{a}$,$\vec{a}$的模依次可记为$|\overrightarrow{M_1M_2}|$,$|\boldsymbol{a}|$,$|\vec{a}|$。模等于 1 的向量叫做**单位向量**。模等于零的向量叫做**零向量**。零向量可记为 $\boldsymbol{O}$ 或$\vec{O}$。零向量的方向是任意的。

如果两个非零向量的方向相同或相反,就称这两个向量平行,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$。由于零向量的方向是任意的,所以零向量与任何向量都平行。

由于我们讨论的是自由向量,所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,且方向相同,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$ 连接 AC(见图 8-12),那么向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 就叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

上述方法叫做向量加法的三角形法则。

向量的加法还有平行四边形法则,即:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,如图 8-13 所示,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB、AD 为邻边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC,显然$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

由图 8-14 可验证,向量的加法满足下列运算规律:

(1) **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) **结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

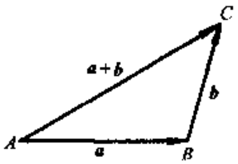

图 8-12

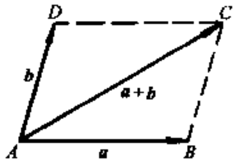

图 8-13

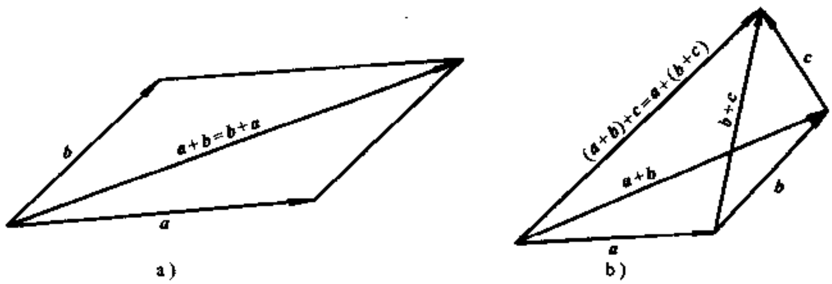

图 8-14

与数量的减法是加法的逆运算一样，向量的减法定义为向量加法的逆运算：对于给定的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，如果向量 $\boldsymbol{c}$ 满足下式

$$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$$

则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

向量的差也可以用三角形法则来求得，如图 8-15 所示，通过平行移动将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 首首相接，则两者尾尾相连的向量即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，其方向指向被减向量 $\boldsymbol{a}$。

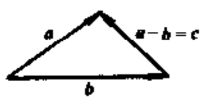

图 8-15

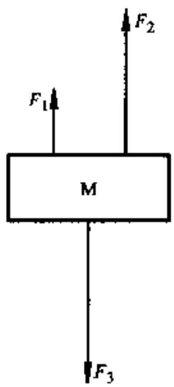

图 8-16

2. 向量的数乘运算

如图 8-16 所示，作用在物体 M 上有三个力：F_1，F_2，F_3，其中 F_1 与 F_2 方向相同，但与 F_3 方向相反，且有 $|F_2|=2|F_1|$，$|F_3|=-2.5|F_1|$，在物理学上，我们很自然地记为：$F_2=2F_1$，$F_3=-2.5F_1$，于是我们引入向量的数乘运算。

定义 实数 λ 与向量$\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,称为 λ 与$\boldsymbol{a}$ 的数乘,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模为$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,并且:

(1) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{a}$ 的方向相同。

(2) 当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{a}$ 的方向相反。

(3) 当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量。

由向量数乘的定义,不难验证它有下列运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$

(2) 分配律 $\boldsymbol{a}(\lambda+\mu)=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(对于数的分配律)
$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(对于向量的分配律)

由向量数乘的定义可知,无论 λ 为任何实数,向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 都是与向量$\boldsymbol{a}$ 平行的。于是有

定理 向量$\boldsymbol{b}$ 与非零向量$\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

设$\boldsymbol{a}$ 为非零向量,记向量$\boldsymbol{a}$ 的单位向量为$\boldsymbol{a}^0$,那么由向量数乘的定义

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\text{或 }\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$$

例 1 如图8-17 所示,设 $ABCD$ 为平行四边形。M、N 分别为DC、BC 的中点,已知$\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AN}=\boldsymbol{d}$,试用$\boldsymbol{c}$ 和$\boldsymbol{d}$ 表示$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$。

解 在图 8-17 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a} \tag{8-7}$$

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b} \tag{8-8}$$

由 2×式(8-7)-式(8-8),得 $2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$

由 2×式(8-8)-式(8-7),得,$2\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$

所以

$$\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}(2\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}),\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}(2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$$

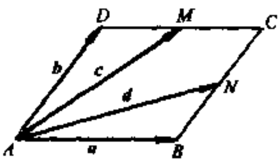

图 8-17

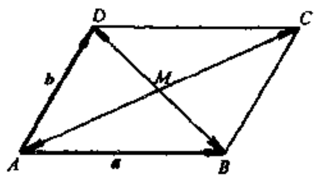

图 8-18

例 2 在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$,这里 M 是平行四边形对角线的交点(见图 8-18)。

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$$

即

$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

又因为$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

三、向量的坐标表示

在空间直角坐标系中，以原点 O 为起点，而终点坐标分别为(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)的三个单位向量，相应地记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$(或 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$)，称为该坐标系的**基本单位向量**。

设以原点为起点的向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，其终点坐标为 $M(a_1,a_2,a_3)$，如图 8-19 所示，并设点 $A(a_1,0,0)$，$B(a_1,a_2,0)$，由向量的加法法则，显然有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$$

再由向量数乘的定义及

$$\overrightarrow{OA}\parallel\boldsymbol{i},\overrightarrow{AB}\parallel\boldsymbol{j},\overrightarrow{BM}\parallel\boldsymbol{k}$$

可知

$$\overrightarrow{OA}=a_1\boldsymbol{i},\overrightarrow{AB}=a_2\boldsymbol{j},\overrightarrow{BM}=a_3\boldsymbol{k}$$

于是有

$$\overrightarrow{OM}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

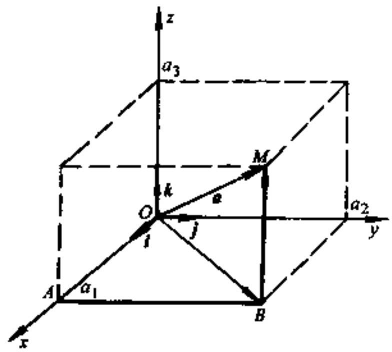

图 8-19

数 a_1、a_2、a_3 叫做**向量$\overrightarrow{OM}$的坐标**，实际上它们分别是向量$\overrightarrow{OM}$在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影。

向量的坐标表示法有以下两种写法：

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\ \text{或}\ \boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$$

引入向量的坐标，会给向量的线性运算带来很大的方便。设

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

那么