最新版

"专转本"系列辅导教材之三

"专转本"高等数学

辅导教程

主　编　蒋秋浩

副主编　李雪玲
吴业军

点拨讲解　精当实用

可信度高　自主检测

东南大學出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

“专转本”系列辅导教材

“专转本”高等数学辅导教程

主　　编　蒋秋浩
副 主 编　李雪玲　吴业军

东南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

"专转本"高等数学辅导教程/蒋秋浩主编. —南京：东南大学出版社，2005.1
("专转本"系列辅导教材)
ISBN 7-81089-849-3

Ⅰ.高... Ⅱ.蒋... Ⅲ.高等数学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 005171 号

"专转本"高等数学辅导教程

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	宋增民
社　　址	南京四牌楼 2 号(邮编:210096)
电　　话	(025)83794400(办公室)/83362442(传真)
网　　址	http://press.seu.edu.cn

印　　刷	南京京新印刷厂	
开　　本	787 mm×1092 mm	1/16
字　　数	400 千字	16.5 印张
版　　次	2005 年 1 月第 1 版	2005 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	1～5000	
定　　价	25.00 元	

前　言

近年来，高等教育事业得到了迅速发展，各种层次的学历教育满足了各种人才的学习需要，尤其是专科起点升本科的发展更为显著。为了满足全日制专科转本科考生的需要，我们参照教育部修订的《高等数学》教学大纲的要求，在潜心研究历年来全日制“专转本”统一考试《高等数学》试卷的考试重点、题型、难度的基础上，精心组织编写了本辅导教程。

本书以高等数学的基本内容、基本原理为主线，重点介绍了高等数学中常见的题型及解题方法。每一节都用通俗易懂的语言，对本节的重点题型及解题技巧进行了归纳总结，并附以大量的典型例题进行了详细的分析讲解，有助于读者理解掌握。

本书精选了两套模拟试卷及参考解答，以便于读者自我检测。

本书还附有历年来全日制专转本统一考试《高等数学》试卷及参考解答，以利于考生对试卷的重点、题型、难度有较全面的了解。

本书第一、二、三、四、五、六章由蒋秋浩、李雪玲编写，第七章及各章习题由吴业军、李宇青、周伟荣编写。

主观上编者力求编好此书，尽最大可能给考生在短时间内快速提高高等数学的应试能力以有益的帮助。编者查阅了大量的资料，数易其稿，囿于水平，疏漏不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2004 年 12 月

目　　录

第七章　常微分方程

第一章 函数、极限和连续

§1 函 数

一、基本内容

(一) 函数的概念

1. 函数的定义

定义 1 给定集合 D,若存在某种对应法则 f,对于变量 x 在集合 D 中变化时,依照法则 f,总有确定的变量 y 与之对应.则称变量 y 为变量 x 的函数,记为

$$y = f(x)$$

其中 x 叫自变量,y 叫因变量或函数.

函数有时也可以用 $\varphi(x)$,$g(x)$,$F(x)$等来表示.

定义域 在数轴上使函数 $f(x)$有定义的自变量的取值范围 D,称为函数的定义域.

值域 函数 y 的取值范围,称为函数的值域.

2. 函数的图形

函数 $y = f(x)$ 在平面直角坐标系 xOy 中表示一条曲线.

(二) 分段函数和隐函数

分段函数 如果函数在自变量的不同取值范围内,有两个或两个以上的表达式,这类函数称为分段函数.

关于分段函数,要注意以下几点:

(1) 因为函数式子是分段表示的,所以各段的定义域必须明确标出;

(2) 对分段函数求函数值时,不同点的函数值应代入相应范围的表达式中去求;

(3) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

隐函数 由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的 y 关于 x 的函数称为隐函数.

对应于隐函数,我们前面所讲的形如 $y = f(x)$ 的函数,一般称为显函数.

(三) 函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 2 函数 $y = f(x)$ 定义在集合 D 上,对于任意 $x \in D$,都有 $-x \in D$.

如果对于任意 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$为偶函数.

如果对于任意 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1-1).

奇函数的图形关于原点对称(如图 1-2).

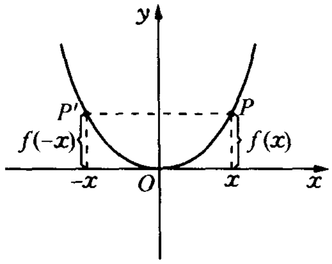

图 1-1

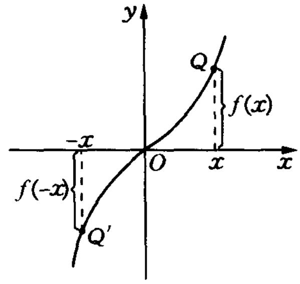

图 1-2

2. 函数的单调性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果对于 D 中的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是单调增加的;如果当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 在 D 上是严格单调增加的.

如果对于 D 上的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是单调减少的;如果当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 在 D 上是严格单调减少的.

由定义可知,在 D 上严格单调增加的函数 $y=f(x)$,其图形是沿 x 轴的正向逐渐上升的(如图 1-3);严格单调减少的函数 $y=f(x)$,其图形是沿 x 轴的正向逐渐下降的(如图 1-4).

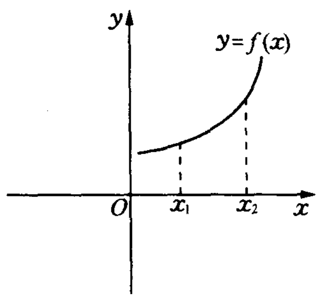

图 1-3

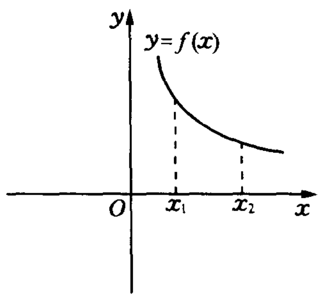

图 1-4

3. 函数的有界性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义,如果存在一个正常数 $M>0$,使得对于 D 中的任意一点 x,总有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是有界的,否则,称 $y=f(x)$ 在 D 上是无界的.

如图 1-5,函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界的几何意义是:曲线 $y=f(x)$ 在 D 上被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条水平直线之间.

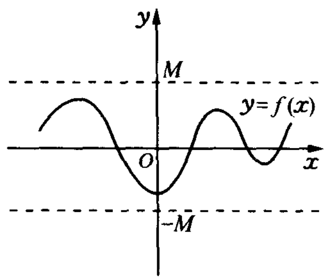

图 1-5

4. 函数的周期性

定义 5 对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个不为零的常数 T,使得关系式 $f(x+T)=f(x)$ 对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何 x 都成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,称满足这个等式的最小正数

T 为函数的周期.

(四) 反函数

定义 6 设已知函数为

$$y = f(x), \tag{1}$$

由此解出的

$$x = \varphi(y) \tag{2}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$,并称 $y = f(x)$ 为直接函数.

由于习惯上往往用字母 x 表示自变量,而用字母 y 表示函数,为了与习惯一致,通常将(2)式中的自变量 y 改写成 x,而将函数 x 改写成 y,于是(1)式的反函数就变为

$$y = \varphi(x). \tag{3}$$

要注意:函数 $x = \varphi(y)$ 与 $y = \varphi(x)$ 是同一个函数,但直接函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在同一个直角坐标系中的图形关于直线 $y = x$ 对称;而直接函数 $y = f(x)$ 与反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在同一个直角坐标系中的图形是同一条曲线.

(五) 基本初等函数

1. 常数函数

$$y = c,$$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,图形是一条平行于 x 轴的直线(如图 1-6).

2. 幂函数

$$y = x^{\mu} \quad (\mu \text{ 为实数}),$$

它的定义域随 μ 值的不同而不同,但不管 μ 的值是多少,它在 $(0, +\infty)$ 内总是有定义的.

当 $\mu > 0$ 时,它的图形如图 1-7,不论 μ 为何值,它的图形都通过原点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 1)$,在 $(0, +\infty)$ 内严格单调增加且无界;

当 $\mu < 0$ 时,它的图形如图 1-8,在 $(0, +\infty)$ 内严格单调减少且无界,曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线,都通过点 $(1, 1)$.

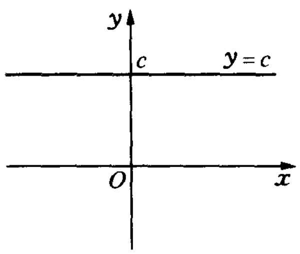

图 1-6

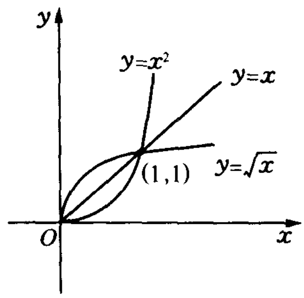

图 1-7

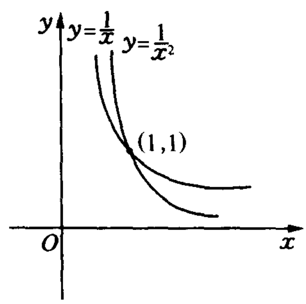

图 1-8

3. 指数函数

$$y = a^{x} \quad (a > 0, a \neq 1),$$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,由于不论 x 为何值,总有 $a^{x} > 0$,且 $a^{0} = 1$,所以它的图形总

是在 x 轴的上方，且通过点(0, 1)(如图 1－9).

当 $a>1$ 时，函数严格单调增加且无界，曲线以 x 轴的负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少且无界，曲线以 x 轴的正半轴为渐近线.

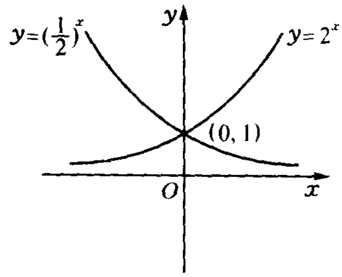

图 1－9

以无理数 e = 2.718 281 8… 为底的指数函数

$$y=e^x$$

是微积分中经常用的指数函数.

4. 对数函数

$$y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1),$$

它的定义域为 $(0, +\infty)$，不论 a 为何值，对数曲线都通过点(1, 0)(如图 1－10).

当 $a>1$ 时，函数严格单调增加且无界，曲线以 y 轴的负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少且无界，曲线以 y 轴的正半轴为渐近线.

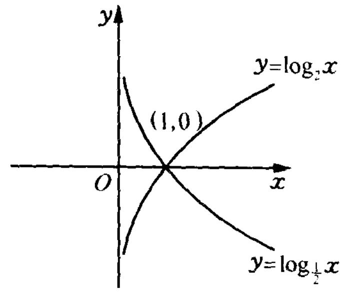

图 1－10

以无理数 e 为底的对数函数

$$y=\log_e x$$

叫自然对数，简记为

$$y=\ln x.$$

5. 三角函数

三角函数主要有以下六个：

$$y=\sin x;\qquad y=\cos x;$$
$$y=\tan x;\qquad y=\cot x;$$
$$y=\sec x;\qquad y=\csc x.$$

函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，是奇函数，且是周期为 2π 的周期函数，其图形如图 1－11.

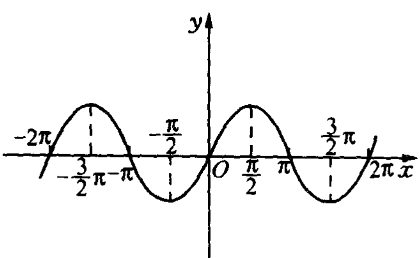

图 1－11

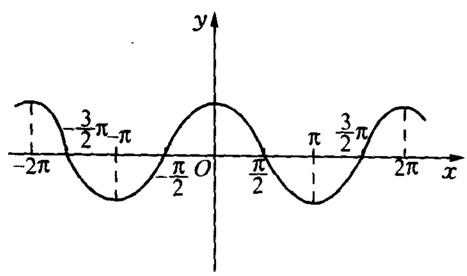

图 1－12

函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，是偶函数，且是周期为 2π 的周期函数，其图形如图 1－12.

因为 $|\sin x| \leqslant 1$，$|\cos x| \leqslant 1$，所以它们都是有界函数.

函数 $y = \tan x$ 的定义域是除去点 $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ 后的其他实数（$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）. 它是奇函数，且是周期为 π 的周期函数，其图形如图 1-13.

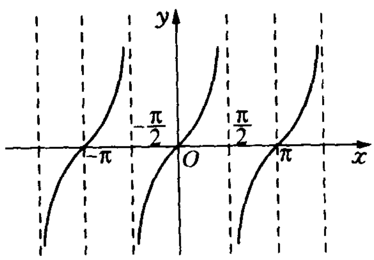

图 1-13

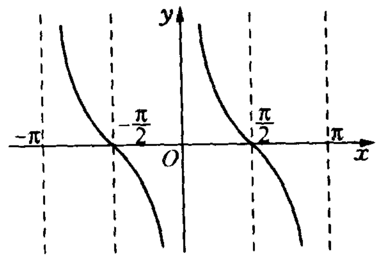

图 1-14

函数 $y = \cot x$ 的定义域是除去点 $x = k\pi$ 后的其他实数（$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）. 它也是奇函数，且是周期为 π 的周期函数，其图形如图 1-14.

6. 反三角函数

常见的反三角函数有以下四个：

$$y = \arcsin x;\qquad y = \arccos x;$$
$$y = \arctan x;\qquad y = \operatorname{arccot} x.$$

$y = \arcsin x$ 的定义域是 $x \in [-1, 1]$，值域是 $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$；

$y = \arccos x$ 的定义域是 $x \in [-1, 1]$，值域是 $y \in [0, \pi]$；

$y = \arctan x$ 的定义域是 $x \in (-\infty, +\infty)$，值域是 $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$；

$y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域是 $x \in (-\infty, +\infty)$，值域是 $y \in (0, \pi)$.

（六）复合函数与初等函数

1. 复合函数

定义 7 设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = \varphi(x)$ 的值域，则在函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域 D 上可以确定一个函数 $y = f[\varphi(x)]$，称此函数为由 f 与 φ 复合而成的复合函数，记作 $y = f[\varphi(x)]$，u 叫做中间变量.

注意：一般情形下，如果函数 $y = f(x)$ 不能写成基本初等函数的加、减、乘、除，我们就把它看成复合函数.

2. 初等函数

所谓初等函数是指由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算（加、减、乘、除）和有限次的函数复合而成的，只有一个表达式的函数.

注意：一般情形下，分段函数和幂指函数（形如 $y = f(x)^{g(x)}$）不是初等函数.

二、重点题型及方法

1. 求函数 $y = f(x)$ 的定义域

(1) 如果 $f(x)$ 中有分母，则分母不能为零；如果 $f(x)$ 中含有 $\sqrt[2n]{\varphi(x)}$，则 $\varphi(x) \geqslant 0$；如

果 $f(x)$ 中含有 $\log_a \varphi(x)$，则 $\varphi(x) > 0$；如果 $f(x)$ 中含有 $\arcsin \varphi(x)$ 或 $\arccos \varphi(x)$，则 $|\varphi(x)| \leqslant 1$.

注意：如果 $f(x)$ 中同时含有以上几种情形，则它的定义域是几种情形集合的交集.

(2) 分段函数的定义域

分段函数定义域是各段函数定义域的并集.

(3) 已知 $f(x)$ 的定义域为 D，求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域

$f[\varphi(x)]$ 的定义域是使 $\varphi(x) \in D$ 的 x 所组成的集合.

2. 求函数的表达式

即已知 $f[\varphi(x)] = g(x)$，求 $f(x)$. 一般的方法是把 $g(x)$ 凑成以 $\varphi(x)$ 为因式的函数，然后用 x 去换 $\varphi(x)$，即得 $f(x)$；有时也可用令 $\varphi(x) = u$ 的方法，在 $\varphi(x) = u$ 中求出 $x = \varphi^{-1}(u)$，再代入即得 $f(u) = g[\varphi^{-1}(u)]$，再把 u 换成 x，即得 $f(x)$.

3. 判定两函数相同

函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只有在它们的表达式和定义域都相同的情形下，我们才能讲它们表示的是同一个函数.

4. 判断函数的奇偶性

三、典型例题解析

例 1.1 求 $f(x) = \arcsin \dfrac{3x}{1+x}$ 的定义域.

解 由反三角函数的定义域要求，可得

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{3x}{1+x} \leqslant 1, \\ 1 + x \neq 0. \end{cases}$$

解上面的不等式组，得

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的定义域为 $-\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$ $\left(\text{或表示成 } x \in \left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]\right)$.

例 1.2 求 $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \dfrac{1}{\ln \cos x}$ 的定义域.

解 只有 $\sqrt{4-x^2}$，$\ln \cos x$ 同时有意义，且分母不为 0 的 x 才是 $f(x)$ 的定义域，即

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0, \\ \cos x > 0, \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2n\pi - \dfrac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \\ x \neq 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \end{cases}$$

上述不等式组的解为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，因此 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

例 1.3 已知函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<0;\\ x, & 0<x<1;\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 5.\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域是三个定义域的并集,即为

$$(-\infty, 0)\cup(0, 1)\cup[1, 5]=(-\infty, 0)\cup(0, 5].$$

例 1.4 已知函数 $f(x)$ 的定义域是$[0, 1]$,求函数 $f(x^2-1)$ 的定义域.

解 由于 $f(x)$ 的定义域是$[0, 1]$,因此求 $f(x^2-1)$ 的定义域的问题就变成了求 x 的取值范围,使得 $0\leqslant x^2-1\leqslant 1$,即 $1\leqslant x^2\leqslant 2$,解得 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$,所以 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2}, -1]\cup[1, \sqrt{2}]$.

例 1.5 下列各组函数中,表示同一个函数的有(　　)

A. $y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sqrt{1-\sin^2 x}$

B. $y_1=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ 与 $y_2=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

C. $y_1=\sqrt{x(x+1)}$ 与 $y_2=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$

D. $y_1=\sqrt{x^2}$ 与 $y_2=x$

解 对于 A, $y_1=\cos x$, $y_2=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|$,可知 y_1 与 y_2 的表达式不相同.因此 y_1 与 y_2 不是同一个函数,应排除 A.

对于 B, y_1 的定义域为 $x^2\neq 0$,即 $x\neq 0$;且 $1-x>0$,即 $x<1$. 综合两者有 $\begin{cases}x<1,\\ x\neq 0.\end{cases}$ 当 $x\neq 0$ 时, $y_1=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. 而 y_2 的定义域也为 $\begin{cases}x<1,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 易见 y_1 与 y_2 的定义域与表达式都相同.因此 y_1 与 y_2 表示同一个函数,应选 B.

对于 C, y_1 的定义域为 $x(x+1)\geqslant 0$,解得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 0$;而 y_2 的定义域为 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 0$,易见 y_1 与 y_2 的定义域不同.因此 y_1 与 y_2 不是同一函数. 应排除 C.

对于 D, $y_1=\sqrt{x^2}=|x|$,它与 $y_2=x$ 的表达式不相同.因此 y_1 与 y_2 不是同一函数,应排除 D.

因此应选 B.

例 1.6 设 $f(x^2+1)=x^4+1$,求 $f(x)$.

解法一 由于

$$\begin{aligned}f(x^2+1)&=x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2-2+2\\&=(x^2+1)^2-2(x^2+1)+2,\end{aligned}$$

因此将上式中 (x^2+1) 换成 x 即得

$$f(x)=x^2-2x+2.$$

解法二 令 $u=x^2+1$，则 $x^2=u-1$，因此 $x^4=(u-1)^2$，代入得

$$f(u)=(u-1)^2+1,$$

将上式中的 u 换成 x 即得

$$f(x)=(x-1)^2+1.$$

例 1.7 设 $f(x)$ 为奇函数，$F(x)=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$，$a$ 为不等于 1 的正常数，则 $F(x)$ 为(　　)

A. 偶函数　　　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　　　D. 奇偶性与 a 有关

解 由题设 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(-x)=-f(x)$，又由于

$$\begin{aligned}F(-x)&=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}\right)\\&=f(x)\frac{1-a^x}{2(1+a^x)}=F(x),\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 为偶函数.

因此应选 A.

§2 极　　限

一、基本内容

(一) 数列极限

1. 数列

定义 1 按自然数 1, 2, 3, …编号，按照某种法则依次排列的一列数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为无穷数列，简称数列，其中的每个数称为数列的项，x_n 称为通项(一般项). 数列记为 $\{x_n\}$.

2. 数列极限

定义 2 对于数列 $\{x_n\}$，如果当 $n\to\infty$ 时，x_n 越来越接近于一个常数 a，则称当 n 趋于无穷大时，数列 $\{x_n\}$ 以常数 a 为极限，或称数列收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a \quad (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

否则，称数列 $\{x_n\}$ 没有极限. 如果数列没有极限，则称数列是发散的.

3. 数列极限的性质

定理 1(唯一性)　若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限值必定唯一.

定理 2(有界性)　若数列$\{x_n\}$收敛,则它必定有界;反之,不一定成立.

定理 3(夹逼定理)　若数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足不等式

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$,则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

定理 4　单调有界数列必有极限.

定理 5(极限的四则运算法则)

如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n \pm y_n] = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n \cdot y_n] = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \cdot B$;

(3) 当$\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{A}{B}.$$

(二) 函数极限的概念

1. 当$x \to x_0$时函数$f(x)$的极限

定义 3　对于函数$y = f(x)$,如果当x趋向于x_0时,函数$f(x)$越来越接近于某一常数A,则称当$x \to x_0$时,函数$f(x)$的极限是A,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (当\ x\to x_0\ 时).$$

如果当x从x_0的右边趋向于x_0时,$f(x)$趋向于某个常数A,则称当$x \to x_0$时,函数$f(x)$的右极限是A,记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A.$$

类似地,当x从x_0的左边趋向于x_0时,$f(x)$趋向于某个常数A,则称当$x \to x_0$时,函数$f(x)$的左极限是A,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A.$$

定理 6　当$x \to x_0$时,函数$f(x)$的极限等于A的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

2. 当$x \to \infty$时函数$f(x)$的极限

定义 4　对于函数$y = f(x)$,如果当$x \to \infty$时,$f(x)$越来越接近于某个常数A,则称当$x \to \infty$时函数$f(x)$的极限是A,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (当\ x \to \infty\ 时).$$

定理 7　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

3. 函数极限的四则运算法则

定理 8 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$;

(3) 当 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ 时

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

推论 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$, …, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, c 为常数, n 为正整数,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) \pm \cdots \pm \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n$.

4. 无穷小与无穷大

定义 5(无穷小) 对于函数 $y = f(x)$, 如果自变量 x 在某个变化过程中,函数 $f(x)$ 的极限为零,则称在此变化过程中, $f(x)$ 为无穷小.

注:除零之外的无穷小都不是常数,即零是无穷小的唯一常数.

定义 6(无穷大) 对于函数 $y = f(x)$, 如果自变量 x 在某个变化过程中,函数值的绝对值越来越大且可以无限地增大,则称在此变化过程中, $f(x)$ 为无穷大.

注:无穷大肯定不是常数.

定理 9 在同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;如果 $f(x)$ 为不是零的无穷小,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

无穷小的性质:

性质 1 有限个无穷小的和仍为无穷小.

性质 2 有界函数乘以无穷小仍为无穷小.

性质 3 有限个无穷小乘积仍为无穷小.

5. 无穷小的比较

设 α, β 是同一变化过程中的无穷小,

(1) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是 α 的高阶无穷小,记为 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是 α 的低阶无穷小;

(3) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c(c \neq 0)$, 则称 β 是 α 的同阶无穷小;

(4) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 是 α 的等阶无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

定理 10 设 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 是同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，$\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=\lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

几个常见的等价无穷小：

当 $x \to 0$ 时，有

$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$，$\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\mathrm{e}^x-1 \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$.

6. 两个重要极限

第一个重要极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}=1.$$

注：这个重要极限的本质首先要是 $\frac{0}{0}$ 型，然后再去凑形式，即凑成 $\lim \frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}$ 的形式，它就是重要极限，即

$$\lim \frac{\sin[\varphi(x)]}{[\varphi(x)]}=1.$$

有时，极限的形式与重要极限一样，但它不是 $\frac{0}{0}$ 型，则此极限肯定不是重要极限. 例如 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$ 就不是重要极限，它的极限不是 1 而是 0.

第二个重要极限：

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

注：这个重要极限的本质首先是 1^{∞} 型，然后再去凑形式，即凑成 $\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}$ 的形式，它就是重要极限，即

$$\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}.$$

二、重点题型及方法

1. 利用极限是常数的概念题

2. $\frac{0}{0}$ 型的极限

(1) 有理分式函数的 $\frac{0}{0}$ 型：一般采用分子、分母因式分解的方法，把分母的零因子消去.

(2) 无理分式函数的 $\frac{0}{0}$ 型：一般采用分子或分母有理化的方法，把分母的零因子消去.