

技工学校教材

# 几何

全国技工学校教材编审委员会编



机械工业出版社

# 技工学校教材 几何

全国技工学校教材编审委员会编



机械工业出版社

1959

## 出版者的話

这套全国统一的教材是根据中华人民共和国劳动部于1959年4月在上海召开的全国技工学校工作会议上确定的二年制技工学校培训目标、课目内容及课时分配等规定进行编写的。初稿由技工学校比较集中的十个省、市的劳动厅(局)组织各技工学校的教师编写而成，最后由劳动部会同第一机械工业部、冶金工业部、煤炭工业部、铁道部等部门和第一机械工业部第四局等单位组成的全国技工学校教材编审委员会统一审定。

这套教材的主要特点是：1)每本教材都是在总结技工学校过去的教学经验基础上由各地与该课程有关的教师集体编写的，选材慎重，内容比较丰富和全面；2)内容比较切合实际情况，其中吸取了苏联技工教材的优点，另外还根据我国技工学校的特点增加了不少新的章节。

数学课包括：代数、几何和三角三门，分别各以单行本的形式出版。  
几何的前五章为平面几何，后三章为立体几何。

本书可作为二年制技工学校的教材。

NO. 3151

---

1959年11月第一版 1959年11月第一版第一次印刷

787×1092 $\frac{1}{25}$  字数 136 千字 印张 7 $\frac{1}{25}$  0,001—60,300 册

机械工业出版社(北京阜成门外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷 新华书店发行

---

北京市书刊出版业营业登记证字第008号 定价(7)0.55元

## 前 言

在社会主义建設總路線的光輝照耀下，和党的教育方針的指导下，全国技工学校的工作已有了迅速的发展和提高。随着生产建設与文化技术的不断发展，必須进一步改进技术学校的教学工作，提高教学质量，为国家培养更多、更好的技术工人。

当前，改进技工学校教学工作的重要一环，是修改与統一教材。1959年4月全国技工学校工作会议曾明确的提出：要爭取在二、三年内逐步完成各門課程的全套教材的編寫工作。去年各地技工学校，在党委領導下，曾組織教师并采取师生相結合的方法，先后編寫了許多教材，为进一步提高教材质量和逐步統一教材工作提供了有利条件。

这次編寫的統一教材共有24种，系由北京、上海、辽宁、湖北、河南、黑龙江、天津、西安、南昌等省、市的一些技工学校教师，分別在当地劳动厅（局）的組織下編寫的，并且进行了第一次的审查工作。为了統一审訂这些教材，劳动部会同第一机械、冶金、煤炭、鐵道等部和第一机械部第四局等单位又組織了全国技工学校教材編審委員会，于今年8月在北京做了第二次的审查修改。

这些教材是按照培养全面发展的技术工人、以中等技术水平和有助于学生毕业后的进一步提高的要求进行編寫的。其中分为适用于招收初中毕业生在校学习二年与招收高小毕业生在校学习三年两种。目前，由于技工学校的教学計劃与教学大綱尚未統一，为了便于各校选用，这次編寫的教材的内容較多，份量較大，因此各校在选用时，应根据主管部門批准的教学計劃与教学大綱，作必要的刪改与增添。

这次編審教材工作，由于时间短促，缺乏經驗，錯誤之处在

所难免，希望有关同志提出意見，以便再作进一步修改。

最后，在这次編审教材的过程中，由于参加編审工作的教師以忘我劳动的热忱，發揮了冲天干勁，和有关的技工学校、劳动厅（局）、中央各工业部，特別是第一机械部第四局的同志的大力支持，因而能够較順利地完成編审工作。对此，我們特致以謝意。

几何第六章是北京长辛店铁路技工学校李国千同志編写的，其余由該校刘立十同志编写，并經北京师范大学数学系鍾善基教授审閱。最后由我会統一审定。

全国技工学校教材編審委員会

1959年8月25日北京

# 目 次

前言 .....	3
第一章 比例綫段 .....	11
I 線段的比 .....	11
§ 1 線段相比的基本概念 .....	11
§ 2 約量与倍量 .....	11
§ 3 公約量 .....	11
§ 4 有公度綫段与无公度綫段 .....	13
§ 5 求两条已知綫段的比 .....	14
习題一 .....	15
II 比例綫段 .....	15
§ 6 比例綫段的基本概念 .....	15
§ 7 比例綫段的性质 .....	16
§ 8 几个定理 .....	19
§ 9 作图題 .....	21
§ 10 三角形內角平分綫的性质 .....	23
习題二 .....	25
第二章 相似形 .....	27
I 相似三角形 .....	27
§ 11 相似多边形的定义 .....	27
§ 12 两个三角形相似的判定 .....	28
§ 13 两个直角三角形相似的判定 .....	33
习題三 .....	38
II 相似多边形 .....	41
§ 14 概說 .....	41
§ 15 分相似多边形成相似三角形 .....	42
§ 16 相似多边形周長的比 .....	43
§ 17 多边形的相似变换 .....	44
§ 18 相似法 .....	46
习題四 .....	48

<b>第三章 三角形及圆中各线段间的相互关系</b>	49
I 三角形中各线段间的相互关系	49
§ 19 射影	49
§ 20 直角三角形两直角边在斜边上的射影	50
§ 21 求两条已知线段比例中项的作图	50
§ 22 勾股定理	51
§ 23 勾股定理的推广	52
§ 24 用勾股定理解应用问题	54
§ 25 已知三角形的三边求三角形的高	58
习题五	59
II 圆内各线段间的相互关系	62
§ 26 圆中两相交弦的关系	62
§ 27 圆外一点所引切线与割线的关系	63
习题六	64
III 用代数法作图	65
§ 28 用某些简单式子表示的线段的作图	65
§ 29 用方程的根表示的线段的作图	67
习题七	70
<b>第四章 多边形的面积</b>	71
§ 30 面积的概念	71
§ 31 矩形的面积	72
§ 32 平行四边形的面积	74
§ 33 菱形的面积	75
§ 34 梯形的面积	75
§ 35 三角形的面积	76
§ 36 任意四边形的面积	78
§ 37 三角形面积的比	79
§ 38 作图题	81
习题八	83
<b>第五章 正多边形与圆</b>	86
I 正多边形	86
§ 39 正多边形的概念	86
§ 40 正多边形的性质	86

§ 41 作图题.....	89'
习题九 .....	92
<b>II 圆的周长与面积 .....</b>	<b>93</b>
§ 42 圆与弧的度量.....	93
§ 43 凸多边形周长的性质.....	93
§ 44 圆的周长.....	95
§ 45 圆的周长和直径的比.....	96
§ 46 圆的面积.....	98
习题十 .....	102
<b>第六章 直线与平面 .....</b>	<b>105</b>
<b>I 平面的性质 .....</b>	<b>105</b>
§ 47 平面的性质.....	105
§ 48 空间作图.....	107
<b>II 直线与直线、直线与平面 .....</b>	<b>108</b>
§ 49 空间二直线的相关位置.....	108
§ 50 直线与平面的相关位置.....	109
§ 51 平面的垂线和斜线.....	110
§ 52 平行直线与平面.....	113
习题十一 .....	115
<b>III 平行平面 .....</b>	<b>116</b>
§ 53 平行平面的判定定理.....	116
习题十二 .....	119
<b>IV 二面角、垂直平面 .....</b>	<b>119</b>
§ 54 二面角.....	119
§ 55 垂直平面.....	121
<b>V 多面角 .....</b>	<b>123</b>
§ 56 多面角.....	123
习题十三 .....	124
<b>第七章 多面体 .....</b>	<b>126</b>
<b>I 棱柱、棱锥与棱台 .....</b>	<b>126</b>
§ 57 多面体的概念.....	126
§ 58 棱柱.....	127
§ 59 平行六面体.....	123
§ 60 长方体对角线的性质.....	128

§ 61 棱柱的侧面积与全面积.....	139
§ 62 棱锥.....	132
§ 63 棱锥中平行于底的截面的性质.....	133
§ 64 正棱锥的侧面积与全面积.....	136
§ 65 棱台.....	137
§ 66 正棱台的侧面积与全面积.....	137
习题十四 .....	139
<b>II 棱柱、棱锥与棱台的体积 .....</b>	<b>140</b>
§ 67 关于体积的概念.....	140
§ 68 长方体的体积.....	141
§ 69 棱柱的体积.....	143
§ 70 祖暅原理.....	147
§ 71 棱锥的体积.....	148
§ 72 棱台的体积.....	150
习题十五 .....	152
<b>第八章 旋转体 .....</b>	<b>154</b>
<b>I 圆柱 .....</b>	<b>154</b>
§ 73 柱面.....	154
§ 74 圆柱.....	154
§ 75 圆柱的侧面积及全面积.....	155
§ 76 圆柱侧面及全面的展开图.....	156
§ 77 圆柱的体积.....	157
习题十六 .....	159
<b>II 圆锥与圆台 .....</b>	<b>160</b>
§ 78 锥面.....	160
§ 79 圆锥.....	160
§ 80 圆锥的侧面积及全面积.....	161
§ 81 圆锥侧面及全面的展开图.....	162
§ 82 圆锥的体积.....	163
§ 83 圆台.....	163
§ 84 圆台的侧面积及全面积.....	164
§ 85 圆台侧面及全面的展开图.....	165
§ 86 圆台的体积.....	165

习题十七 .....	155
<b>III 球 .....</b>	<b>167</b>
§ 87 球面与球 .....	167
§ 88 球冠与球带 .....	168
§ 89 球面的面积 .....	168
§ 90 球的体积 .....	171
§ 91 球缺与球台的体积 .....	173
习题十八 .....	175



# 第一章 比例綫段

## I 線段的比

### § 1 線段相比的基本概念

在学算术的时候，已經知道什么叫比，具体到量來說，只有同类量才能相比，这就是說：在两个同类量中，甲量为乙量的多少倍或几分之几，就叫甲量对乙量的比。

綫段是具有长度的量，自然可以相比，譬如綫段  $AB$  含有 5 个长度单

位， $CD$  含有 2 个同样的长度单位，綫段  $AB$  为綫段  $CD$  的  $\frac{5}{2}$ ，因此  $AB$  对  $CD$  的比为  $\frac{5}{2}$ ，記为  $AB:CD = \frac{5}{2}$  或  $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$  (見圖 1-1)。

所以說：两条綫段的比，就是用同一个长度单位去度量这两条綫段所得量数的比。設  $C$  为长度单位， $a = mC$ ， $b = nC$  ( $m, n$  均为整数)，那末  $a:b = mC:nC = m:n$ 。

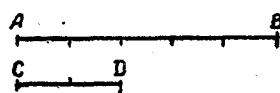


图 1-1

### § 2 約量与倍量

从約数与倍数的意义来考虑量的性质，很容易理解：当两个量的比为整数时，则后项为前项的約量，前项为后项的倍量。譬如  $AB:CD = n$  ( $n$  为整数)， $CD$  是  $AB$  的約量， $AB$  是  $CD$  的倍量。

### § 3 公約量

甲乙丙三个量，若丙量同为甲乙两个量的約量时，丙量叫甲乙两个量的公約量。譬如  $EF$  为  $AB$  与  $CD$  的約量，而  $AB = n \cdot EF$ ，

$CD = m \cdot EF$ , 若  $n$ 、 $m$  为整数, 則  $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m}$ 。

[例題] 求  $AB$  与  $CD$  两条綫段的公約綫段。

已知: 二綫段  $AB$ 、 $CD$ 。

求作:  $AB$ 、 $CD$  的公約綫段。

作法: 設  $AB > CD$ , 在  $AB$  上截取几个  $CD$  的長, 得

$AE = CD$ , 所余  $EB < CD$ ,

再在  $CD$  上截取几个  $EB$  的長,

得  $CF = 2EB$ , 所余  $FD < EB$ ,

再在  $EB$  上截取几个  $FD$  的長,

得  $EG = FD$ , 所余  $GB < FD$ ,

又在  $FD$  上截取几个  $GB$  的長, 得  $FD = 3GB$  而沒有剩余, 則  $GB$  即為所求的公約量。

証明: ∵  $FD = 3GB$ ,

$$\text{則 } EB = EG + GB = FD + GB$$

$$= 3GB + GB = 4GB,$$

$$\therefore CD = CF + FD = 2EB + FD$$

$$= 2 \times 4GB + 3GB = 11GB,$$

$$AB = AE + EB = CD + EB$$

$$= 11GB + 4GB = 15GB.$$

所以  $GB$  是  $AB$  与  $CD$  的公約綫段。

討論: 1)  $GB$  既然是  $AB$ 、 $CD$  的公約綫段, 那末  $GB$  的若干分之一, 也必定是它們的公約綫段: 这样对于  $AB$ 、 $CD$ 來說, 就会有无数条公約的綫段了, 本題应有无数个解, 不过它們最大的公約綫段 (即最大公約量) 还是  $GB$ , 因而上面这种輾轉相截的方法, 是求两条已知綫段的最大公約量的方法。

2) 若  $AB = CD$ , 則它們的公約綫段就是本身, 若  $AB = n \cdot CD$  ( $n$  为整数) 时, 則它們的最大公約綫段是  $CD$ 。

3) 如果上面最后一次截取的过程中,  $FD > 3GB$ , 既可用同样的方法, 輾轉相截, 也可用  $\frac{1}{10}GB$ 、 $\frac{1}{100}GB$ 、…… $\frac{1}{10^n}GB$  連續

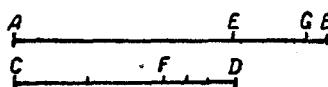


图 1-2

去截所余部分，但是一定能产生下面两种結果之一，即在某一次截尽无余，或者是永远截不尽。如果得到后一結果，那末此題无解。

从上面的例題中可以看出：这种截取公約綫段的形式，与一般度量綫段长短的情况是一致的。而“能量尽必无余或者是量不尽必有余”的結論，也是众所公认的事實。

#### § 4 有公度綫段与无公度綫段

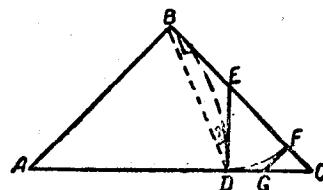
两条綫段如果有公約量时，那末这两条綫段，叫做有公度綫段，做为公約量的綫段，叫做这两条綫段的公度，其中最大的叫最大公度；反之，如果没有公約量时，这两条綫段，叫做无公度綫段。

〔例題〕等腰直角三角形的斜边与腰，是无公度綫段。

已知：在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $AC$ 为斜边（图 1-3）。

求証： $AB$ 与 $AC$ 无公度。

图 1-3



証明：在 $AC$ 上，截取 $AD$ ，

使 $AD=AB$ ，并作 $ED \perp AC$ ，交 $BC$ 于 $E$ 。 $\because \angle A = \angle C = 45^\circ$ ，則 $\triangle DCE$ 也是等腰直角三角形，并且 $\angle 1 = \angle 2$ （等角的余角相等）， $\therefore BE = ED = DC$ 。

由于 $AC > AB$ ，而 $AC < AB + BC$ ，即

$AB < AC < 2AB$ ，那末以 $AB$ 的长去截取 $AC$ ，在截取一次( $AD=AB$ )之后，所余 $DC < AB$ 。

現在再在 $BC$ （以 $BC$ 代 $AB$ ）上截取等于 $DC$ 的綫段，第一次截取 $BE$ ( $BE=DC$ )之后，还要在所余綫段 $EC$ 上繼續截取，但 $EC$ 是等腰直角三角形 $DCE$ 的斜边，于是又重複出現了用等腰直角三角形的直角边在斜边上截取的現象，如果照样做下去，就会出現較小的等腰直角三角形 $FGC$ ，……，显然这种过程永无完結的时候，所以說綫段 $AC$ 与 $AB$ 的公度是不存在的，也就是說 $AC$

与  $AB$  是无公度綫段。

### §5 求两条已知綫段的比

我們先研究两条有公度綫段的比：

如图 1-1, 已知  $AB = 15GB$ ,  $CD = 11GB$ , 那末  $AB:CD = \frac{15}{11}$ ,

这就是說，当两条綫段有公度时，它們的比值是一个有理数。

再研究两条无公度的綫段：

如图 1-4, 把  $CD$  分成  $n$  等分,

图 1-4

每份为  $CK$ , 則  $CD = n \cdot CK$ ,  $CK$  是  $CD$  的約量。由于  $AB$  与  $CD$  是无公度綫段，所有  $CD$  的約量，都不能把  $AB$  量尽无余。設

$$m \cdot CK < AB < (m+1)CK,$$

則  $AB:CD > m:CK:n \cdot CK$ , (不等量公理)

即  $AB:CD > m:n$ ;

同理  $AB:CD < (m+1):n$ ,

$$\therefore \frac{m}{n} < \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n}.$$

由于  $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$ ,

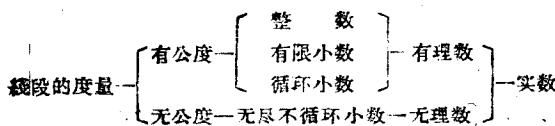
若  $n$  为很大的数时，则  $\frac{1}{n}$  是很小的数并接近于 0，这时

$$\frac{m}{n} \approx \frac{m+1}{n},$$

所以  $\frac{AB}{CD} \approx \frac{m}{n}$  或  $\frac{AB}{CD} \approx \frac{m+1}{n}$ 。这就是說：当两条綫段无公度时，它們的比值虽然是实际存在的数，却是一个无尽不循环的小数，数学上叫它无理数②，它只能取得有理数的近似值。

由于綫段的度量，本质上就是求两条綫段的比，比值正好是量度后所得的量数，因而能归納成下表：

② 关于无理数，在代数第一章中已詳述。



### 习題一

1. 比較下列各組名詞的異同：

1) 倍數與倍量； 2) 公約數與公約量； 3) 公度與最大公度。

2. 簡單解釋有公度線段與無公度線段。

3. 在下列情況下，求線段  $a$  與  $b$  的最大公度各是線段  $m$  的多少倍：

1)  $a = 8m, b = 12m;$

2)  $a = 5m, b = 3m;$

3)  $a = 9m, b = 3m;$

4)  $a = 2m, b = 3m.$

4. 直角三角形的一個銳角是  $30^\circ$ ，求斜邊和最小直角邊的最大公度。

5. 如果線段  $a$  含有線段  $n$  的 54 倍，線段  $b$  含有線段  $n$  的 15 倍，問在線段  $a$  上連續截取等於  $b$  的線段後，所余小於  $b$  的線段，還含有線段  $n$  的几倍？

6. 求已知線段  $XY$  的長的  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{3}$  的最大公度。

7. 試證明等邊三角形的邊與高，為不可公度線段。

(提示：如圖 1-5， $AD$  為  $BC$  邊上的高，過  $D$  作  $DE \parallel AC$ ，交  $AB$  於  $E$ ，則  $BD = ED = AE$ 。在  $AD$  上，取  $AF = AE$ ，那末考慮  $AD$  與  $AB$  的公度，現在只要考慮  $AB$  與  $AD$  的公度；並且進一步只用考慮  $FD$  與  $ED$  的公度；最後過  $F$ ，作  $FG \perp DE$ ，於是出現等腰直角  $\triangle EFG$ 。)

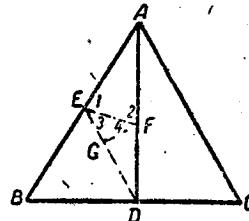


图 1-5

## II 比例線段

### § 6 比例線段的基本概念

我們早已明確到：比例是把兩個比值相等的比，用等號連接起來的式子。兩條線段既然可以相比，那末四條線段  $a, b, c, d$

中，当  $a:b$  与  $c:d$  的比值相同时，叫做  $a, b, c, d$  四条綫段成比例，通常写成

$$a:b=c:d, \text{ 或 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

很明显， $a$  与  $d$  是两外項， $b$  与  $c$  是两內項，綫段  $d$  叫綫段  $a, b, c$  的第四比例項；如果在这个比例式中， $c = b$  时，即  $a:b=b:d$  或  $a:c=c:d$ ，綫段  $b$  或  $c$  叫綫段  $a$  与  $d$  的比例中項，綫段  $d$  叫綫段  $a$  与  $b$  或  $a$  与  $c$  的第三比例項。

## § 7 比例綫段的性质

关于綫段成比例的性质，和我們在算术或代数中所学过的任何四个数或量成比例的性质是一致的，下面就是我們最常用到的几种基本性质：

1) 假如  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末  $ad = bc$ 。

2) 假如  $ad = bc$ ，那末  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

3) 假如  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ 。 (反比定理)

4) 假如  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 。 (更比定理)

5) 假如  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  或  $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$   
 $= \frac{c+d}{c}$ 。 (合比定理)

証明： $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，

則  $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ ， (等量定理)

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};$$

$$\text{又: } \frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

$$\text{同理 } \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}.$$