技工学校教材

几何

全国技工学校教材編审委員会編

机械工业出版社

技 工 学 校 教 材

几　　何

全国技工学校教材編审委員会編

机 械 工 业 出 版 社

1 9 5 9

出版者的話

这套全国統一的教材是根据中华人民共和国劳动部于1959年4月在上海召开的全国技工学校工作会議上确定的二年制技工学校培訓目标、課目內容及課时分配等規定进行編写的。初稿由技工学校比較集中的十个省、市的劳动厅(局)組織各技工学校的教师編写而成，最后由劳动部会同第一机械工业部、冶金工业部、煤炭工业部、鉄道部等部門和第一机械工业部第四局等单位組成的全国技工学校教材編审委員会統一审定。

这套教材的主要特点是：1)每本教材都是在总結技工学校过去的教学經驗基础上由各地与該課程有关的教师集体編写的，选材慎重，內容比較丰富和全面；2)內容比較切合实际情况，其中吸取了苏联技工教材的优点，另外还根据我国技工学校的教学特点增加了不少新的章节。

数学課包括：代数、几何和三角三門，分别各以单行本的形式出版。几何的前五章为平面几何，后三章为立体几何。

本书可作为二年制技工学校的教材。

NO. 3151

1959年11月第一版　　1959年11月第一版第一次印刷

787×1092 1/25　字数136千字　印張 7 1/25　0,001—60,300册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷　　新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第008号　定价(7)0.55元

前 言

在社会主义建設总路綫的光輝照耀下，和党的教育方針的指导下，全国技工学校的工作已有了迅速的发展和提高。随着生产建設与文化技术的不断发展，必須进一步改进技术学校的教学工作，提高教学质量，为国家培养更多、更好的技术工人。

当前，改进技工学校教学工作的重要一环，是修改与統一教材。1959年4月全国技工学校工作会議曾明确的提出：要爭取在二、三年內逐步完成各門課程的全套教材的編写工作。去年各地技工学校，在党委領导下，曾組織教师并采取师生相結合的方法，先后編写了許多教材，为进一步提高教材质量和逐步統一教材工作提供了有利条件。

这次編写的統一教材共有24种，系由北京、上海、辽宁、湖北、河南、黑龙江、天津、西安、南昌等省、市的一些技工学校教师，分别在当地劳动厅（局）的組織下編写的，并且进行了第一次的审查工作。为了統一审訂这些教材，劳动部会同第一机械、冶金、煤炭、鉄道等部和第一机械部第四局等单位又組織了全国技工学校教材編审委員会，于今年8月在北京做了第二次的审查修改。

这些教材是按照培养全面发展的技术工人、以中等技术水平和有助于学生毕业后的进一步提高的要求进行編写的。其中分为适用于招收初中毕业生在校学习二年与招收高小毕业生在校学习三年两种。目前，由于技工学校的教学計划与教学大綱尚未統一，为了便于各校选用，这次編写的教材的內容較多，份量較大，因此各校在选用时，应根据主管部門批准的教学計划与教学大綱，作必要的删改与增添。

这次編审教材工作，由于时間短促，缺乏經驗，錯誤之处在

所难免，希望有关同志提出意見，以便再作进一步修改。

最后，在这次編审教材的过程中，由于参加編审工作的教师以忘我劳动的热忱，发揮了冲天干勁，和有关的技工学校、劳动厅（局）、中央各工业部，特别是第一机械部第四局的同志的大力支持，因而能够較順利地完成編审工作。对此，我們特致以謝意。

几何第六章是北京长辛店鉄路技工学校李国千同志編写的，其余由該校刘立十同志編写，并經北京师范大学数学系鍾善基教授审閱。最后由我会統一审定。

全国技工学校教材編审委員会

1959年8月25日北京

目　次

第一章　比例綫段

I　綫段的比

§1　綫段相比的基本概念

在学算术的时候，已經知道什么叫比，具体到量来說，只有同类量才能相比，这就是說：在两个同类量中，甲量为乙量的多少倍或几分之几，就叫甲量对乙量的比。

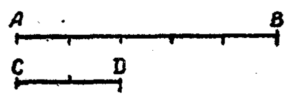

图 1-1

綫段是具有长度的量，自然可以相比，譬如綫段 AB 含有 5 个长度单位，CD 含有 2 个同样的长度单位，綫段 AB 为綫段 CD 的 $\frac{5}{2}$，因此 AB 对 CD 的比为 $\frac{5}{2}$，記为 $AB:CD=\frac{5}{2}$ 或 $\frac{AB}{CD}=\frac{5}{2}$（見圖 1-1)。

所以說：两条綫段的比，就是用同一个长度单位去度量这两条綫段所得量数的比。設 C 为长度单位，$a=mC$，$b=nC$（m、n 均为整数），那末 $a:b=mC:nC=m:n$。

§2　約量与倍量

从約数与倍数的意义来考虑量的性质，很容易理解：当两个量的比为整数时，则后項为前項的約量，前項为后項的倍量。譬如 $AB:CD=n$（n 为整数），CD 是 AB 的約量，AB 是 CD 的倍量。

§3　公約量

甲乙丙三个量，若丙量同为甲乙两个量的約量时，丙量叫甲乙两个量的公約量。譬如 EF 为 AB 与 CD 的約量，而 $AB=n\cdot EF$，

$CD=m\cdot EF$，若 n、m 为整数，则$\frac{AB}{CD}=\frac{n}{m}$。

〔例題〕 求 AB 与 CD 两条綫段的公約綫段。

已知：二綫段 AB、CD。

求作：AB、CD 的公約綫段。

作法：設 $AB>CD$，在 AB 上截取几个 CD 的长，得 $AE=CD$，所余 $EB<CD$，再在 CD 上截取几个 EB 的长，得 $CF=2EB$，所余 $FD<EB$，再在 EB 上截取几个 FD 的长，得 $EG=FD$，所余 $GB<FD$，

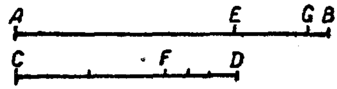

图 1-2

又在 FD 上截取几个 GB 的长，得 $FD=3GB$ 而沒有剩余，則 GB 即为所求的公約量。

証明：$\because$ $FD=3GB$，

則 $EB=EG+GB=FD+GB$

$=3GB+GB=4GB$，

$\therefore$ $CD=CF+FD=2EB+FD$

$=2\times 4GB+3GB=11GB$，

$AB=AE+EB=CD+EB$

$=11GB+4GB=15GB$。

所以 GB 是AB 与 CD 的公約綫段。

討論：1）GB 既然是 AB、CD 的公約綫段，那末 GB 的若干分之一，也必定是它們的公約綫段：这样对于 AB、CD 来說，就会有无数条公約的綫段了，本題应有无数个解，不过它們最大的公約綫段（卽最大公約量）还是 GB，因而上面这种輾轉相截的方法，是求两条已知綫段的最大公約量的方法。

2）若 $AB=CD$，則它們的公約綫段就是本身，若 $AB=n\cdot CD$（n 为整数）时，則它們的最大公約綫段是 CD。

3）如果上面最后一次截取的过程中，$FD>3GB$，既可用同样的方法，輾轉相截，也可用$\frac{1}{10}GB$、$\frac{1}{100}GB$、……$\frac{1}{10^n}GB$ 連續

去截所余部分，但是一定能产生下面两种結果之一，即在某一次截尽无余，或者是永远截不尽。如果得到后一結果，那末此題无解。

从上面的例題中可以看出：这种截取公約綫段的形式，与一般度量綫段长短的情况是一致的。而“能量尽必无余或者是量不尽必有余”的結論，也是众所公认的事实。

§4 有公度綫段与无公度綫段

两条綫段如果有公約量时，那末这两条綫段，叫做有公度綫段，做为公約量的綫段，叫做这两条綫段的公度，其中最大的叫最大公度；反之，如果沒有公約量时，这两条綫段，叫做无公度綫段。

〔例題〕 等腰直角三角形的斜边与腰，是无公度綫段。

已知：在等腰直角$\triangle ABC$中，AC为斜边（图1-3）。

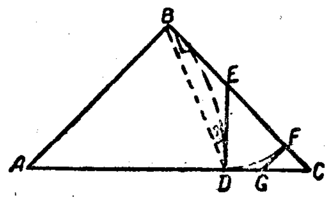

图 1-3

求証：AB与AC无公度。

証明：在AC上，截取AD，使$AD=AB$，并作$ED\perp AC$，交BC于E。$\because \angle A=\angle C=45^\circ$，則$\triangle DCE$也是等腰直角三角形，并且$\angle 1=\angle 2$（等角的余角相等），$\therefore BE=ED=DC$。

由于$AC>AB$，而$AC<AB+BC$，即

$AB<AC<2AB$，那末以AB的长去截取AC，在截取一次（$AD=AB$）之后，所余$DC<AB$。

現在再在BC（以BC代AB）上截取等于DC的綫段，第一次截取$BE(BE=DC)$之后，还要在所余綫段EC上继續截取，但EC是等腰直角三角形DCE的斜边，于是又重复出現了用等腰直角三角形的直角边在斜边上截取的現象，如果照样做下去，就会出現較小的等腰直角三角形FGC、……，显然这种过程永无完結的时候，所以說綫段AC与AB的公度是不存在的，也就是說AC

与 AB 是无公度綫段。

§5 求两条已知綫段的比

我們先研究两条有公度綫段的比:

如图 1-1，已知 $AB=15GB$，$CD=11GB$，那末 $AB:CD=\frac{15}{11}$，这就是說，当两条綫段有公度时，它們的比值是一个有理数。

再研究两条无公度的綫段:

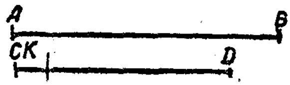

图 1-4

如图 1-4，把 CD 分成 n 等分，每份为 CK，則 $CD=n\cdot CK$，CK是 CD 的約量。由于 AB 与 CD 是无公度綫段，所有 CD 的約量，都不能把 AB 量尽无余。設

$$m\cdot CK<AB<(m+1)CK,$$

則　　$AB:CD>m\cdot CK:n\cdot CK$，（不等量公理）

卽　　$AB:CD>m:n$;

同理　　$AB:CD<(m+1):n$,

$$\therefore \quad \frac{m}{n}<\frac{AB}{CD}<\frac{m+1}{n}。$$

由于　　$\frac{m+1}{n}-\frac{m}{n}=\frac{1}{n}$,

若 n 为很大的数时，則$\frac{1}{n}$是很小的数并接近于 0，这时

$$\frac{m}{n}\approx\frac{m+1}{n},$$

所以$\frac{AB}{CD}\approx\frac{m}{n}$或$\frac{AB}{CD}\approx\frac{m+1}{n}$。这就是說：当两条綫段无公度时，它們的比值虽然是实际存在的数，却是一个无尽不循环的小数，数学上叫它无理数[1]，它只能取得有理数的近似值。

由于綫段的度量，本质上就是求两条綫段的比，比值正好是量度后所得的量数，因而能归納成下表:

---

[1] 关于无理数，在代数第一章中已詳述。

$$\text{綫段的度量}-\begin{cases}\text{有公度}-\left.\begin{cases}\text{整　数}\\ \text{有限小数}\\ \text{循环小数}\end{cases}\right\}-\text{有理数}\\ \text{无公度}-\text{无尽不循环小数}-\text{无理数}\end{cases}\Bigg\}-\text{实数}$$

习　題　一

1. 比較下列各組名詞的异同:

   1）倍数与倍量；　2）公約数与公約量；　3）公度与最大公度。

2. 簡单解釋有公度綫段与无公度綫段。

3. 在下列情况下，求綫段 a 与 b 的最大公度各是綫段 m 的多少倍:

   1）$a=8m$，　$b=12m$；

   2）$a=5m$，　$b=3m$；

   3）$a=9m$，　$b=3m$；

   4）$a=2m$，　$b=3m$。

4. 直角三角形的一个銳角是30°，求斜边和最小直角边的最大公度。

5. 如果綫段 a 含有綫段 n 的 54 倍，綫段 b 含有綫段 n 的 15 倍，問在綫段 a 上連續截取等于 b 的綫段后，所余小于 b 的綫段，还含有綫段 n 的几倍?

6. 求已知綫段XY 的长的$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$的最大公度。

7. 試証明等边三角形的边与高，为不可公度綫段。

(提示：如图1-5，AD为BC边上的高，过 D作$DE \parallel AC$，交 AB于E，则 $BD=ED=AE$。在 AD上，取$AF=AE$，那末考虑 AD与 AB的公度，現在只要考虑AE与AD的公度；并且进一步只用考虑FD与ED的公度；最后过 F，作$FG\perp DE$，于是出現等腰直角$\triangle EFG$)。

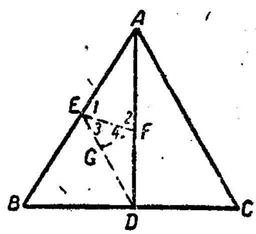

图　1-5

II　比例綫段

§6　比例綫段的基本概念

我們早已明确到：比例是把两个比値相等的比，用等号連接起来的式子。两条綫段既然可以相比，那末四条綫段 a、b、c、d

中，当$a:b$与$c:d$的比值相同时，叫做a、b、c、d四条綫段成比例，通常写成

$$a:b=c:d, \text{ 或 } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}。$$

很明显，a与d是两外項，b与c是两内項，綫段d叫綫段a、b、c的第四比例項；如果在这个比例式中，$c=b$时，即$a:b=b:d$或$a:c=c:d$，綫段b或c叫綫段a与d的比例中項，綫段d叫綫段a与b或a与c的第三比例項。

§7 比例綫段的性质

关于綫段成比例的性质，和我們在算术或代数中所学过的任何四个数或量成比例的性质是一致的，下面就是我們最常用到的几种基本性质：

1）假如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $ad=bc$。

2）假如 $ad=bc$，那末 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

3）假如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$。（反比定理）

4）假如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$。（更比定理）

5）假如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 或 $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$。（合比定理）

証明：$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

則 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$，（等量定理）

$\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；

又$\because \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，

同理 $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$。