大学数学的内容、方法与技巧丛书

配合北京大学数学系《高等代数》第三版

高等代数

内容、方法与技巧

孙清华　孙昊　李金兰

Gaodeng Daishu

Neirong Fangfa Yu

Jiqiao

华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

大学数学的内容、方法与技巧丛书

高等代数

内容、方法与技巧

孙清华　孙　昊　李金兰

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数内容、方法与技巧/孙清华　孙　昊　李金兰
武汉:华中科技大学出版社,2006年8月
ISBN 7-5609-3770-5

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①孙…　②孙…　③李…
Ⅲ. 高等代数-高等学校-解题
Ⅳ. O15

高等代数内容、方法与技巧　　孙清华　孙　昊　李金兰

策划编辑:徐正达
责任编辑:刘　勤　　封面设计:刘　卉
责任校对:陈　骏　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
　　武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:武汉佳年华科技有限公司
印　　刷:武汉市新华印刷有限责任公司

开本:850×1168　1/32　　印张:14.375　　字数:345 000
版次:2006年8月第1版　　印次:2006年8月第1次印刷　　定价:18.80元
ISBN 7-5609-3770-5/O・392

内容简介

本书是“大学数学的内容、方法与技巧丛书”之一，是学习高等代数课程的一本很好的辅导书.本书编写顺序与一般的高等代数教材同步，内容包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间、双线性函数与辛空间等高等代数的基本理论与方法.本书在凝炼概念、释疑解难的基础上用大量的篇幅和众多的例题对高等代数的基础理论、基本性质、基本方法和应用进行了推理与演绎，使读者通过本书能更好地理解高等代数的基本概念，掌握高等代数的基本方法，熟悉高等代数的基本技巧.

希望本书能成为您的良师益友，欢迎您选用本系列丛书.

前　　言

高等代数是高等学校数学专业的一门主要基础课程，它在承接和扩展中学代数内容的同时，又为学习后续课程——近世代数与抽象代数奠定了理论基础，它对培养读者的抽象思维能力、逻辑思维能力和学习后续课程具有很重要的作用. 高等代数的特点是概念抽象，理论难懂，方法繁多，变化复杂，尤其在解题中，往往会感到证明题难以下手，计算题方法不易统一. 为解决读者学习高等代数中存在的困难，帮助读者理解与思考高等代数的基本概念，掌握与熟练高等代数的基本方法，熟悉与运用高等代数的基本技巧，我们编写了此书，相信能够使读者学有所获.

本书与丛书中其它书籍一样，按章节进行编写，分为多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间、双线性函数与辛空间等10章. 每节分为主要内容，疑难解析，方法、技巧与典型例题分析三个部分. 主要内容按照北京大学数学系编《高等代数》(第三版)归纳凝炼；疑难解析依据读者在学习中可能产生的问题与教材中不够明确的内容进行分析与阐述；方法、技巧与典型例题分析部分不仅对北京大学数学系编写的《高等代数》教材中的习题作了较完整的解析，还补充了部分习题，以求题型更加完整、方法更加全面、技巧更加凸现. 为了使读者能更好地理解与接受本书的内容，我们采取了循序渐进、突出重点的方式，较详尽、完整地对问题与例题进行了解析与论证，并作了必要的评点与归纳.

本书在编写过程中参阅了同行们的一些著作，同时得到了华中科技大学出版社的大力支持与帮助，在此向他们致以诚挚的感谢.

由于经验不足与学识所限，本书错漏之处在所难免，诚恳希望读者指出以求及时改正.

孙清华

2006 年 2 月

目　　录

第一章　多　项　式

多项式理论是高等代数的一个重要内容，它为高等代数所阐述的内容提供了理论依据．学好多项式理论，对进一步学习数学理论与实际应用，将起到很大的作用．

第一节　数域与一元多项式

主 要 内 容

1. 定义 1　设 P 是由一些复数组成的集合（其中包括 0 与 1），如果 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍是 P 中的数，则称 P 为一个**数域**．

全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域，分别用字母 **Q**、**R**、**C** 表示．

所有的数域都包含有理数域．

如果数集 P 中任意两个数作某一运算的结果仍在 P 中，就称数集 P 对这个运算是**封闭的**．

2. 定义 2　对于非负整数 n，形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为数域 $P(a_0,a_1,\cdots,a_n\in P)$ 上 x 的**一元多项式**．

常用 $f(x),g(x),\cdots$ 或 $f,g,\cdots$ 来表示多项式．

3. 定义 3　若在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中，除去系数为零的项外，同次项的系数全相等，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **相等**，记为 $f(x)=g(x)$．

系数全为零的多项式称为**零多项式**，记为 0，是唯一不定义次数的多项式．

多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\partial(f(x))$.

4. 数域 P 上的两个多项式经过加、减、乘等运算后的结果仍为 P 上的多项式，其运算满足以下规律：

(1) 加法交换律　$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$.

(2) 加法结合律　$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$.

(3) 乘法交换律　$f(x)g(x)=g(x)f(x)$.

(4) 乘法结合律　$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$.

(5) 乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

(6) 乘法消去律　若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且 $f(x)\neq 0$，则 $g(x)=h(x)$. 且有

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant \max(\partial(f(x)),\partial(g(x))),$$

$$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x)).$$

5. 定义 4　所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，称为数域 P 上的**一元多项式环**，记为 $P[x]$，P 称为 $P[x]$ 的系数域.

疑难解析

1. 数域与数环有什么不同？试举例说明.

答　从定义可知：在至少含两个数（0 与 1）的数集上，如果任两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍属于 P，则 P 是一个数域；如果任两个数的和、差、积仍属于 P，则 P 是一个数环. 显然，数域与数环的区别在于数环对商的运算不封闭. 例如：

(1) $F_1=\{a+b\sqrt{3}\mathrm{i}\mid a,b$ 为任意有理数$\}$ 是数环也是数域. 因为 $0,1\in F_1$. 设

$$a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i},\quad a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i}\in F_1,$$

有 $(a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i})\pm(a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{3}\mathrm{i}\in F_1$,

$(a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i})(a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i})=(a_1a_2-3b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{3}\mathrm{i}\in F_1$,

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i}}{a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{a_1a_2+3b_1b_2}{a_2^2+3b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+3b_2^2}\sqrt{3}\mathrm{i}\in F_1.$$

(2) $F_2=\{a+bi \mid a,b$ 为任意整数$\}$是数环但不是数域. 因为 $1+2i,1+3i\in F_2$,有

$$(1+2i)+(1+3i)=2+5i\in F_2,\ (1+2i)-(1+3i)=-i\in F_2,$$

$$(1+2i)\cdot(1+3i)=-5+5i\in F_2,$$

但是 $$\frac{1+2i}{1+3i}=\frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{7}{10}-\frac{1}{10}i\notin F_2.$$

可见,若 P 是数域,则 P 必是数环;若 P 是数环,则 P 不一定是数域.

2. 怎样认识一元多项式的表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的形式性?有什么意义?

答 应该认识到,一元多项式的表达式中的 x 是一个符号. 当这符号是未知数时,即为初等代数中的多项式. 但这符号也可以表示其它事物,如行列式、矩阵等,因此一元多项式的表达式的形式性,将统一对未知数与其它事物的研究,在引入运算反映各事物运算规律与研究普遍性质上有积极的作用.

方法、技巧与典型例题分析

首先,要对数域的概念有一个明确的了解,能判定一个数集是否为数域或数环,并能证明一些简单的命题.

例 1 设数环 $P\neq\varnothing$,证明 P 为一无限数集.

证 由 $P\neq\varnothing$,故必有 $a\ (a\neq 0)\in P$,则

$$a+a=2a\in P,\ a+2a=3a\in P,\ \cdots$$

显然,当 $m\neq n$ 时,$ma\neq na$,所以 P 含无穷多个数,是无限数集.

例 2 设数集 P 至少含有两个数,证明:若 P 中任意两个数的差与商(除数不为零)仍属于 P,则 P 必为数域.

证 只需证 P 对加法与乘法也封闭.

设 $a,b\in P$,则 $a-a=0\in P$. 当 $b\neq 0$ 时,$b/b=1\in P$,于是

$$a+b=a-(-b)\in P,\quad ab=a\Big/\frac{1}{b}\in P,$$

所以 P 是一个数域.

例 3 证明：

(1) 在有理数域与实数域之间有无限多个不同的数域；

(2) 在实数域与复数域之间不存在其它数域.

证 (1) 只需证明对于两个不同的质数 p_1 与 p_2，数域

$$P_1=\{a+b\sqrt{p_1}\mid a,b\in\mathbf{Q}\},\quad P_2=\{a+b\sqrt{p_2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$$

不相同.

用反证法. 设 $P_1=P_2$，则必有 $\sqrt{p_2}\in P_1$. 令 $\sqrt{p_2}=a+b\sqrt{p_1}$，两端平方后，得

$$p_2=a^2+b^2p_1+2ab\sqrt{p_1}.$$

式中 $ab\neq0$(若 a 或 b 等于零，则 $\sqrt{p_2}$ 或 $\sqrt{p_2/p_1}$ 为有理数，这是不可能的). 但 $ab\neq0$，又有 $\sqrt{p_1}=(p_2-a^2-b^2p_1)/(2ab)$，即 $\sqrt{p_1}$ 为有理数，这也是不可能的. 所以 $P_1\neq P_2$. 由于质数有无限多个，因而在有理数域与实数域之间有无限多个形如

$$P=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in\mathbf{Q},p\text{ 为质数}\}$$

的数域.

(2) 设 $\mathbf{R}$ 为实数域，$\mathbf{C}$ 为复数域. P 是任意一个包含 $\mathbf{R}$ 又不等同 $\mathbf{R}$ 的数域，则 P 至少含一个复数 $a+b\mathrm{i}$ $(b\neq0)$. 于是

$$\mathrm{i}=\frac{a+b\mathrm{i}-a}{b}\in P.$$

从而推出对任意实数 a,b，都有 $a+b\mathrm{i}\in P$，故 P 包含全体复数，是复数域，即 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 之间不存在其它数域.

例 4 设 P_1 与 P_2 是两个数域，证明：

(1) $P_1\cap P_2$ 也是一个数域；

(2) $P_1\cup P_2$ 是一个数域 $\Leftrightarrow P_1\subseteq P_2$ 或 $P_2\subseteq P_1$.

证 (1) 因为 P_1 与 P_2 都包含 $\mathbf{Q}$，所以 $P_1\cap P_2$ 也包含 $\mathbf{Q}$. 设 $a,b\in P_1\cap P_2$，则 $a,b\in P_1$，$a,b\in P_2$，且 $a+b,a-b,ab,a/b$ $(b\neq0)$ 也属于 P_1 和 P_2，故 $P_1\cap P_2$ 是一个数域.

(2) 充分性　设 $P_1\subseteq P_2$，则 $P_1\cup P_2=P_2$，所以 $P_1\cup P_2$ 是数域.

必要性　设 $P_1\cup P_2$ 是一个数域，且 $P_1\nsubseteq P_2$，则必有某一 $a\in P_1$，$a\notin P_2$. 再取任 $x\in P_2$，有 $x\in P_1\cup P_2$，从而有 $a+x=b\in P_1\cup P_2$. 这样，b 必属于 P_1 或 P_2.

若 $b\in P_2$，则 $a=b-x\in P_2$，推出矛盾. 于是知 $b\notin P_2$，$b\in P_1$，从而 $x=b-a\in P_1$，得 $P_2\subseteq P_1$.

同理可证 $P_2\subseteq P_1$ 情形.

例 5　设 a 为任意正有理数，证明：

(1) 设 x,y 为任意有理数，则一切形如 $x+y\sqrt{a}$ 的数的集合 P 是一数域；

(2) P 是有理数域 $\Longleftrightarrow a$ 为某有理数的平方.

证　(1) P 对加、减、乘运算封闭是显然的，现证对除法也封闭.

任取 $A=c+d\sqrt{a}$ $(A\neq 0)\in P$. 若 $d=0$，则 $A=c\neq 0$，于是 $1/A=1/c\in P$. 若 $d\neq 0$，当 $c-d\sqrt{a}=0$ 时，有 $\sqrt{a}=c/d$，从而知一切形如 $x+y\sqrt{a}=x+yc/d$ 的数即为全体有理数，则 P 是有理数域.

当 $c-d\sqrt{a}\neq 0$ 时，有

$$\frac{1}{A}=\frac{c-d\sqrt{a}}{(c+d\sqrt{a})(c-d\sqrt{a})}=\frac{c-d\sqrt{a}}{c^2-d^2a}\in P,$$

所以 P 对除法也封闭.

(2) $\forall\sqrt{a}\in P$，若 P 为有理数域，则 $\sqrt{a}$ 必为有理数，所以 a 为有理数的一个完全平方数.

反之，若 a 是有理数的一个完全平方数，则 $\sqrt{a}$ 为一有理数，故 P 为有理数域.

关于多项式的加、减、乘运算，要求熟知其运算规律，能够熟练地进行运算.

多项式 $f(x)$ 的次数本书中记为 $\partial(f(x))$，也有的书记为