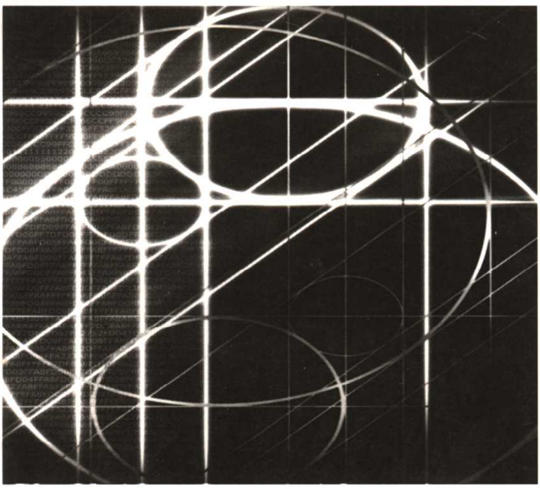
经典教材辅导用书

数学系列

吉米多维奇
数学分析习题集选解
(上)

黄光谷　黄川　蔡晓英　李杨　编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

经典教材辅导用书·数学系列丛书

吉米多维奇

数学分析习题集选解（上册）

黄光谷　黄　川　编
蔡晓英　李　杨

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题集选解(上册)/黄光谷　等编
武汉:华中科技大学出版社,2006年12月
ISBN 7-5609-3891-4

Ⅰ.吉…
Ⅱ.①黄…　②黄…　③蔡…　④李…
Ⅲ.数学分析-高等学校-解题
Ⅳ.O17-44

吉米多维奇数学分析习题集选解(上册)　　黄光谷　等编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:周芬娜
责任校对:吴　晗
封面设计:潘　群
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:武汉佳年华科技有限公司
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:15.25　　字数:364 000
版次:2006年12月第1版　　印次:2006年12月第1次印刷　　定价:21.00元
ISBN 7-5609-3891-4/O・403

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 介 绍

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性的习题集. 编者根据我国目前的教学实际情况，选编了其中约三分之一的重要习题，并作了详细解答，分上、下两册出版. 本书覆盖了该习题集各章节的主要内容，便于读者由厚到薄、由少而精地掌握该习题集内容，这对学习理科数学分析或工科高等数学(即微积分)的读者将大有裨益.

本书有很强的可读性，并兼顾多方需要，适合理、工科等的本、专科各专业教、学数学分析或高等数学(微积分)的师生作为教学参考书.

前　言

前苏联的吉米多维奇(Б. П、Демидович)著的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性和影响力的书籍,原书曾经由前苏联高等教育部审定为综合性大学及师范院校数理系的教学参考书. 该书自20世纪50年代初在我国翻译出版以来,几十年来引起了各大专院校广大师生的巨大反响,促进了我国数学分析(微积分)的教与学.

笔者从1958年至1965年间,曾陆续试解了该书中的大部分习题,收益颇丰. 这次应邀从该书4462道习题中,挑选约30%的习题,整理详解,分上、下两册出版. 这些题是根据我国目前的教学实际情况并兼顾理、工科等多方面需要而选解编入的,大部分是该书中难度中等或中等偏上的习题,也选入了少数基本题垫底;至于其它一些很容易的习题,没有选入,留给读者思考或演练;对于超出我国现时数学分析教学要求和考研要求或难度很大的习题,也未选入,有兴趣的读者可以查阅参考文献[2]. 这就是说,本书在挑选习题时只选编了原习题集中难度中等的一部分,并参考了前苏联著名数学家辛钦在参考文献[4]中推荐的习题. 这样由厚到薄、由少而精,便于读者根据实际情况,掌握主要内容.

编写本书时,并没有逢三选一地在各章节中平均选题,对重点节,选了约1/2的好题;对有些超出教学要求的节,只选入了几个,甚至只一两个题作为代表. 为了便于读者阅读本书,掌握有关知识点,照录了原习题集中各节前的知识要点,并冠以"内容提要"的标

题,其中超出要求的内容加了“ * ”号. 解题中用到的其它知识,读者可查阅参考文献[3]或[6],这里不一一标出.

为了便于读者查阅,各题前写了两个题号,如5—320,第一个数字5是本书该节的顺序号,第二个数字530是原书《数学分析习题集》的题号.若行文中仅一个序号,如530,指的是原书《数学分析习题集》之题号. 为了符合读者的阅读习惯,将原习题集中俄文的小题号(а)、(б)、(в)、(г)、(д)等,依次改成了数字(1)、(2)、(3)、(4)、(5)或(a)、(b)、(c)等;对于标注的式子的俄文(А)、(Б)、(В)等,改换成了读者熟悉的英文(A)、(B)、(C)等. 其余类似.

选入的题都有详解,为了避免重复,不再作详细分析. 简要分析以黑括号【 】标出,少数题在题末加“注”,力求画龙点睛,以期引起读者的注意或扩充知识面.有的题还给出了一题多解,许多题采用了与参考文献[2]不同的解法,以便活跃思路.

许多题的简单插图未另绘,留给读者思考或自绘草图,边读边想,以培养想象能力.

选编本书,得到出版社领导和编辑等的大力支持和指导;少部分题参考了参考文献[2]的解法,在此一并致谢!

由于我们水平有限,本书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正,以便再版时修改.

编　者

2006年5月

主要符号

N、**Z**、**Q**、**R**、**C** 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

$\mathbf{N}^*$ 表示正整数集(**N** 中去掉数 0 的集合).

$\mathbf{R}^{\pm}$表示正(或负)实数集.

$U(a,\delta)$表示以 a 为中心,δ 为半径的邻域.

$\mathring{U}(a,\delta)$表示去心邻域.

$\forall$ 表示"任意给定"或"任给"、"对任意的".

$\exists$ 表示"存在"、"有".

$\triangleq$表示"记为"、"定义为".

$\Rightarrow$表示"推出"、"推得"或"蕴含".

$\Leftrightarrow$表示可"互推出"、"等价于"或"充要条件".

$\complement_I B$ 表示 I 中子集 B 的余集或补集.

$f(x)\in B(I)$表示区间 I 上的全体有界函数之集.

$C(I)$表示 I 上全体连续函数之集.

$D(I)$表示 I 上全体可导函数之集.

$D^n(I)$表示 I 上全体 n 阶可导函数之集.

$R(I)$表示 I 上全体(黎曼)可积函数之集.

$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$表示函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且在开区间(a,b)内可导.

目　　录

第一篇　单变量函数

第一篇

单变量函数

第一章　分析引论

§1　实　　数

内 容 提 要

1. 数学归纳法

为了证明某定理对任意的自然数n为真，只需证明下面两点就够了：①这定理对$n=1$为真，②设这定理对任何的一个自然数n为真，则它对其次的一个自然数$n+1$也为真.

2. 分割

假设分有理数为A和B两类，使其满足下列条件：①两类均非空集；②每一个有理数必属于一类，且仅属于一类；③属于A类(下类)的任一数小于属于B类(上类)的任何数.这样的一个分类法称为分割. 若或是下类A有最大的数，或是上类B有最小的数，则分割A/B确定一个有理数. 若A类无最大数，而B类亦无最小数，则分割A/B确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数.

3. 绝对值

假若x为实数，则用下列条件所确定的非负数$|x|$，称为x的绝对值：

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

对于任何的实数x和y，有以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4. 上确界和下确界

设$X=\{x\}$为实数的有界集合. 若:

(1) 每一个$x\in X$满足不等式

$$x\geqslant m,$$

(2) 对于任何的$\varepsilon>0$,存在有$x'\in X$,使

$$x'<m+\varepsilon,$$

则数$m=\inf\{x\}$称为集合X的下确界.

同样,若:

(1) 每一个$x\in X$满足不等式

$$x\leqslant M,$$

(2) 对于任何的$\varepsilon>0$,存在有$x''\in X$,使

$$x''>M-\varepsilon,$$

则数$M=\sup\{x\}$称为集合X的上确界.

若集合X下方无界,则通常说

$$\inf\{x\}=-\infty;$$

若集合X上方无界,则认为

$$\sup\{x\}=+\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差

设$a(a\neq0)$是被测的量的准确数值,而x是这个量的近似值,则

$$\Delta=|x-a|$$

称为绝对误差,而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若x的绝对误差不超过它的第n个有效数字的单位的一半,则说x有n位准确的数字.

6. 利用数学归纳法可证下列等式对任何自然数n皆成立：

(1) $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

(4) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

(5) 设$a^{(n)}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及$a^{(0)}=1$，则

$$(a+b)^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{(n-m)}b^{(m)}.$$

习 题 选 解

【1—7】 证明若$x>-1$，则不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\quad(n>1) \tag{①}$$

为真，且仅当$x=0$时，等号成立.

证(数学归纳法)　当$x=0$时，显然式①等号成立.

下设$x>-1$且$x\neq 0$，$n>1$. 当$n=2$时，

$$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x,$$

式①成立. 假设$n=k$时，式①成立，即

$$(1+x)^k>1+kx;$$

当$n=k+1$时，由上式得

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)^k(1+x)>(1+kx)(1+x)\\&=1+(k+1)x+kx^2>1+(k+1)x,\end{aligned}$$

可见当$n=k+1$时，式①也成立. 故对一切$n>1$的自然数，式①都成立.

注　式①称为伯努利(Bernoulli)不等式，它的一般情形是

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是符号相同且大于-1的数.