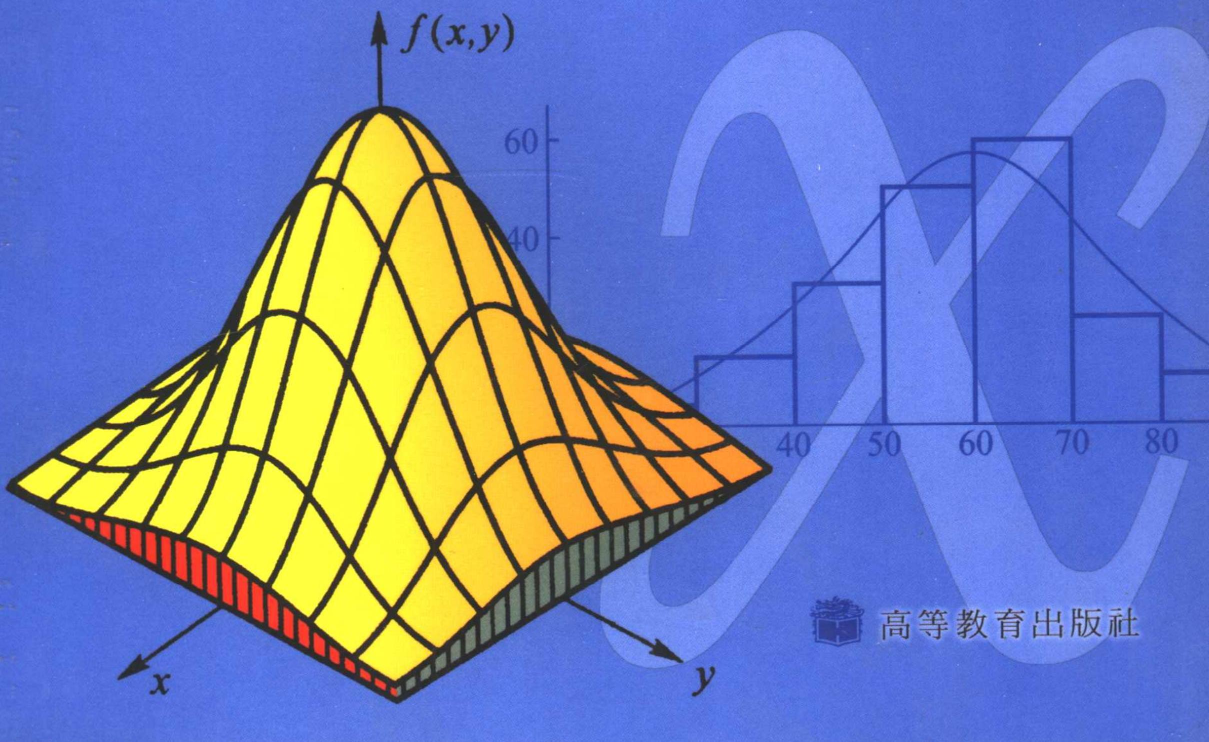
普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

概率论与数理统计教程

习题与解答

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著



高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书

概率论与数理统计教程习题与解答

茆诗松　程依明　濮晓龙　编著

高等教育出版社

内容提要

本书为《概率论与数理统计教程》(茆诗松等编)的配套辅导书。原《教程》共分8章40节,含有612道习题,本书为每节缩写了"概要",对每道习题作了详细解答,有些习题还作了较为深入的讨论。此外还补充了部分习题与解答,其中大部分是历届硕士研究生入学考试题目。

阅读本书将对概率论与数理统计的独特思维方式和计算技巧会有更深一步的理解,对教与学都会有很大帮助。本书可作为数学类专业的学生学习概率论与数理统计的参考书,也可作为参加研究生考试的学生的学习辅导书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程习题与解答/茆诗松,程依明,濮晓龙编著.—北京:高等教育出版社,2005.7(2006重印)

ISBN 7-04-016616-X

Ⅰ.概... Ⅱ.①茆...②程...③濮... Ⅲ.①概率论-高等学校-解题②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第038979号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 王艳红 **责任校对** 尤 静 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2005年7月第1版
印 张	27.5	印 次	2006年5月第3次印刷
字 数	510 000	定 价	31.40元

物料号 16616-00

前 言

这本《概率论与数理统计教程习题与解答》(以下简称《习题与解答》)是为普通高等教育“十五”国家级规划教材《概率论与数理统计教程》(以下简称《教程》)编写的配套教学参考书。它有以下几个特点:

1. 按《教程》的章与节的次序逐节编写内容概要、习题与解答。其中内容概要含有《教程》中各节的主要定义与重要结果,同类结果还列表显示。若把这些内容概要抽出后合并,那就是一本实用手册,此部分内容便于学生查找与巩固,也是一份复习提纲。

2.《教程》中每一道习题在《习题与解答》中都可找到详细解答,解答力求书写规范。由于习题量由原来600多题增加到700多题,所以在习题的编号上略有不同。这些习题可分为两类,一类是基本训练题,数量有一定要求,故占大部分,目的在于帮助学生掌握《教程》内容,用不同习题从各种角度促使学生思考《教程》的要点。另一类是提高题,占小部分,目的是想通过习题把《教程》内容加深和拓广,这些习题是学生在《教程》内容基础上“再向前走一步”或“再想下去”可以解决的,关键在于引导。

3. 在不少题目的解答中还增加了注释和讨论,目的是把问题的理解引向深入,或引出一些新的思考问题。我们感到,习题是我们与学生谈话的继续,在学生思路点起火花时,提出更深层次的问题,可以开拓学生的思路和视野,满足学生的求知欲。这种顺水推舟、事半功倍的事值得尝试。

我们编写这本《习题与解答》的目的是想从各种角度给出示范,告诉学生应该如何思考、分析和表达。初学这门课程的学生在做习题时常常觉得很困难,缺乏思路、难以下手,或无法表达清楚,做完一道习题也不敢肯定做对了。这些都反映了初学者尚不习惯概率论与数理统计独有的思维方式。这时怎么办?只有让学生多听老师怎么讲、多看别人怎么做,这一过程就像学下棋,光学会下棋规则不可能成为优秀的棋手,除了自己多与别人下棋外,多看棋谱、多观摩别人如何下棋,是提高棋艺必不可少的一条途径。我们编写这本《习题与解答》是想起到“棋谱”的作用。我们的原意是想帮助学生思考,使学生一进门就能抓住问题的实质,解开随机世界的秘密。若你自己不去独立思考,而只是把这些解答照搬照抄,那对你的帮助就太小了。要知道,任何好的东西不经自己的思考,永远不能成为自己的知识。

本书前四章的习题与解答由程依明编写，后四章的习题与解答由濮晓龙编写，全书由茆诗松统稿。我们经常讨论、选择习题、切磋解法，终于完成此书。在此我们首先感谢华东师范大学统计系领导和全体教师，由于他们的关心、支持和鼓励使我们能以充沛的精力去完成此书。同时要感谢高等教育出版社理科分社同志对本书的支持和督促，没有他们的热心指导和出色编辑，不可能使本书迅速问世。我们如此编写习题与解答也是一种尝试，能否在教学过程中收到实效，受到广大师生和读者的欢迎还有待于实践检验，很希望听到大家的批评和建议，让我们为不断提高概率论与数理统计的教与学的质量共同努力。

茆诗松　程依明　濮晓龙

2005 年 1 月

目　录

第一章　随机事件与概率　1

§1.1　随机事件及其运算　1
§1.2　概率的定义及其确定方法　6
§1.3　概率的性质　21
§1.4　条件概率　30
§1.5　独立性　42

第二章　随机变量及其分布　50

§2.1　随机变量及其分布　50
§2.2　随机变量的数学期望　62
§2.3　随机变量的方差与标准差　69
§2.4　常用离散分布　74
§2.5　常用连续分布　81
§2.6　随机变量函数的分布　95
§2.7　分布的其他特征数　104

第三章　多维随机变量及其分布　113

§3.1　多维随机变量及其联合分布　113
§3.2　边际分布与随机变量的独立性　124
§3.3　多维随机变量函数的分布　135
§3.4　多维随机变量的特征数　147
§3.5　条件分布与条件期望　172

第四章　大数定律与中心极限定理　181

§4.1　特征函数　181
§4.2　大数定律　187
§4.3　随机变量序列的两种收敛性　194
§4.4　中心极限定理　205

第五章　统计量及其分布　215

§5.1　总体与样本　215
§5.2　样本数据的整理与显示　219
§5.3　统计量及其分布　225
§5.4　三大抽样分布　242
§5.5　充分统计量　253

第六章　参数估计　262

§6.1　点估计的几种方法　262
§6.2　点估计的评价标准　273
§6.3　最小方差无偏估计　289
§6.4　贝叶斯估计　298
§6.5　区间估计　304

第七章　假设检验　316

§7.1　假设检验的基本思想与概念　316
§7.2　正态总体参数假设检验　327
§7.3　其他分布参数的假设检验　345
§7.4　分布拟合检验　351

第八章　方差分析与回归分析　366

§8.1　方差分析　366
§8.2　多重比较　377
§8.3　方差齐性检验　384
§8.4　一元线性回归　391
§8.5　一元非线性回归　407

附表　412

表1　泊松分布函数表　412
表2　标准正态分布函数表　414
表3　χ^2 分布分位数 $\chi_p^2(n)$ 表　415
表4　t 分布分位数 $t_p(n)$ 表　416
表5.1　F 分布 0.90 分位数　$F_{0.90}(f_1, f_2)$ 表　417
表5.2　F 分布 0.95 分位数　$F_{0.95}(f_1, f_2)$ 表　418
表5.3　F 分布 0.975 分位数　$F_{0.975}(f_1, f_2)$ 表　419

表 5.4　F 分布 0.99 分位数　$F_{0.99}(f_1,f_2)$表　420
表 6　正态性检验统计量 W 的系数 $a_i(n)$数值表　421
表 7　正态性检验统计量 W 的 α 分位数 W_α 表　423
表 8　t 化极差统计量的分位数 $q_{1-\alpha}(r,f)$表　424
表 9　检验相关系数的临界值表　427
表 10　统计量 H 的分位数 $H_{1-\alpha}(r,f)$表　428

参考文献　429

第一章 随机事件与概率

§1.1 随机事件及其运算

内容概要

1. 随机现象 在一定的条件下,并不总出现相同结果的现象.

2. 样本空间 随机现象的一切可能基本结果组成的集合,记为 $\Omega=\{\omega\}$,其中 ω 表示基本结果,又称为**样本点**.

3. 随机事件 随机现象的某些样本点组成的集合. 常用 A,B,C 等表示,Ω 表示必然事件,$\varnothing$ 表示不可能事件.

4. 随机变量 用来表示随机现象结果的变量,常用大写字母 X,Y,Z 等表示.

5. 事件间的关系

(1) **包含关系** 如果属于 A 的样本点必属于 B,即事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称 A 被包含在 B 中,记为 $A\subset B$;

(2) **相等关系** 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$;

(3) **互不相容** 如果 $A\cap B=\varnothing$,即 A 与 B 不可能同时发生,则称 A 与 B 互不相容.

6. 事件运算

(1) **事件 A 与 B 的并** 事件 A 与 B 中至少有一个发生,记为 $A\cup B$;

(2) **事件 A 与 B 的交** 事件 A 与 B 同时发生,记为 $A\cap B$ 或 AB;

(3) **事件 A 对 B 的差** 事件 A 发生而 B 不发生,记为 $A-B$;

(4) **对立事件** 事件 A 的对立事件,即"A 不发生",记为 $\overline{A}$.

7. 事件的运算性质

(1) 并与交满足结合律和交换律;

(2) 交对并满足分配律

$$A(B\cup C)=AB\cup AC;$$

(3) 并对交满足分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

(4) **棣莫弗公式**(对偶法则)

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B},\qquad \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}.$$

8. 事件域 含有必然事件 Ω,并关于对立运算和可列并运算都封闭的事件类 $\mathscr{F}$ 称为事件域,又称为 σ 代数.具体说,事件域 $\mathscr{F}$ 满足:

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$,则对立事件 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}$, $n=1,2,\cdots$,则可列并 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

习题与解答 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 抛三枚硬币;

(2) 抛三颗骰子;

(3) 连续抛一枚硬币,直至出现正面为止;

(4) 在某十字路口,一小时内通过的机动车辆数;

(5) 某城市一天内的用电量.

解 (1) $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$,共含有 $2^3=8$ 个样本点,其中 0 表示反面,1 表示正面.(3)中的 0 与 1 也是此意.

(2) $\Omega=\{(x,y,z):x,y,z=1,2,3,4,5,6\}$,共含有 $6^3=216$ 个样本点.

(3) $\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}$,共含有可列个样本点.

(4) $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$,共含有可列个样本点.

(5) $\Omega=\{t:t\geqslant 0\}$,共含有无穷不可列个样本点.

2. 在抛三枚硬币的试验中写出下列事件的集合表示:

A=“至少出现一个正面”;

B=“最多出现一个正面”;

C=“恰好出现一个正面”；

D=“出现三面相同”.

解　设 0 表示反面，1 表示正面，则有如下表示：

$A=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$；

$B=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$；

$C=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$；

$D=\{(0,0,0),(1,1,1)\}$.

3. 设 A,B,C 为三事件，试表示下列事件：

(1) A,B,C 都发生或都不发生；

(2) A,B,C 中不多于一个发生；

(3) A,B,C 中不多于两个发生；

(4) A,B,C 中至少有两个发生.

解　(1) $ABC\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(2) $\overline{A}\overline{B}C\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

(3) $\Omega-ABC=\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

(4) $AB\cup AC\cup BC$.

4. 请指明以下事件 A 与 B 间的关系：

(1) 检查两件产品，记事件 A=“至少有一件不合格品”，B=“两次检查结果不同”；

(2) 设 T 表示轴承寿命，记事件 $A=\{T>5\ 000\ \text{h}\}$，$B=\{T>8\ 000\ \text{h}\}$.

解　(1) $A\supset B$.　　　　(2) $A\supset B$.

5. 设 X 为随机变量，其样本空间为 $\Omega=\{0\leqslant X\leqslant 2\}$，记事件 $A=\{0.5<X\leqslant 1\}$，$B=\{0.25\leqslant X<1.5\}$，写出下列各事件：

(1) $\overline{A}B$；　(2) $\overline{A}\cup B$；　(3) $\overline{AB}$；　(4) $\overline{A\cup B}$.

解　Ω,A,B 的图示如图 1.1：

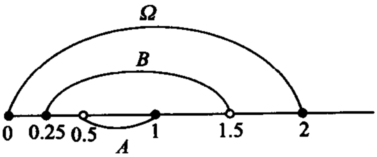


图 1.1

$$\overline{A}B=(\{0\leqslant X\leqslant 0.5\}\cup\{1<X\leqslant 2\})\cap\{0.25\leqslant X<1.5\}$$
$$=\{0.25\leqslant X\leqslant 0.5\}\cup\{1<X<1.5\}.$$

(2) $\overline{A}\cup B=\{0\leqslant x\leqslant 2\}=\Omega$.

(3) 由于 $A\subset B$，所以 $AB=A$，故

$$\overline{AB}=\overline{A}=\{0\leqslant X\leqslant 0.5\}\cup\{1<X\leqslant 2\}.$$

(4) 由于 $A\subset B$，所以 $A\cup B=B$，故

$$\overline{A\cup B}=\overline{B}=\{0\leqslant X<0.25\}\cup\{1.5\leqslant X\leqslant 2\}.$$

6. 对飞机进行两次射击，每次射一弹，设 $A=\{$恰有一弹击中飞机$\}$，$B=\{$至少有一弹击中飞机$\}$，$C=\{$两弹都击中飞机$\}$，$D=\{$两弹都没击中飞机$\}$. 又设随机变量 X 为击中飞机的次数，试用 X 表示事件 A,B,C,D. 进一步问 A,B,C,D 中哪些是互不相容的事件？哪些是对立的事件？

解 $A=\{X=1\}$， $B=\{X\geqslant 1\}$， $C=\{X=2\}$， $D=\{X=0\}$.

互不相容的事件为：A 与 C；A 与 D；B 与 D；C 与 D.

对立的事件为：B 与 D.

7. 试问下列命题是否成立？

(1) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$；

(2) 若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(3) $(A\cup B)-B=A$；

(4) $(A-B)\cup B=A$.

解 (2)成立的理由是：互不相容两个集合的子集当然也互不相容.

(1)(3)(4)不成立. 为了说明理由，我们利用减法的一个性质：$A-B=A\overline{B}$ 来简化事件.

对(1)的左端，有

$$A-(B-C)=A-B\overline{C}=A\,\overline{B\overline{C}}=A(\overline{B}\cup C)=A\overline{B}\cup AC$$
$$=(A-B)\cup AC\neq(A-B)\cup C.$$

故(1)不成立.

(3)的左端

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\neq A,$$

故(3)不成立.

(4)的左端

$$(A-B)\cup B=A\overline{B}\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)=A\cup B\neq A,$$

故(4)不成立.

8. 试用维恩图说明，当事件 A 与 B 互不相容时，能否得出结论 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容.

解 不能，因为当 A 与 B 互为对立事件时，有 $AB=\varnothing$ 和 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$. 见下面维恩图 1.2.

9. 请叙述下列事件的对立事件：

(1) $A=$“掷两枚硬币，皆为正面”；

(2) $B=$“射击三次，皆命中目标”；

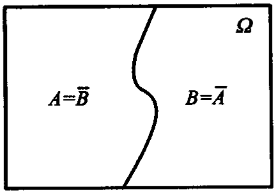


图 1.2

(3) C=“加工四个零件，至少有一个合格品”.

解 (1) $\overline{A}$=“掷两枚硬币，至少有一反面”.

(2) $\overline{B}$=“射击三次，至少有一次不命中目标”.

(3) $\overline{C}$=“加工四个零件，全为不合格品”.

10. 如果 A 与 B 互为对立事件，证明：$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互为对立事件.

解 因为 $\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$，所以 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 仍为对立事件，参见图 1.2.

11. 设 $\mathscr{F}$ 为一事件域，若 $A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，试证：

(1) $\varnothing\in\mathscr{F}$；

(2) 有限并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$，$n\geqslant 1$；

(3) 有限交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$，$n\geqslant 1$；

(4) 可列交 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i\in\mathscr{F}$；

(5) 差运算 $A_1-A_2\in\mathscr{F}$.

证 (1) 因为 $\mathscr{F}$ 为一事件域，所以 $\Omega\in\mathscr{F}$，故其对立事件 $\overline{\Omega}=\varnothing\in\mathscr{F}$.

(2) 构造一个事件序列 $\{B_i\}$，其中

$$B_i=\begin{cases}A_i, & i=1,2,\cdots,n,\\ \varnothing, & i=n+1,n+2,\cdots,\end{cases}$$

由此得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}B_i\in\mathscr{F}$.

(3) 因为 $A_i\in\mathscr{F}$，所以 $\overline{A}_i\in\mathscr{F}$. 由 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i}\in\mathscr{F}$，得 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$.

(4) 因为 $A_i\in\mathscr{F}$，所以 $\overline{A}_i\in\mathscr{F}$. 由 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i=\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}\overline{A}_i}\in\mathscr{F}$，得 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

(5) 因为 $A_2\in\mathscr{F}$，所以 $\overline{A}_2\in\mathscr{F}$. 由(3)(有限交)得 $A_1-A_2=A_1\cap\overline{A}_2\in\mathscr{F}$.

§1.2 概率的定义及其确定方法

内容概要

1. 概率的公理化定义 定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足：

(1) **非负性公理** 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $P(A)\geqslant 0$；

(2) **正则性公理** $P(\Omega)=1$；

(3) **可列可加性公理** 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，称三元素 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为**概率空间**.

2. 确定概率的频率方法 它的基本思想是：

(1) 与考察事件 A 有关的随机现象可大量重复进行；

(2) 在 n 次重复试验中，记 $n(A)$ 为事件 A 出现的次数，称

$$f_n(A)=\frac{n(A)}{n}$$

为事件 A 出现的**频率**；

(3) 频率的稳定值就是概率；

(4) 当重复次数 n 较大时，可用频率作为概率的估计值.

3. 确定概率的古典方法 它的基本思想是：

(1) 所涉及的随机现象只有有限个样本点，譬如为 n 个；

(2) 每个样本点发生的可能性相等(称为等可能性)；

(3) 若事件 A 含有 k 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所有样本点的个数}}=\frac{k}{n}.$$

4. 确定概率的几何方法 它的基本思想是：

(1) 如果一个随机现象的样本空间 Ω 充满某个区域，其度量(长度、面积或体积等)大小可用 S_Ω 表示；

(2) 任意一点落在度量相同的子区域内是等可能的；

(3) 若事件 A 为 Ω 中某个子区域，且其度量为 S_A，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}.$$

5. 确定概率的主观方法 一个事件 A 的概率 $P(A)$ 是人们根据经验，对该

事件发生的可能性大小所作出的个人信念.

习题与解答 1.2

1. 对于组合数$\binom{n}{r}$,证明:

(1) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$;

(2) $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$;

(3) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$;

(4) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$;

(5) $\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{n}$, $\quad n=\min(a,b)$;

(6) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$.

证 (1) 等式两边用组合数公式展开即可得证.

(2) 因为

$$右边=\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!}=\frac{r(n-1)!\,+(n-r)(n-1)!}{r!\,(n-r)!}$$

$$=\frac{n(n-1)!}{r!\,(n-r)!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\binom{n}{r}=左边.$$

(3) 因为

$$右边=2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=左边.$$

(4) 因为

$$\binom{n}{1}=n\binom{n-1}{0},2\binom{n}{2}=n\binom{n-1}{1},3\binom{n}{3}=n\binom{n-1}{2},\cdots,i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1},\cdots,$$

所以

$$左边=n\left\{\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right\}=n2^{n-1}=右边.$$

(5) 设计如下一个抽样模型:一批产品共有 $a+b$ 个,其中 a 个是不合格品,b 个是合格品. 从中随机取出 n 个,$n=\min(a,b)$. 则事件 A_k="取出的 n 个产品

中有 k 个不合格品"的概率为

$$P(A_k)=\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}.\qquad k=0,1,2,\cdots,n.\qquad n=\min(a,b).$$

由诸 A_i 互不相容,且 $P(A_0\cup A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(\Omega)=1$ 得

$$\frac{\binom{a}{0}\binom{b}{n-0}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{n-n}}{\binom{a+b}{n}}=1,$$

把分母移至另一侧即得结论.

(6) 在(5)中令 $a=n,b=n$,则得

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}.$$

再利用(1)的结果即可得证.

2. 抛两枚硬币,求至少出现一个正面的概率.

解 设事件 A 表示"两枚硬币中至少出现一个正面". 若用"0"表示反面,"1"表示正面,其出现是等可能的. 则此题所涉及的样本空间含有四个等可能样本点:$\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. 由于事件 A 含有其中 3 个样本点,故 $P(A)=3/4$.

3. 任取两个正整数,求它们的和为偶数的概率.

解 记取出偶数为"0",取出奇数为"1",其出现是等可能的. 则此题所涉及的样本空间含有四个等可能样本点:$\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. 若令事件 A 表示"取出的两个正整数之和为偶数",则 $A=\{(0,0),(1,1)\}$,从而$P(A)=1/2$.

4. 掷两颗骰子,求下列事件的概率:

(1) 点数之和为 7;

(2) 点数之和不超过 5;

(3) 两个点数中一个恰是另一个的两倍.

解

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6),\\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6),\\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6),\\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6),\\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6),\\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)\end{matrix}\right\},$$

A="点数之和为 7"$=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，

B="点数之和不超过 5"

$=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$.

C="两个点数中一个恰是另一个的两倍"

$=\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(3,6),(6,3)\}$，

所以

(1) $P(A)=1/6$；　(2) $P(B)=5/18$；　(3) $P(C)=1/6$.

5. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一颗骰子接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解　按题意可知：$\Omega=\{(B,C):B,C=1,2,\cdots,6\}$，它含有 36 个等可能的样本点，所求的概率为

$$p=P(B^2-4C\geqslant 0)=P(B^2\geqslant 4C),$$

而

$$\{B^2\geqslant 4C\}=\left\{\begin{array}{lllll}(2,1), & (3,1), & (4,1), & (5,1), & (6,1),\\ (3,2), & (4,2), & (5,2), & (6,2), & (4,3),\\ (5,3), & (6,3), & (4,4), & (5,4), & (6,4),\\ (5,5), & (6,5), & (5,6), & (6,6) & \end{array}\right\}$$

含有 19 个样本点，所以

$$p=\frac{19}{36}.$$

同理

$$q=P(B^2=4C),$$

而 $\{B^2=4C\}=\{(2,1),(4,4)\}$ 含有两个样本点，所以

$$q=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

6. 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张，求下列事件的概率：

(1) 全是黑桃；

(2) 同花；

(3) 没有两张同一花色；

(4) 同色.

解　52 张牌中任取 4 张，共有 $\binom{52}{4}$ 种等可能的取法，这是分母.

(1) 4 张黑桃只能从 13 张黑桃中取出，共有 $\binom{13}{4}$ 种取法，这是分子，于是