◎帮您重新认识数学

◎助您考研成功

GAODENG SHUXUE JIEXI

高等数学解析

李亿民 编著

中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

GAODENG

SHUXUE JIEXI

高等数学解析

编著

高等数学解析

李亿民　编著

中国海洋大学出版社
·青岛·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解析/李亿民编著. —青岛:中国海洋大学出版社,2007.3

ISBN 978-7-81067-969-5

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学—研究生—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 008814 号

出版发行	中国海洋大学出版社		
社　址	青岛市香港东路 23 号	**邮政编码**	266071
网　址	http://www2.ouc.edu.cn/cbs		
电子信箱	hdcbs@ouc.edu.cn		
订购电话	0532—82032573(传真)		
责任编辑	光明	**电　话**	0532—86784418
印　制	日照报业印刷有限公司		
版　次	2007 年 3 月第 1 版		
印　次	2007 年 3 月第 1 次印刷		
开　本	185 mm×260 mm		
印　张	27.25		
字　数	690 千字		
定　价	35.00 元		

目 次

·

第一章　函数、极限与连续性

§1.1　常见不等式

一、内容精析

高等数学是研究函数微积分的一门数学学科，而研究微积分的最重要的工具就是极限，极限又往往是通过不等式来描述的。所以欲熟练掌握微积分，首先就应该熟知一些在微积分中常常用到的重要不等式以及它们在运用中的技巧，很多重要不等式不仅具有较强的应用价值，而且其本身的证明过程就有较强的启发性。为此，我们首先给出一些常常引用的不等式。

1. 绝对值不等式　设 x,y 为任意实数，则有

$$||x|-|y||\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|。$$

2. 三角不等式　设 x,y,z 为任意实数，则

$$|x-z|=|x-y+y-z|\leqslant|xy|+|yz|。$$

3. 设 x,y,z 为实数，$x<y<z$，则有

$$|y|<\max\{|x|,|z|\}。$$

4. 贝努利不等式　若 $x>-1$，n 为正整数，且 $n\geqslant2$，则

$$(1+x)^n\geqslant1+nx。$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow x=0$。

5. 柯西一许瓦兹不等式　设 $x_i,y_i\in R,i=1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)。$$

6. 平均值不等式　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in R^+$，则

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

其中的三个式子分别称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的调和平均值、几何平均值、算术平均值。

7. 设 $x\in R$，则

$$e^x\geqslant1+x,$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow x=0$。

8. 设 $x>-1$，则

$$\ln(1+x)\leqslant x,$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow x=0$。

9. 设 n 为正整数，则有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\text{ 和不等式}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

即数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$严格单调递增，$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$严格单调递减。

10. 对任意实数 x,y,有

$$|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|,$$

特别地,有

$$|\sin x|\leqslant|x|,$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow x=0$。

11. 设 $x\in R^+$ 则有

$$\frac{1}{x+1}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x},$$

设 n 为正整数,则

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}。$$

12. 对任意 $x,y\in R$,有

$$x^2+y^2\geqslant 2|xy|\geqslant 2xy。$$

13. 若 $x\in(0,1)$ 则

$$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4},$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$。

14. 对任意 $x\in[0,\frac{\pi}{2})$,有

$$\sin x\leqslant x\leqslant\tan x,$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow x=0$。

15. 设 n 为正整数,则

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}。$$

为了更好地学习微积分,我们必须充分重视并有意识地积累和体会上述常见不等式在多种场合的妙用,如在极限存在性、函数或数列的有界性判断、正项级数敛散性判别、广义积分的收敛性等问题中,若能正确地利用某些常见不等式或其变形形式,往往使比较难的问题迎刃而解。

二、典型例题分析

例 1 设 $x_i,y_i\in R,i=1,2,\cdots,n$,则

$$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2\leqslant(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)。$$

证明 *方法一* 因为 $x_i,y_i\in R$,所以 $\forall t\in R$,有

$$(x_i+ty_i)^2\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n,$$

从而

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}(x_i+ty_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)t+(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)t^2\geqslant 0。$$

若 $\sum_{i=1}^{n}y_i^2=0$ 则,$y_1=y_2=\cdots=y_n=0$,命题显然成立;若 $\sum_{i=1}^{n}y_i^2>0$,则 $f(t)$ 是关于 t 的二次三项式,由于对 $\forall t\in R$,有 $f(t)\geqslant 0$,故判别式 $\Delta\leqslant 0$,即

$$4(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2 \leqslant 4\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}y_i^2 \leqslant 0,$$

从而

$$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n}x_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)。$$

方法二　由于 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 或 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ 时，命题显然成立，故只需证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2>0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2>0$ 时命题成立即可。

因为 $1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\right)^2, 1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}\right)^2$，

所以

$$\begin{aligned}
2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\right)^2+\left(\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}\right)^2\right]\\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n}\left[2\times\frac{|x_iy_i|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}\right]\\
&= \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}},
\end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2},$$

所以

$$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n}x_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)。$$

方法三　因为

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{j=1}^{n}b_j^2-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\cdot\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^2b_j^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_ia_jb_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

于是，不等式成立。

方法四　$\forall x,y\in R$，有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_iy)^2=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)x^2+2(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)xy+(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)y^2 \geqslant 0,$$

即上述关于 x,y 的二次型为非负定的，于是所对应的矩阵为非负定的，从而

$$\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i & \sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\end{vmatrix} \geqslant 0,$$

即命题成立。

例 2 证明贝努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中，$x_i>-1$，且符号相同，$i=1,2,\cdots,n$。

证明 当 $n=1$ 时，命题显然成立。

设命题对 n 成立，即 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$，因为 $x_i>-1$，所以 $1+x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n+1$，于是

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})$$
$$=(1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})+(x_1x_{n+1}+x_2x_{n+1}+\cdots+x_nx_{n+1}),$$

因为 x_i 符号相同，所以 $x_ix_{n+1}\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$，因此 $x_1x_{n+1}+x_2x_{n+1}+\cdots+x_nx_{n+1}\geqslant 0$，于是

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{n+1},$$

由归纳法知，对任意自然数 n，原不等式成立。

注 若 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x>-1$，则有不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$。

例 3 求证不等式 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$。

证明 只证不等式 $\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，另一部分留作练习。

方法一 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{2\times1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，即 $n=1$ 时命题成立。设 $n=k$ 时不等式成立，即 $\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2k)}<\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$，则 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2k+2)}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2k)}\times\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\times\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$$
$$=\frac{\sqrt{2k+1}\times\sqrt{2k+3}}{2k+2}\times\frac{1}{\sqrt{2k+3}}=\frac{\sqrt{4k^2+8k+3}}{2k+2}\times\frac{1}{\sqrt{2k+3}}<\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}},$$

即不等式在 $n=k+1$ 时成立，故对任意正整数 n，不等式成立。

方法二

因为 $\left[\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right]^2=\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)\times1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)}{2^2\times4^2\times6^2\times\cdots\times(2n)^2}\times\dfrac{1}{2n+1}$

$$=\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\cdots\times\frac{(2n-1)\times(2n+1)}{(2n)^2}\times\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1},$$

所以

$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}。$$

方法三 由 $\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}$

$$<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}{1\times3\times5\cdots\times(2n-1)}\times\frac{1}{2n+1},$$

知 $\left[\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right]^2<\dfrac{1}{2n+1}$，所以 $\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$。

方法四 $\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{\sqrt{1\times3}\times\sqrt{3\times5}\times\sqrt{5\times7}\times\cdots\times\sqrt{(2n-1)\times(2n+1)}}$

$$=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}\times\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}。$$

例 4　设 $a,b\in R^+$，求证：

(1) 当 $p>1$ 时，有 $a^p+b^p<(a+b)^p$；

(2) 当 $0<p<1$ 时，有 $a^p+b^p>(a+b)^p$。

证明　(1)设 $p=1+t$，则 $t>0$ 时，

$$(a+b)^p=(a+b)^{1+t}=(a+b)\cdot(a+b)^t=a\cdot(a+b)^t+b\cdot(a+b)^t$$
$$>a\cdot a^t+b\cdot b^t=a^{1+t}+b^{1+t}=a^p+b^p。$$

(2)*方法一*　令 $p=1-t$，则 $0<t<1$，于是

$$(a+b)^p=(a+b)^{1-t}=(a+b)\cdot(a+b)^{-t}=a\cdot(a+b)^{-t}+b\cdot(a+b)^{-t}$$
$$<a\cdot a^{-t}+b\cdot b^{-t}=a^{1-t}+b^{1-t}=a^p+b^p。$$

方法二　由 $0<p<1$ 知 $\frac{1}{p}>1$，再由(1)的结果，有

$$a+b=(a^p)^{\frac{1}{p}}+(b^p)^{\frac{1}{p}}<(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}},$$

两边同时 p 次方，得 $a^p+b^p>(a+b)^p$。

例 5　求证：(1)数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 严格单调递增；(2) 数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$ 严格单调递减；

(3) $(1+\frac{1}{n})^n<4,n=1,2,\cdots$。

证明　(1) $1+\frac{1}{n+1}=\frac{n+1+1}{n+1}=\frac{(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+\cdots+(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}$(共 n 个$(1+\frac{1}{n})$)

$$>\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})\times(1+\frac{1}{n})\times\cdots\times(1+\frac{1}{n})\times1}=\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n},$$

两边同时 $n+1$ 次方，得$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^n$，即$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$严格单调递增。

注　可以考察函数 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $x\geqslant1$ 时的严格单调性。

(2)*方法一*　欲证$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$，只需证

$$\sqrt[n+2]{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}>1+\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1},\text{或}\sqrt[n+2]{(\frac{n}{n+1})^{n+1}}<\frac{n+1}{n+2},$$

事实上，$\sqrt[n+2]{(\frac{n}{n+1})^{n+1}}=\sqrt[n+2]{(\frac{n}{n+1})^{n+1}\times1}=\sqrt[n+2]{\frac{n}{n+1}\times\frac{n}{n+1}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\times1}$(共 $n+1$ 项$\frac{n}{n+1}$)

$$<\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{n}{n+1}+1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2},$$

命题得证。

方法二　令 $a_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}\cdot(1+\frac{1}{n^2+2n})^{n+1}\geqslant\frac{n+1}{n+2}\cdot(1+\frac{n+1}{n^2+2n})=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1,$$

命题成立。

注 可考察函数 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^{1+x}$ 在 $x\geqslant 1$ 时的严格单调性。

(3)由(2)知，对任意自然数 n，有

$$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}\leqslant(1+\frac{1}{1})^{1+1}=4。$$

注 由此例知，数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 严格单调且有界。

例 6 设 $n\geqslant 2$，n 为自然数，则 $n!<(\frac{n+1}{2})^n$。

证明 *方法一* $n=2$ 时，$(\frac{2+1}{2})^2=\frac{9}{4}>2=2!$，命题成立；设 $n=k$ 时有 $k!<(\frac{k+1}{2})^k$，则 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)!=(k+1)\cdot k!<(k+1)\cdot(\frac{k+1}{2})^k=\frac{(k+1)^{k+1}}{2^k}=2\times(\frac{k+1}{2})^{k+1},$$

由上例知，$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 严格单调递增，当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$(1+\frac{1}{n})^n>(1+\frac{1}{1})^2=2,$$

从而 $(\frac{k+2}{k+1})^{k+1}=(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}>2$，故

$$(k+1)!<2\cdot(\frac{k+1}{2})^{k+1}<(\frac{k+2}{k+1})^{k+1}\cdot(\frac{k+1}{2})^{k+1}=(\frac{k+2}{2})^{k+1}=(\frac{(k+1)+1}{2})^{k+1},$$

即不等式对 $n=k+1$ 也成立，由归纳法知，对任意正整数 $n\geqslant 2$，原命题成立。

方法二 因为 $(n!)^2=n!\times n!=(1\times n)\times(2\times(n-1))\times(3\times(n-2))\times\cdots\times(n\times 1)$，又 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，$\sqrt{k(n-k+1)}\leqslant\frac{k+(n-k+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$，且对不同的 k，上式等号不能同时成立，所以有

$$\begin{aligned}n!&=\sqrt{(n!)^2}=\sqrt{(1\times n)\times(2\times(n-1))\times(3\times(n-2))\times\cdots\times(n\times 1)}\\&<(\frac{n+1}{2})\times(\frac{n+1}{2})\times\cdots\times(\frac{n+1}{2})=(\frac{n+1}{2})^n。\end{aligned}$$

例 7 求证 对 $\forall a,b\in R$，有 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$。

证明 *方法一* $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}=\frac{1+|a+b|-1}{1+|a+b|}=1-\frac{1}{1+|a+b|}$

$$\leqslant 1-\frac{1}{1+|a|+|b|+|a|\cdot|b|}=\frac{|a|+|b|+|a|\cdot|b|}{1+|a|+|b|+|a|\cdot|b|}\leqslant\frac{|a|+|b|+2|a|\cdot|b|}{1+|a|+|b|+|a|\cdot|b|}$$

$$=\frac{|a|(1+|b|)+|b|(1+|a|)}{(1+|a|)(1+|b|)}=\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}。$$

方法二 令 $f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$，$x\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时单调递增，于是

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}。$$

三、习题

1. 设 $a\leqslant b\leqslant c$，求证：$|b|\leqslant\max\{|a|,|c|\}$。

2. 设 $\max\{|a+b|,|a-b|\}<\frac{1}{2}$，求证：$|a|<\frac{1}{2}$，$|b|<\frac{1}{2}$。

3. 求证：$\forall a,b\in R$，有 $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\geqslant\frac{1}{2}$。

4. 设 $a,b\in R$，求证：$\forall x\in R$，有

(1) $|a\cos x+b\sin x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$；

(2) $|a\sin(a+b)+b\cos(a+b)|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$。

5. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是不全相等的实数，求证：$n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2>(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2$。

6. 求证：对任意正整数 n，有

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\geqslant1+\frac{n}{2}$；(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\sqrt{2n}$。

7. 设 n 为正整数，求证：(1) $\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$；(2) $\sqrt[n]{n!}>\frac{n}{3}$。

8. 设 n 为正整数，求证：

(1) $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$；

(2) 若 $k\geqslant2$，有 $2\sqrt{k}-2<\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{k}$。

9. 设 n 为正整数，求证：$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$。

10. 设 n 为正整数，求证：$\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$。

习题解答与提示

1. *方法一*　由 $b\leqslant c\leqslant|c|\leqslant\max\{|a|,|c|\}$，$b\geqslant a\geqslant-|a|\geqslant-\max\{|a|,|c|\}$，得 $-\max\{|a|,|c|\}\leqslant b\leqslant\max\{|a|,|c|\}$，即 $|b|\leqslant\max\{|a|,|c|\}$。

方法二　若 $b\geqslant0$，则 $c\geqslant0$，$|b|=b\leqslant c=|c|\leqslant\max\{|a|,|c|\}$；

若 $b<0$，由 $a\leqslant b$，有 $|b|\leqslant|a|\leqslant\max\{|a|,|c|\}$，于是，命题成立。

2. 只证 $|a|<\frac{1}{2}$。

方法一　因为 $\max\{|a+b|,|a-b|\}<\frac{1}{2}$，所以 $|a+b|<\frac{1}{2}$，$|a-b|<\frac{1}{2}$，于是

$$2|a|=|a+b+a-b|\leqslant|a+b|+|a-b|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

即 $|a|<\frac{1}{2}$。

方法二　因为 $|a+b|<\frac{1}{2}$，$|a-b|<\frac{1}{2}$，所以 $-\frac{1}{2}<a+b<\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<a-b<\frac{1}{2}$，两式相加，得 $-1<2a<1$，即 $|a|<\frac{1}{2}$。

3. 若 $|1-b|\geqslant\frac{1}{2}$，结论显然成立；若 $|1-b|<\frac{1}{2}$，则 $b>\frac{1}{2}$，只需证明

$$\max\{|a+b|,|a-b|\}\geqslant\frac{1}{2},$$

事实上，

$$\max\{|a+b|,|a-b|\}\geqslant\frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)\geqslant\frac{1}{2}|(a+b)-(a-b)|=|b|>\frac{1}{2},$$

得证。

4. (1) *方法一* 不妨设 a,b 不全为零，则 $\sqrt{a^2+b^2}>0$，而

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$$

其中 $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，于是，$|a\cos x+b\sin x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$。

方法二 只需证 $a^2+b^2\geqslant(a\cos x+b\sin x)^2$，而

$$\begin{aligned}a^2+b^2-(a\cos x+b\sin x)^2&=a^2+b^2-(a^2\cos^2x+2ab\sin x\cos x+b^2\sin^2x)\\&=a^2\sin^2x-2ab\sin x\cos x+b^2\cos^2x=(a\sin x-b\cos x)^2\geqslant0,\end{aligned}$$

得证。

方法三 由柯西—许瓦兹不等式，得

$$|a\cos x+b\sin x|^2=(a\cos x+b\sin x)^2\leqslant(a^2+b^2)(\cos^2x+\sin^2x)=a^2+b^2,$$

即 $|a\cos x+b\sin x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$。

方法四 设向量 $\alpha=\{a,b\}$，$\beta=\{\cos x,\ \sin x\}$，则 $\alpha\cdot\beta=a\cos x+b\sin x$，$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|\beta|=\sqrt{\cos^2x+\sin^2x}=1$，又因为 $|\alpha\cdot\beta|\leqslant|\alpha|\cdot|\beta|$，所以

$$|a\cos x+b\sin x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}。$$

关于(2)的证明，可仿照上面的过程，也可以直接利用(1)的结论。

5. 提示 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}1\cdot x_i\right)^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i\right)^2$，其中 $y_i=1$，$i=1,2,\cdots,n$，请考虑柯西—许瓦兹不等式。

6. (1) *方法一* $n=1$ 时，等号成立，$n=2$ 时，左端 $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}=2+\frac{1}{12}>$ 右端，不等式成立，设对 n 成立，则

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}&>1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\\&>1+\frac{n}{2}+\frac{2^n}{2^{n+1}}=1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{n+1}{2},\end{aligned}$$

即不等式对 $n+1$ 也成立，由归纳法，对任意自然数 n，不等式均成立。

方法二 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

$$\begin{aligned}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\\&>1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+8\times\frac{1}{16}+\cdots+2^{n-1}\times\frac{1}{2^n}=1+\frac{n}{2}。\end{aligned}$$

(2)方法一　可用数学归纳法(略)。

方法二　由柯西—许瓦兹不等式,

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})^2=(1\times1+\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{3}\times1+\cdots+\frac{1}{n}\times1)^2$$

$$\leqslant(1^2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})\times(1^2+1^2+1^2+\cdots+1^2)$$

$$=n(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})<n(1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n})$$

$$=n[1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})]=n(2-\frac{1}{n})<2n。$$

两端开平方,有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\sqrt{2n}$。

7. (1) 当 $n=1$ 和 $n=2$ 时,结论显然成立,在 $n\geqslant3$ 时,

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\times1\times1\times\cdots\times1}\quad(共\ n-2\ 个\ 1)$$

$$<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+1+1+\cdots+1}{n}=\frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}。$$

注　由上述方法可以作出更多的不等式,如

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n}\times1\times1\times\cdots\times1}\quad(n-3\ 个\ 1)$$

$$<\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+1+1+\cdots+1}{n}=\frac{3\sqrt[3]{n}+(n-3)}{n}=1+\frac{3\sqrt[3]{n}}{n}-\frac{3}{n},\cdots$$

这种方法在求极限时经常会用到。

(2) 当 $1\leqslant n\leqslant3$ 时,显然成立。设对 n 成立,即 $\sqrt[n]{n!}>\frac{n}{3}$,或 $n!>(\frac{n}{3})^n$,欲证 $\sqrt[n+1]{(n+1)!}>\frac{n+1}{3}$,即 $(n+1)!>(\frac{n+1}{3})^{n+1}$,只需证明 $n!>\frac{(n+1)^n}{3^{n+1}}$。

因为 $n!>(\frac{n}{3})^n$,只需证明 $(\frac{n}{3})^n>\frac{(n+1)^n}{3^{n+1}}$ 或 $(1+\frac{1}{n})^n<3$。事实上,因为 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 严格单调递增,$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e<3$,所以对任意自然数 n,有 $(1+\frac{1}{n})^n<e<3$。得证。

8. (1) 提示　可考虑分子有理化或拉格朗日中值定理。

(2) 提示　各式相加。

注　可由此不等式,求出极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}$。

9. 因为 $(1+\frac{1}{n})^n$ 严格递增趋于 e,所以 $(1+\frac{1}{n})^n<e$,取对数,得 $\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$。

因为 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 严格递减趋于 e,所以 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}>e$,取对数,得 $\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1}{n+1}$。

注　这两个不等式也可以用函数的单调性或拉格朗日中值定理来证明。

10. 方法一　利用上题的结果(略)。

方法二　$\ln(1+n)=\ln(1+n)-\ln1=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$<\int_1^2\frac{1}{1}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_3^4\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

$$\ln n=\ln n-\ln 1=\int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$>\int_1^2 \frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_2^3 \frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_3^4 \frac{1}{4}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n \frac{1}{n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

于是
$$\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n。$$

§1.2 函数

一、内容精析

(一)函数概念

设 D 和 G 为非空实数集，$\forall x\in D$，按照某种对应法则 f，存在唯一实数 $y\in G$ 与之对应，记作 $y=f(x)$，则称对应关系 f 为定义在集合 D 上的函数，D 称为函数 f 的定义域，集合 $\{y\mid y=f(x),x\in D\}\subset G$ 称为函数的值域，x 称为自变量，y 称为因变量。

注① 函数的实质是两个集合之间的对应，"唯一确定的 y"指的是 D 到 G 的单值对应，未必是一一对应；

注② $y=f(x)$ 中，f 是函数，与自变量和因变量的符号无关；

注③ 两个函数相同，意味着它们的定义域、值域、对应法则均相同，但函数的表达式未必相同，自变量和因变量的符号也未必相同；

注④ 若给出函数的具体表达式而没有给出定义域，其定义域是指使函数表达式有意义的所有的点组成的集合。

(二)函数的常用性质

1. 有界性 设 $y=f(x)$，$x\in D$，若 $\exists M\in R$，使得 $\forall x\in D$，有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有上界，M 称为 $f(x)$ 的一个上界；若存在实数 M'，使得 $\forall x\in D$，有 $f(x)\geqslant M'$，则称 $f(x)$ 在 D 上有下界，M' 称为 $f(x)$ 的一个下界；若 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 D 上有界。

注① 函数在 D 上有上(下)界，则上(下)界不唯一；

注② 若 $f(x)$ 在 D 上有界，则在 $D'\subset D$ 上有界，若在 $D'\subset D$ 上无界，则在 D 上无界，即整体有界局部一定有界，局部无界整体一定无界；

注③ 函数 $f(x)$ 在 D 上无界 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 D 上无上界或无下界；

注④ 函数的有界性，常常和函数(数列)的极限或函数在区间上的可积性联系在一起。

2. 单调性 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，$\forall x_1,x_2\in D$，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)\underset{(\geqslant)}{\leqslant}f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 D 上单调递增(递减)。

注① 若函数 $f(x)$ 在 D 上单调，则 $f(x)$ 在 $D'\subset D$ 上单调，即整体单调，局部一定单调，但局部单调，整体未必单调；

注② 函数的单调性常常和函数的极值和可积性联系在一起；

注③ 若函数 $f(x)$ 在 D 上严格单调，则 $f(x)$ 在 D 上具有反函数，但具有反函数未必严格单调；$f(x)$ 具有反函数 $\Leftrightarrow$ 一一对应；

注④ 函数 $f(x)$ 在 D 上单调递增(减) $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in D$，$(x_1-x_2)\cdot(f(x_1)-f(x_2))\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0$。这一结论在判断函数的单调性、证明积分不等式等方面具有广泛的应用；

注⑤　判断 $f(x)$ 单调性常常采取的方法：作差 $f(x_2)-f(x_1)$、作商 $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$、判断导数的符号。

3. 奇偶性　设集合 $D\subset R$ 关于原点对称，若 $\forall x\in R$，有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 为 D 上的偶（奇）函数。

注①　奇、偶函数的定义域关于原点对称，但定义域未必是区间；

注②　奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称，函数的奇偶性往往和函数在对称区间上定积分联系起来；

注③　应熟练掌握可导的奇、偶函数的导函数的奇偶性：偶函数的导函数为奇函数，奇函数的导函数为偶函数，连续奇函数的原函数为偶函数，连续偶函数的原函数只有一个为奇函数，它一定过原点；

注④　若 $f(x)$ 在 D 上既是奇函数又是偶函数，则 $f(x)=0, x\in D$。

4. 周期性　若存在常数 $T\neq0$，使得 $\forall x\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的以 T 为周期的函数。

注①　周期 T 不一定就是正数，但常常用的是最小正周期（如果有的话）；

注②　研究周期函数的解析性质，往往只需考察一个周期内的情形；

注③　应十分注意周期函数定积分的特点。

5. 初等函数　由常数函数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的可以用一个式子表示的函数，称为初等函数。

注①　分段函数也可能是初等函数，如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$，它是分段函数，但是，$f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$，由基本初等函数 $y=u^{\frac{1}{2}}$ 和 $u=x^2$ 复合而成；

注②　若 $f(x)$ 是初等函数，则 $|f(x)|$ 也是初等函数。

二、典型例题分析

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x+\varphi(x), & x\geqslant0\\ -\sin x+\frac{1}{2}\varphi(x), & x<0\end{cases}$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant1\\ -1, & x<1\end{cases}$，求 $f(x)$ 的表达式。

解　由于 $\varphi(x)$ 的表达式分两部分，在 $f(x)$ 中，当 $x\geqslant0$ 时，$\varphi(x)$ 分两段，即 $x\geqslant1$ 和 $0\leqslant x<1$，而 $x<0$ 时，必有 $x<1$，故

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+1, & x\geqslant1\\ \sin x-1, & 0\leqslant x<1\\ -\sin x-\frac{1}{2}, & x<0\end{cases}。$$

例 2　(1) 设 $2f(x)+f(1-x)=\sin x$；(2) $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=x+1, x\neq0,1$。分别求函数 $f(x)$。

解　(1) 因为 $2f(x)+f(1-x)=\sin x$，令 $1-x=t$，得 $2f(1-t)+f(t)=\sin(1-t)$，再将 t 换成 x，有 $2f(1-x)+f(x)=\sin(1-x)$，结合 $2f(x)+f(1-x)=\sin x$，得 $f(x)=\frac{2\sin x-\sin(1-x)}{3}$。

(2) 令 $u=\frac{x-1}{x}$,则 $x=\frac{1}{1-u}$,代入原式,有 $f(\frac{1}{1-u})+f(u)=\frac{2-u}{1-u}$,再将 u 换为 x,则有 $f(\frac{1}{1-x})+f(x)=\frac{2-x}{1-x}$。再令 $x=\frac{1}{1-v}$,则 $\frac{1}{1-x}=\frac{v-1}{v}$,则上式为 $f(\frac{v-1}{v})+f(\frac{1}{1-v})=\frac{2v-1}{v}$,再将 v 换为 x,得 $f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=\frac{2x-1}{x}$。结合以上各式,得

$$\begin{aligned}&[f(x)+f(\frac{x-1}{x})]+[f(x)+f(\frac{1}{1-x})]-[f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})]\\&=(x+1)+\frac{2-x}{1-x}-\frac{2x-1}{x},\end{aligned}$$

整理,得 $f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$。

例 3 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有界,且 $f(x)-\frac{1}{3}f(\frac{x}{3})=x^2$,求 $f(x)$。

解 由 $f(x)-\frac{1}{3}f(\frac{x}{3})=x^2$,得

$$f(x)-\frac{1}{3}f(\frac{x}{3})=x^2,$$

$$\frac{1}{3}f(\frac{x}{3})-\frac{1}{3^2}f(\frac{x}{3^2})=\frac{x^2}{3^3}=x^2\cdot(\frac{1}{3^3}),$$

$$\frac{1}{3^2}f(\frac{x}{3^2})-\frac{1}{3^3}f(\frac{x}{3^3})=\frac{x^2}{3^6}=x^2\cdot(\frac{1}{3^3})^2,$$

$$\frac{1}{3^3}f(\frac{x}{3^3})-\frac{1}{3^4}f(\frac{x}{3^4})=\frac{x^2}{3^9}=x^2\cdot(\frac{1}{3^3})^3,$$

$$\cdots\qquad\cdots$$

$$\frac{1}{3^{n-1}}f(\frac{x}{3^{n-1}})-\frac{1}{3^n}f(\frac{x}{3^n})=x^2\cdot(\frac{1}{3^3})^{n-1}$$

各式相加,得

$$f(x)-\frac{1}{3^n}f(\frac{x}{3^n})=x^2[1+(\frac{1}{3^3})+(\frac{1}{3^3})^2+\cdots+(\frac{1}{3^3})^{n-1}],\qquad(*)$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域有界,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}f(\frac{x}{3^n})=0$,对 $(*)$ 式两端关于 n 取极限,得

$$f(x)=\frac{27x^2}{26}。$$

例 4 设 $x+e^x=e^y+y$,求证 $\sin\sin\sin\cos2x=\sin\sin\sin\cos2y$。

【分析】 若想解出 x 和 y,那是办不到的,应该寻找 x 和 y 之间的关系,为此,应充分利用函数的特性。

证明 *方法一* 令 $f(t)=t+e^t,t\in R$,则 $f'(t)=1+e^t>0$,从而,$f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调递增,又因为 $f(x)=f(y)$,所以 $x=y$,于是

$$\sin\sin\sin\cos2x=\sin\sin\sin\cos2y。$$

方法二 若 $x\neq y$,则 $x-y\neq0$,因为 $x+e^x=e^y+y$,所以 $x-y=e^y-e^x$。

由拉格朗日中值定理,存在介于 x 和 y 之间的实数 ξ,使得

$$x-y=e^y-e^x=(y-x)e^{\xi},$$

所以 $e^{\xi}=-1$,矛盾!于是 $x=y$,从而 $\sin\sin\sin\cos2x=\sin\sin\sin\cos2y$。