

义务教育新课程



资源与评价 (最新版)

义务教育新课程资源与评价课题组 编
黑龙江省教育学院



ZIYUAN YU PINGJIA

(人教版)

数学

九年级 上册

黑龙江教育出版社

黑龙江省中小学教材审定委员会审定



ZIYUAN YU PINGJIA

ISBN 7-5316-3160-1



9 787531 631606 >

版权所有 盗版必究

举报电话：0451-84616590

0451-82533097

ISBN 7-5316-3160-1

G·2434 定价：8.50 元

义务教育新课程

资源与评价

数学

九年级 上册

(人教版)

义务教育新课程资源与评价课题组
黑 龙 江 省 教 育 学 院 编

黑龙江教育出版社

黑龙江省中小学教材审定委员会审定

义务教育新课程

资源与评价

数学 九年级 上册

ZIYUAN YU PINGJIA

(人教版)

义务教育新课程资源与评价课题组 编
黑 龙 江 省 教 育 学 院

责任编辑 杨雪松

责任校对 田 林

封面设计 傅 旭

出 版 黑龙江教育出版社(哈尔滨市南岗区花园街158号)

印 刷 黑龙江新华印刷厂

发 行 黑龙江教育出版社

开 本 787×1092 1/16

字 数 148 千

印 张 7

版 次 2006年8月第1版

印 次 2006年8月第1次印刷

定 价 8.50 元

书 号 ISBN 7-5316-3160-1/G·2434

黑龙江教育出版社网址: www.hljep.com.cn

黑龙江教育出版社法律顾问: 黑龙江朗信律师事务所 刘宝庆

如有印装质量问题, 请与印刷厂联系调换。

写给同学们的话

同学们，你们好：

你们风华正茂，正处在意气风发的青少年时期。青少年时期是人成长的关键阶段，初中阶段教育是人生发展的重要奠基工程。如何使你们有能力、有信心迎接未来的挑战，承担起祖国的建设者和接班人的重任，是我们不断研究的课题；如何使你们学会做人、学会学习、学会做事、学会生存，是我们义不容辞的责任。为了中华民族的复兴，为了每位学生的发展，是我们永恒的人生追求。呈现在你们面前的《资源与评价》丛书，凝聚着老师们的智慧和汗水，愿它伴随你们度过豆蔻年华；愿你们能够从中发现偶像、体验时尚、享受流行，和着健康的网络文化节拍，和谐、快乐地成长。

实施素质教育，关系民族未来。《资源与评价》丛书试图在转变教育方式、丰富教育手段、拓展教育内容、明确教育目标上有所突破。是的，这是一条路，一条新路，一条体现时代发展要求的路，一条老师和同学们共同成长的路，盼望已久的路。

《资源与评价》丛书精选了品质优良的课程资源，提供了丰富多彩的探究活动，以有助于同学们开阔视野，培养你们认识世界、感受生活、规划人生的能力；以有助于同学们享受快乐，形成勇于创新、善于实践、豁达自信的素质；以有助于同学们规划未来，养成勤于思考、广泛交流、善于合作的习惯。

《资源与评价》与教材同步，它伴随着同学们学习和生活，帮助大家更好地完成学业。好好地使用它吧，因为它记录着你们成长的轨迹。

《资源与评价》与时代同步，它是点击同学们心灵的鼠标，引导大家融入健康的网络生活。好好地珍藏它吧，它将留下你们稚嫩的笑脸。

《资源与评价》为初中生的健康发展提供了广阔的天地。它将逐渐打开同学们的梦想心扉！来吧，它会使你们的学习兴趣更加浓厚，它会使你们的主动学习愿望更加强烈。

《资源与评价》是一个巨大的平台，它构建了同学们奔向光明未来之路。

《资源与评价》是一个辉煌的舞台，它奏响了同学们展示豆蔻年华之音。

愿《资源与评价》成为同学们生活中的好朋友！

愿《资源与评价》成为同学们学习中的好伙伴！

目 录

第二十一章

二次根式 (1)

第二十二章

一元二次方程 (17)

第二十三章

旋转 (31)

第二十四章

圆 (46)

第二十五章

概率初步 (74)

参考答案 (101)

第二十一章 二次根式

天气晴朗时,一个人能看到大海的最远距离 s (单位: cm)可用公式 $s=\sqrt{16.88h}$ 来估计,其中 h 是眼睛离海平面的高度(单位: cm). 如果一个人站在岸边观察,眼睛离海平面的高度为 h_1 ,这个人站在某个观望台上眼睛离海平面的高度为 h_2 ,这个人两次观望看到大海的最远距离之比为多少? 根据前面给出的公式,这个人两次观望看到大海的最远距离之比为 $\frac{\sqrt{16.88h_1}}{\sqrt{16.88h_2}}$,这个结果如何化简呢? 学习二次根式后你就可以轻松解决这个问题了!

21.1 二次根式



1. 二次根式的定义

例1: 下列各式中,哪些是二次根式? 哪些不是二次根式?

$$\sqrt[3]{-27}, \sqrt{-x}, \sqrt{-(x-4)^2}, \sqrt{-x^2-1}, \sqrt{x^2+2x+1}.$$

解: 因为 $\sqrt[3]{-27}$ 的根指数不是2, 所以它不是二次根式; $\sqrt{-x}$, 当 $x \leq 0$ 时, 它是二次根式; $\sqrt{-(x-4)^2}$, 当 $x=4$ 时, 它是二次根式; 因为 $\sqrt{-x^2-1}$ 的被开方数是负数, 无意义, 所以它不是二次根式; $\sqrt{x^2+2x+1}$ 符合二次根式的形式, 而且被开方数是非负数, 因此它是二次根式.

方法小结: 判断一个式子是不是二次根式, 主要看它是否符合以下两点: 一是形式, 根指数必须是2; 二是看被开方数是否为非负数, 二者缺一不可.



2. 二次根式中被开方数取值范围的确定

例2: 当 x 为何值时下列各数在实数范围内有意义?

(1) $\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}$; (2) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|-5}$

解: (1) 要使 $\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}$ 有意义, 必须使 $x \geq 0$ 且 $2x-1 \geq 0$.

解得: $x \geq 0$ 且 $x \geq \frac{1}{2}$, 取公共区间.

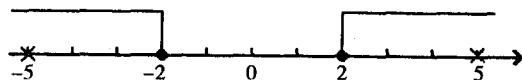
所以, 当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 式子 $\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}$ 在实数范围内有意义.

(2) 要使 $\frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|-5}$ 有意义, 必须使 $x^2-4 \geq 0$ 且 $|x|-5 \neq 0$.

解得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 2$, 且 $x \neq \pm 5$.

所以, 当 $x \leq -2$ 且 $x \neq -5$ 时, 或 $x \geq 2$

且 $x \neq 5$ 时, 式子 $\frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|-5}$ 有意义.



方法小结: 本类题目应从两方面去考虑: 一是二次根式的被开方数必须为非负数; 二是若式子中含有分式, 必须满足分母不等于零.



3. 二次根式的性质

例3: 在实数范围内分解因式:

(1) $4x^4-1$; (2) $x^2-2\sqrt{2}x-3$

解: (1) $4x^4-1 = (2x^2+1)(2x^2-1) = (2x^2+1)(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)$.

(2) $x^2-2\sqrt{2}x-3 = x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2-3 = (x-\sqrt{2})^2-5 = (x-\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2 = (x-\sqrt{2}+\sqrt{5})(x-\sqrt{2}-\sqrt{5})$.

方法小结: 解题的关键是把一个非负数 a 写成一个数的平方形式, 即逆用公式 $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a \geq 0$), 这样就可以在实数范围内分解因式了. 在有理数范围内分解因式方法和公式仍然适用. 本类型题注意分解到不能再分解为止.

例4: 当 $x>1$ 时, 化简 $\sqrt{(x-1)^2}$ 的结果为 ().

- (A) $x-1$ (B) $-x-1$ (C) $1-x$ (D) $x+1$

方法小结: 运用二次根式的性质 $\sqrt{a^2}=a$ ($a\geq 0$) 进行化简, 答案为A.

(每小题3分, 共54分)

1. 下列各式 $\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{b-2}$ ($b\geq 2$), $\sqrt{-(3x-1)^2}$, $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2}$, $\sqrt{(x-1)^2}$ 中, 二次根式的个数是 ().

- (A) 2个 (B) 3个 (C) 4个 (D) 5个

2. 在 $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}$ 中 x 的取值范围是 ().

- (A) $x\geq 5$ (B) $x\leq 7$ (C) $x\geq 5$ 或 $x\leq 7$ (D) $5\leq x\leq 7$

3. 如果 $\sqrt{\frac{-2}{2-a}}$ 是二次根式, 则 a 的取值范围是 ().

- (A) $a\neq 2$ 的实数 (B) $a<2$ 的实数 (C) $a>2$ 的实数 (D) $a>0$ 且 $a\neq 2$

4. $(\sqrt{a-1})^2=a-1$ 成立的条件是 ().

- (A) $a\neq 1$ (B) $a\geq 1$ (C) $a<1$ (D) $a\leq 1$

5. 如果 $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 是二次根式, 则 a 、 b 应满足的条件是 ().

- (A) $a\geq 0$ 且 $b\geq 0$ (B) $a>0$ 且 $b\geq 0$ (C) $a<0$ 且 $b\leq 0$ (D) $a b\geq 0$ 且 $a\neq 0$

6. $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$, 则 a 必须满足的条件是 ().

- (A) $a>0$ (B) $a\geq 0$ (C) $a\leq 0$ (D) a 为任意实数

7. 能使式子 $-\sqrt{-(x-2)^2}$ 有意义的实数 x 有 ().

- (A) 0个 (B) 1个 (C) 2个 (D) 无数个

8. 把 $4\frac{1}{4}$ 写成一个正数的平方形式 ().

- (A) $(2\frac{1}{2})^2$ (B) $(2\frac{1}{2})^2$ 或 $(-2\frac{1}{2})^2$ (C) $(\frac{17}{4})^2$ (D) $(\frac{17}{2})^2$ 或 $(-\frac{17}{2})^2$

9. 小明站在水平高度为 h m的地方, 可看见的水平线的距离是 d km. 它们近似地符合公式: $d=8\sqrt{\frac{h}{5}}$. 如果某天小明从海拔 n m处登上海拔 $3n$ m处的山顶, 那么他看到的水平线距离是原来的 () 倍.

- (A) 3 (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

10. 一个面积为 24cm^2 的矩形, 它的两边之比为 $3:4$, 它的两边之长为 () .

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}\text{cm}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{4}\text{cm}$ (B) $3\sqrt{2}\text{cm}$ 和 $4\sqrt{2}\text{cm}$
(C) $2\sqrt{3}\text{cm}$ 和 $4\sqrt{2}\text{cm}$ (D) $\sqrt{3}\text{cm}$ 和 $\sqrt{2}\text{cm}$

11. 如果 $\sqrt[m]{m-n}$ 是二次根式, 那么 m 、 n 应满足的条件是_____.

12. 已知 $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}+5$, 则 $\frac{y}{x}$ =_____.

13. 若 $\sqrt{12a}$ 是整数, 那么正整数 a 的最小值为_____.

14. 把下列各数写成一个数的平方形式:

$$\frac{1}{3} = \text{_____}; 0.001 = \text{_____}; a-1 = \text{_____} (a \geq 1); 3a = \text{_____}$$

($a \geq 0$) .

15. 在实数内分解因式:

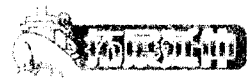
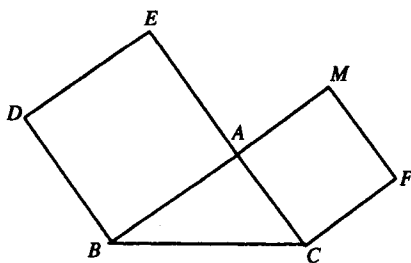
$$2x^2-4 = \text{_____}; 4a^2-3 = \text{_____}.$$

16. 面积为 18cm^2 的正方形, 它的边长应为_____ cm.

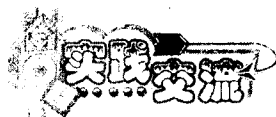
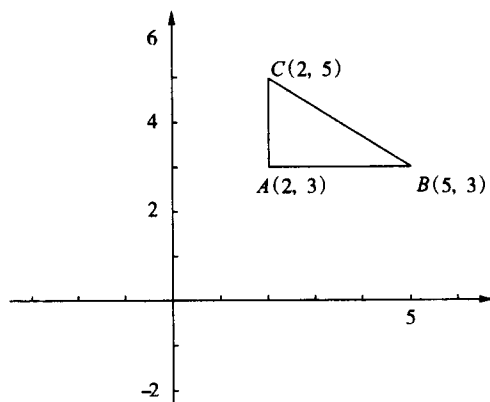
17. 若 a 、 b 、 c 为三角形的三边, 则

$$\sqrt{(a-b-c)^2} = \text{_____}.$$

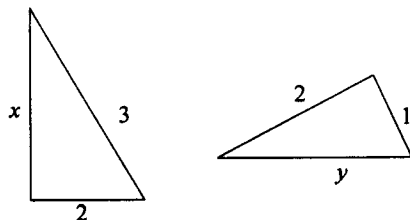
18. 以直角三角形 ABC 的两条直角边 AB 、 AC 为边向外作正方形, 面积分别为 12 和 13 , 则斜边长是_____.



19. (10分) 如图, 在平面直角坐标系中, $A(2,3)$ 、 $B(5,3)$ 、 $C(2,5)$ 是三角形的三个顶点, 求 BC 的长, 并求出将 $\triangle ABC$ 沿着 AC 旋转所得的旋转体的体积.



20. (10分)(1) 如图, 求出右图中的 x 和 y .



(2) 比较大小: $\sqrt{5}$ ____ 2. 从哪一图中可得到验证? 说出你的理由. 还有无其他办法比较二者的大小?



基础演练	43~54分	A	32~42分	B	32分以下	C
拓展延伸	8~10分	A	6~7分	B	6分以下	C
实践交流	8~10分	A	6~7分	B	6分以下	C

- A. 祝贺你已经轻松过关 B. 本部分内容还需巩固, 加油啊!
C. 别灰心, 求助同伴与老师, 继续努力, 你一定行!

21.2 二次根式的乘除



1. 积的算术平方根的性质运用

例1: 计算:

$$(1) \sqrt{36^2+48^2}; \quad (2) \sqrt{(-4) \times \frac{25}{9} \times (-169)}$$

解: (1) $\sqrt{36^2+48^2} = \sqrt{12^2(3^2+4^2)} = \sqrt{12^2 \times 5^2} = \sqrt{12^2} \times \sqrt{5^2} = 12 \times 5 = 60.$

$$(2) \sqrt{(-4) \times \frac{25}{9} \times (-169)} = \sqrt{4 \times \frac{25}{9} \times 169} = \sqrt{4} \times \sqrt{\frac{25}{9}} \times \sqrt{169} = 2 \times \frac{5}{3} \times 13 = \frac{130}{3}.$$

方法小结: 积的算术平方根性质的作用是化简二次根式. 化简二次根式一般先将被开方数进行因式分解或因数分解.

例2: 把下面各式根号外的因式移到根号里面.

$$(1) (m-1)\sqrt{5m} \quad (m>1); \quad (2) -2a\sqrt{\frac{1}{2a}}$$

解: (1) $(m-1)\sqrt{5m} = \sqrt{(m-1)^2 \times 5m} = \sqrt{5m(m-1)^2} \quad (m>1);$

$$(2) -2a\sqrt{\frac{1}{2a}} = -\sqrt{(2a)^2 \times \frac{1}{2a}} = -\sqrt{2a}.$$

方法小结: 把根号外的因式移到根号内时, 根号外面的负号是不能移到根号内的, 移入根号内的因式必须是正数或正因式.



2. 二次根式的乘法公式的运用

例3: 计算:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2005} (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2006}$$

解: 原式 $= (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2005} (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2005} (\sqrt{3}+\sqrt{2})$
 $= [(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})]^{2005} (\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 1^{2005} (\sqrt{3}+\sqrt{2}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2}).$

方法小结: 灵活运用乘法公式, 可使计算简便.



3. 商的算术平方根的性质

例4: 等式 $\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-5}} = \frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-5}}$ 成立的条件是 ().

- (A) $a \geq 2$ (B) $a \neq 5$ (C) $a \geq 2$ 且 $a \neq 5$ (D) $a > 5$

解: 根据商的算术平方根的性质成立的条件, 得 $a-2 \geq 0$ 且 $a-5 > 0$, 解得 $a > 5$, 所以应选D.

方法小结: 注意分母不能等于零.



4. 二次根式的除法

例5: 计算: $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{c^5}} \div \left(-\sqrt{\frac{ab}{2c^3}}\right)$

解: $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{c^5}} \div \left(-\sqrt{\frac{ab}{2c^3}}\right) = -\sqrt{\frac{2a^2b^2 \times 2c^3}{c^5 \times ab}} = -\sqrt{\frac{4ab}{c^2}} = -\frac{2\sqrt{ab}}{c}$.

方法小结: 当除数是分式或分数时, 可转化为乘法计算, 运算的结果一定要简, 即满足条件: (1) 被开方数不能有开得尽方的因数或因式; (2) 被开方数中不能含有分母.



5. 最简二次根式

例6: 把下列各根式化为最简二次根式.

- (1) $\frac{13\sqrt{2}}{\sqrt{26}}$; (2) $\sqrt{\frac{c}{a+b}}$ ($a+b > 0$)

解: (1) $\frac{13\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = \frac{13\sqrt{2} \times \sqrt{26}}{\sqrt{26} \times \sqrt{26}} = \frac{13\sqrt{52}}{26} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$.

(2) $\sqrt{\frac{c}{a+b}} = \sqrt{\frac{c(a+b)}{(a+b)^2}} = \frac{\sqrt{c(a+b)}}{\sqrt{(a+b)^2}} = \frac{\sqrt{ac+bc}}{a+b}$.

分析: 依据最简二次根式的概念进行化简.

- (1) 被开方数的因数是整数, 因式是整式;
(2) 被开方数中不能含能开得尽方的因数或因式.



(每小题3分, 共33分)

1. 下列计算正确的是 ().

- (A) $8\sqrt{3} \times 6\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ (B) $5\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} = 5\sqrt{6}$
(C) $4\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{6}$

2. (2004湖北宜昌) 下列二次根式中是最简二次根式的为 ().

- (A) $\sqrt{12}$ (B) $\sqrt{a^2b}$ (C) $\sqrt{ab}$ (D) $\sqrt{x^3}$

3. 把 $\sqrt{\frac{2}{27}}$ 化成最简二次根式, 结果为 ().

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

4. 已知 $xy < 0$, 化简二次根式 $x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$ 的正确结果是 ().

- (A) $\sqrt{y}$ (B) $\sqrt{xy}$ (C) $-\sqrt{y}$ (D) $\sqrt{-y}$

5. 把 $(2-x)\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 的根号外的因式适当改变后移入根号内, 得 ().

- (A) $\sqrt{2-x}$ (B) $\sqrt{x-2}$ (C) $-\sqrt{2-x}$ (D) $-\sqrt{x-2}$

6. 一个矩形的长为 $\sqrt{10}$, 宽为 $2\sqrt{3}$, 这个矩形的面积为 ().

- (A) $2\sqrt{30}$ (B) $20\sqrt{3}$ (C) $10\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{13}$

7. 如图所示, 在直角三角形 ABC 中, $AB=AC=2\text{cm}$, $AD \perp BC$, 则 AD 的长是 ().

- (A) $2\sqrt{3}\text{cm}$ (B) $3\sqrt{2}\text{cm}$ (C) $\sqrt{2}\text{cm}$ (D) 以上都不对

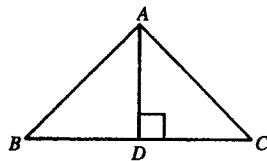
8. 二次根式 $\sqrt{45a}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{2\frac{1}{2}}$, $\sqrt{40b^2}$, $\sqrt{17(a^2+b^2)}$

中最简二次根式是_____.

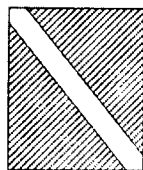
9. 比较大小: $3\sqrt{2}$ _____ $\sqrt{19}$.

10. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若 $a=9$, $c=18$, b 边的长为_____.

11. 如图, 有一个高 $\sqrt{10}\text{m}$ 、宽 $2\sqrt{2}\text{m}$ 的大门, 需要在相对角的顶点间加一个加固木板, 木板长_____m.



(第7题图)



12. 计算: (每小题5分, 共10分)

$$(1) \frac{1}{4}\sqrt{18} \times 8\sqrt{\frac{1}{36}} \div \frac{2}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}$$

$$(2) \frac{3}{b}\sqrt{ab^3} \times \left(-\frac{2}{3}\sqrt{ab}\right) \div \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

13. (5分) 若等式 $\sqrt{(3x+1)(2-x)} = \sqrt{(3x+1)} \times \sqrt{(2-x)}$ 成立, 试化简: $|x-2| + \left|x - \frac{1}{3}\right|$.

14. (5分) 已知三角形一边长为 $\sqrt{42}$ cm, 这边上的高为 $\sqrt{30}$ cm, 求此三角形的面积.

15. (7分) 一个正方形和一个长方形面积相等. 已知此长方形的长为50cm, 宽为40cm, 求这个正方形的边长.

16. (10分) 一艘轮船以10海里/小时的速度离开港口向东南方向航行, 另一艘轮船在同时同地以它2倍的速度向西南方向航行, 它们离开港口一个半小时后相距多少海里? (精确到0.1海里, $\sqrt{5} \approx 2.236$)



17. (20分) 填空: $\sqrt{11-2} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\sqrt{1111-22} = \underline{\hspace{2cm}}$;

$\sqrt{111111-222} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\sqrt{11111111-2222} = \underline{\hspace{2cm}}$.

由此猜想: $\sqrt{111\cdots 11-222\cdots 22} = \underline{\hspace{2cm}}$. (根号里含 $2n$ 个1、 n 个2)

18. (10分) 根据爱因斯坦的相对论, 当地面上经过1秒钟时, 宇宙飞船内只经过

$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{C}\right)^2}$ 秒, 公式内的C是指光速 (约 $30 \times 10^8 \text{ km/s}$), v 是指宇宙飞船的速度.

假定有一对亲兄弟, 哥哥23岁, 弟弟20岁, 哥哥乘着以光速0.98倍的速度飞行的宇宙飞船做了5年宇宙旅行后回来了. 这个5年是指地面上的5年, 所以弟弟的年龄是25岁, 可是哥哥的年龄在这段时间只长了1岁, 只有24岁. 就这样, 宇宙旅行后, 弟弟的年龄反比哥哥大了1岁. 请你用以上公式验证以上推断是否正确.



基础演练	56~70分	A	42~55分	B	42分以下	C
拓展延伸	16~20分	A	12~15分	B	12分以下	C
实践交流	8~10分	A	6~7分	B	6分以下	C

- A. 祝贺你已经轻松过关 B. 本部分内容还需巩固, 加油啊!
C. 别灰心, 求助同伴与老师, 继续努力, 你一定行!

21.3 二次根式的加减



1. 判断几个二次根式化成最简二次根式后被开方数是否相同

例1: 判断以下二次根式化成最简二次根式后被开方数是否相同.

$$(1) -\sqrt{175}; \quad -\sqrt{3\frac{15}{16}}; \quad \frac{2}{3}\sqrt{85\frac{3}{4}}$$

(2) 当 $m < n < 0$ 时, $\sqrt{\frac{n}{m}}$, $\sqrt{\frac{m}{n}}$, $\sqrt{\frac{n}{m} + \frac{m}{n} - 2}$

解: (1) $\therefore -\sqrt{175} = -\sqrt{25 \times 7} = -5\sqrt{7}$;

$$-\sqrt{3\frac{15}{16}} = -\sqrt{\frac{63}{16}} = -\sqrt{\frac{9 \times 7}{16}} = -\frac{3}{4}\sqrt{7};$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{85\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{343}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{49 \times 7}{4}} = \frac{7}{3}\sqrt{7}$$

$\therefore -\sqrt{175}$, $-\sqrt{3\frac{15}{16}}$, $\frac{2}{3}\sqrt{85\frac{3}{4}}$ 化成最简二次根式后的被开方数相同.

(2) $\therefore$ 当 $m < n < 0$ 时,

$$\sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{mn}{m^2}} = \frac{1}{|m|} \sqrt{mn} = -\frac{1}{|m|} \sqrt{mn} \quad (\because m < 0).$$

$$\sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{mn}{m^2}} = \frac{1}{|n|} \sqrt{mn} = -\frac{1}{|n|} \sqrt{mn} \quad (\because n < 0).$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{n}{m} + \frac{m}{n} - 2} &= \sqrt{\frac{n^2 + m^2 - 2mn}{mn}} = \sqrt{\frac{(n-m)^2 \cdot mn}{m^2 n^2}} \\ &= \frac{|n-m|}{|mn|} \sqrt{mn} = \frac{n-m}{mn} \sqrt{mn} \quad (\because mn > 0, n-m > 0). \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{\frac{n}{m}}$, $\sqrt{\frac{m}{n}}$, $\sqrt{\frac{n}{m} + \frac{m}{n} - 2}$ 化成最简二次根式后的被开方数相同.

方法小结: 首先要将其化为最简二次根式.



2. 二次根式的运算

例2: 已知: $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$, 求 $ab^3 + a^3b$ 的值.

$$\text{解: } a+b = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}, \quad ab = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore ab^3 + a^3b = ab(b^2 + a^2) = ab[(a+b)^2 - 2ab].$$

$$\text{将 } a+b \text{ 与 } ab \text{ 的值代入, 原式} = \frac{1}{4} \left[(\sqrt{3})^2 - 2 \times \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{8}.$$

方法小结: 显然上面的解法非常简捷. 在运算过程中, 我们可通过合理的运算途径, 提高运算速度. 类似的解法在许多问题中有广泛的应用. 一般地, 二次根式的加、减可分以下三个步骤进行: (1) 将每一个二次根式都化为最简二次根式; (2) 把被开方数相同的二次根式结合为一组; (3) 进行合并.