普通高等教育“十一五”国家级规划教材

21世纪高等学校通信类规划教材

随机过程理论

（第2版）

Stochastic Processes Theory

(Second Edition)

周荫清　主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

21世纪高等学校通信类规划教材

随机过程理论

（第2版）

Stochastic Processes Theory

（Second Edition）

周荫清　主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书为普通高等教育"十一五"国家级规划教材。

本书系统介绍随机过程的基本理论、分析方法及在实际中应用广泛的几类随机过程。全书共 8 章,内容包括:随机过程的基本概念,随机过程的线性变换,窄带随机过程,高斯随机过程,泊松过程,马尔可夫链和马尔可夫过程。各章配有适量习题,书末附有习题提示与答案。

本书文字通俗,概念清晰,逻辑性强,可作为高等学校工科有关专业的教材或教学参考书,还可供通信、雷达、控制、系统工程、生物医学工程、社会科学等有关领域的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程理论/周荫清主编.—2 版.—北京:电子工业出版社,2006.10
(21 世纪高等学校通信类规划教材)
ISBN 7-121-03278-3

Ⅰ.随… Ⅱ.周… Ⅲ.随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.0211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 120116 号

责任编辑:韩同平　　特约编辑:李佩乾
印　　刷:
装　　订:北京牛山世兴印刷厂
出版发行:电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编:100036
开　　本:787×1092　1/16　印张:17　字数:452.2 千字
印　　次:2006 年 10 月第 1 次印刷
印　　数:5000 册　　定价:24.90 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系电话:(010)68279077;邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

反侵权盗版声明

举报电话：(010)88254396；(010)88258888
传　　真：(010)88254397
E-mail：dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市万寿路 173 信箱
电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036

出 版 说 明

教材建设是高等学校教学和学科建设的主要内容之一。近几年来，我国各高等学校实施了一系列面向21世纪教学改革计划，在教学内容和课程体系改革上取得了丰硕的成果，因此需要适时推出适应教改成果的教材。同时，通信技术发展十分迅速，原有教材或者内容已比较陈旧、落后，难以适应教学的要求，需要修订或重新编写；或者需要开设新课程，编写新教材以填补空白。

电子工业出版社作为以信息技术领域出版为特色的中央级科技与教育出版社，始终关注着电子信息技术的发展方向，始终把出版适应我国高等学校发展要求的高质量精品教材放在重要位置上，出版了一系列特色鲜明的教材，希望能把它们放在学生的书包里、课桌上，为培养高素质人才打下良好的基础。

基于上述考虑，经过一年多的调研，并征求多方的意见，根据国内高等学校通信专业的发展现状，以及教育部《关于十五期间普通高等教育教材建设与改革意见》的指示精神，电子工业出版社规划出版了这套"21世纪高等学校通信类规划教材"。

目前，我国多数高等学校都设有通信专业，但办学水平、特色及人才培养层次差异很大。这套教材定位于重点高校，即以研究型、研究教学型人才培养为主的高等学校通信类专业，包括其他相关专业的通信类课程教材。教材的作者全部来自于重点高校，多数是"信息与通信工程"一级学科设有全国重点学科的高校。

与以往出版的同类教材相比，这套教材具有以下特点：

（1）专业特色鲜明：以重点院校本科通信类专业的专业课程教材为主线，兼顾其他相关专业的通信类课程。

（2）突出系统性：本套规划教材覆盖了本科通信类专业的专业基础课、专业方向课及专业选修课，形成一个完整的教材系列，规模之大是以往教材中所不多见的。同时注意教材之间内容的合理划分与衔接，层次分明，重点突出，各高校可以根据需要组合选用，我们的目的是为通信类课程打造一套全方位解决方案。

（3）体系、内容新颖：整个知识点建立在"高"、"新"平台上。基本理论阐述精练，深入浅出，便于自学；注意吸收新理论、新技术成果；加强实践性与应用性，结合实例进行讲解。

（4）配套教学支持：多数教材配有教学课件（电子教案），部分重要课程配套出版教学辅导书或实验教材。

（5）质量保证：多数教材为已出版教材的修订版，原教材在高校的影响大；重新规划的教材将在组织专家／教授对写作大纲和知识点进行充分讨论的基础上，选择优秀作者编写。

本套教材可作为高等学校通信专业及相关专业的本科生或研究生教材，也可供通信领域的有关专业人员学习参考。

为做好本套教材的出版工作，我们聘请了多位国内通信教育领域的著名教授作为教材顾问，并聘请了清华大学、东南大学、上海交通大学、北京交通大学、北京邮电大学、西安电子科技大学、电子科技大学等著名高校电子信息学院（系）的院长（系主任）成立教材编委会，从根本上保证了教材的高质量。在此对他们的辛勤工作表示衷心的感谢。

今后，我们将进一步加强同各高校教师的密切联系和合作，广泛听取一线教师对教材的反馈意见和建议，以便使我们的教材出版工作做得更好。

电 子 工 业 出 版 社

《21世纪高等学校通信类规划教材》顾问委员

（按姓名音序排列）

迟惠生（北京大学）
程时昕（东南大学）
冯重熙（清华大学）
李承恕（北京交通大学）
吴伟陵（北京邮电大学）
吴诗其（电子科技大学）
谢希仁（解放军理工大学）
袁保宗（北京交通大学）

《21世纪高等学校通信类规划教材》编审委员

（按姓名音序排列）

主任委员：樊昌信（西安电子科技大学）

副主任委员：

顾畹仪（北京邮电大学）
李建东（西安电子科技大学）
彭启琮（电子科技大学）
王金龙（解放军理工大学）
王希勤（清华大学）
文宏武（电子工业出版社）
吴镇扬（东南大学）
张思东（北京交通大学）

委员：

安建平（北京理工大学）
鲍长春（北京工业大学）
陈咏恩（同济大学）
邓建国（西安交通大学）
段哲民（西北工业大学）
樊昌信（西安电子科技大学）
范平志（西南交通大学）
方　勇（上海大学）
酆广增（南京邮电大学）
顾畹仪（北京邮电大学）
顾学迈（哈尔滨工业大学）
康　健（吉林大学）
李建东（西安电子科技大学）
李晓峰（电子科技大学）
刘　琚（山东大学）
彭启琮（电子科技大学）
仇佩亮（浙江大学）
唐朝京（国防科技大学）
唐向宏（杭州电子科技大学）
田宝玉（北京邮电大学）
王金龙（解放军理工大学）
王希勤（清华大学）
王祖林（北京航空航天大学）
文宏武（电子工业出版社）
韦　岗（华南理工大学）
吴镇扬（东南大学）
徐昌庆（上海交通大学）
张德民（重庆邮电学院）
张思东（北京交通大学）
郑建生（武汉大学）
朱光喜（华中科技大学）
朱秀昌（南京邮电大学）

编辑出版组：韩同平　王羽佳　姚晓竞

联系电话：(010)88254525　E-mail:hantp@phei.com.cn

前　言

本书是在周荫清编著的《随机过程导论》第 1 版的基础上，根据教材历年来的教学使用情况，并适应本科生的教学需要，重新修订而成的。本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

随机过程理论经过半个多世纪的发展，已经成为一个十分活跃的学科领域。它已广泛应用于通信、雷达、控制、生物、社会科学，以及其他工程科学技术领域中。人们已经认识到，在现代科学技术飞速发展过程中，学习和掌握随机过程的基本理论日益成为一种需要。现实科研活动启示我们，只有熟悉和掌握随机过程的基本理论、基本分析方法，才能更好地学习现代科学技术，探索新的科学领域。

近 20 多年来，本书作者为北京航空航天大学电子信息工程学院高年级本科生和研究生开设随机过程理论课程，同时编写了《随机过程导论》教材，于 1987 年 11 月由北京航空学院出版社出版，之后于 1993 年 9 月由我国台湾儒林图书有限公司在台湾出版。本教材注重基本理论、基本概念和基本方法的阐述，以及能力的培养。同时，在数学工具的运用上力求准确、简明、适中，尽量使读者使用较浅的数学工具就能够准确、系统地认识和掌握随机过程的基本理论和分析方法，既不过于简化，又不拘泥于数学细节。对于凡学习过概率论、线性代数的读者基本上都可以自学此书。

本书着重讨论随机过程的基本理论和基本方法，重点介绍在应用中常见的几类随机过程。全书共分 8 章。第 1 章是根据本书后续章节需要，概述一些重要的概率论知识；第 2 章详细论述随机过程的基本概念，重点介绍随机过程两类基本分析方法；第 3 章研究具有随机输入的线性系统输出过程的统计特征；第 4 章至第 8 章分别介绍窄带随机过程、高斯随机过程、泊松随机过程和马尔可夫过程。

本书在内容编排上力求由浅入深，加强物理概念的阐述，以最易接受的方式介绍随机过程的基本理论及各类常用的随机过程。书中列出较多例题，都是在教学过程中经过精心挑选的，以便对基本理论加深理解。为了提高分析问题和解决问题的能力，做习题是必不可少的，为此每章后面配有大量习题(标 * 的习题难度较大，可视学生情况选做)，书末附有部分习题答案或提示。

本教材的主体内容可作为高等学校工科有关专业的本科生教材，其中各类随机过程的理论与应用，亦可以作为研究生教材。参考学时数为 48～64。

本书第 1,2 章由周荫清修订；第 3 章由李春升修订；第 4 章由李景文修订；第 5 章由周芳修订；第 6 章由徐华平修订；第 7,8 章由陈杰修订；全书习题由唐智修订；周荫清统稿全书。

研究生孙慕涵为本教材的修订做了大量细致的工作，修整了全书图稿，为本书的修订出版做出了重要贡献；参加修订的还有研究生王晓亮、朱卫纲、于泽、张久玲、陈荣光、朱晶、李然、李威、刘伟、杨威等，他们为本书出版亦付出了许多辛勤劳动。电子工业出版社韩同平编辑为本书出版提出了许多宝贵意见。在此一并表示衷心感谢。

为便于教学，本教材将免费提供电子课件，可登录电子工业出版社华信教育资源网 http://www.huaxin.edu.cn 下载。

为便于广大师生更好地学习和掌握随机过程理论课程的主要内容，作者编写的《随机过程理论学习指导及习题解析》也将由电子工业出版社出版。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

周荫清
于北京航空航天大学

目　　录

第 1 章　概率与随机变量

1.1　集　　合

在概率论中，事件和事件的集合起着极其重要的作用。事件的数学理论和集合论之间有着十分密切的对应关系。通过集合的概念可以认识概率论中事件发生的实质。因此，先介绍集合论的基本概念。

集合，简称为集。我们将为了某种目的而研究的对象的总体称为集。每一个属于这种集的对象称为元素。集合中的元素可以是任意的对象。换言之，任何对象的总体都可以构成集。例如，全体正整数组成的集；在一条给定的直线上的所有点组成的集；定义在区间$[a,b]$上的所有连续函数组成的集。

通常把只有有限个元素的集和无穷多个元素的集分别称为有限集合和无穷集合。若一个无穷集，它的元素可以与所有正整数一一对应地排列，则称为可列集或可数集。所有正整数，即由 1,2,3,…所组成的集合是可列集的一个简单例子。不满足上述性质的无穷集合称为不可列集或不可数集。一个直线段上所有点构成的集合是不可列集的一个简单例子。

若 X 是集 A 的元素就写成 $X\in A$；如不是集 A 的元素就写成 $X\notin A$。如果集 A 为全体自然数，则 $2\in A$，$1/2\notin A$。

不含任何元素的集称为空集，常用$\varnothing$表示。例如，满足 $x^2+1=0$ 的实数的集是空集。

在许多研究中，要涉及已给集合的各种子集的性质和相互关系。这个包含有研究中出现的全部元素的“最大”集，称为空间，常用 Ω 表示。例如，研究那些在一条直线上的点所组成的不同集合，则可以取直线上所有的点组成的集作为空间，并称为 R^1 空间。空间 Ω 中的任何一个子集 A 简称为 Ω 中的集。

若有两个集合 A 和 B，而集 A 中的每一个元素均属于 B，则称 A 为 B 的子集。如果 $B=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$ 表示全体正整数组成的集合，集 $A=\{\omega_1,\omega_3,\cdots\}$ 表示全体正奇数组成的集合，显然，A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

由定义，任意集 A 均有 $A\subset A$，$\varnothing\subset A$。而且集的包含关系具有传递性，即若 $A\subset B$，且 $B\subset C$，则 $A\subset C$，如图 1.1 所示。

若一个集 A 的元素都是集 $A_1,A_2,\cdots$ 时，则称 A 为一个族，有时称为类，显然族是集的同义词。

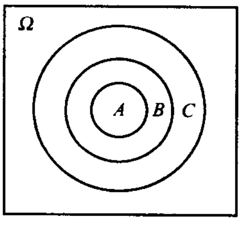


图 1.1　集的传递性

1.1.1　集合的运算

通过对集合的运算可以进一步认识集合。对集合的运算还可产生另外一些集合。现在研究集合运算中的加、减和乘法。设 $A,B,C,\cdots$ 是空间 Ω 的子集，集合运算的结果将产生新的集合，下面简要介绍这些概念。

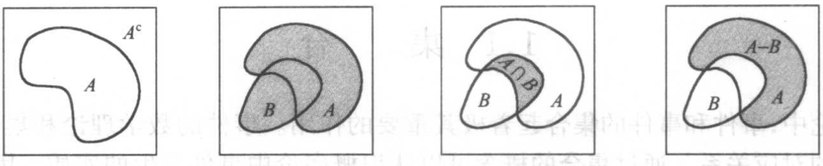
余集　集合 A 的余集是指在一个给定的空间 Ω 中，不属于 A 的那些点的集合，可以表

示为

$$A^c = \{\omega \mid \omega \notin A\}$$

余集如图 1.2(a)所示。显然,$\Omega^c = \varnothing$,$\varnothing^c = \Omega$。这一运算有下述特性:对集 A 连续进行两次运算,又可重新得到集 A,即

$$(A^c)^c = A$$



(a) A^c　(b) $A \cup B$　(c) $A \cap B$　(d) $A-B$

图 1.2　集合的运算几何图

并集　两个集合 A 和 B 的并集是指至少属于 A 和 B 之一的点的集合,记为

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

也就是说并集是指属于 A 或属于 B,或者同时属于两者的所有元素 ω 所组成的集。并集如图 1.2(b)所示。

并集概念可以推广到包含任意数目(有限或可列无限)的集合的情况,并将其记为

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{1.1.1}$$

交集　两个集合 A 和 B 的交集是指同时属于这两个集合的点的集合,记为

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 和 } \omega \in B\}$$

交集如图 1.2(c)所示。还可将 $A \cap B$ 简记为 AB。可以看出,若 $AB = 0$,即集合 A 和 B 没有公共元素,就称其为互斥或不相交。

交集概念可以推广到包含任意数目(有限或可列无限)的集合的情况,并将其记为

$$A_1 A_2 A_3 \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \tag{1.1.2}$$

若对每个 $i, j\ (i \neq j)$ 满足 $A_i A_j = 0$,则集 $A_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是互斥的或互不相关的。

差集　两个集合 A 与 B 之差是指属于集 A 而不属于集 B 的点的集合,记为

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 和 } \omega \notin B\}$$

这一运算既是不可交换的,也是不可结合的。差集如图 1.2(d)所示。按照差集的定义,显然有

$$A - \varnothing = A, \quad \Omega - A = A^c, \quad A - B = AB^c$$

在集的运算中,经常用到以下三个极重要的定律。

- 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

- 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

- 分配律

加法分配律　$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

乘法分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

在余、交、并集三种运算中还服从德·摩根(De Morgan)律,即

$$(A\cup B)^{c}=A^{c}\cap B^{c},\quad (A\cap B)^{c}=A^{c}\cup B^{c} \tag{1.1.3}$$

这是两个极有用的定理。

将上述公式推广到有限、可数情况,则有

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^{c}=\bigcap_{i=1}^{n}A_i^{c},\quad \left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)^{c}=\bigcup_{i=1}^{n}A_i^{c} \tag{1.1.4}$$

1.1.2 博雷尔集合体

设有空间 Ω,Ω 中的一些子集 A(一般是不可列的)组成的类 $\mathscr{F}$ 称为 Ω 中的一个 σ 代数或称为博雷尔(Borel)集合体。$\mathscr{F}$ 满足下列条件:

① $\Omega\in\mathscr{F}$;

② 若 $A\in\mathscr{F}$,则 $A^{c}\in\mathscr{F}$;

③ 若 $A_j\in\mathscr{F}, j=1,2,\cdots$,则 $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$。

在上述条件中,前两个条件意味着

$$\varnothing=\Omega^{c}\in\mathscr{F}$$

利用德·摩根定理,从第二和第三个条件可得

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j=\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_i^{c}\right)^{c}\in\mathscr{F} \tag{1.1.5}$$

因此,一个博雷尔体是一些集的类,它包括集 $\varnothing$ 和空间 Ω,对于它的一切可列集的并和交的运算是封闭的。显然,Ω 的一切子集的类是博雷尔体。不过,在概率论中,这个特殊的博雷尔体太大而且不实用。因此,一般研究 Ω 的子集的最小类,它们既构成博雷尔体又包含被研究的一切元素和集。

1.2 概　　率

1.2.1 随机事件和样本空间

随机试验是概率论中极其重要的概念,它的各种结果是一些事件。通常把对自然现象进行观察或进行一次试验,统称为一个试验。如果这个试验满足下述条件,则称为随机试验 E。

① 在相同条件下可重复进行;

② 每次试验结果不止一个,所有可能结果事先不能预测;

③ 每次试验之前不能确定哪一种结果出现。

随机试验是用来研究随机现象的。随机试验的每一个可能结果一般称为随机事件,或简称事件。最简单的事件称为基本事件。而随机试验的所有可能事件的集合叫做样本空间。举一个简单例子,投掷一个骰子构成的随机试验,每次投掷结果出现整数 1,2,…,6 中的一个数。出现整数 1 这个事件叫做基本事件。出现偶数点的事件为一个随机事件或称可观察事件。显然它不是基本事件,是一个复合事件,因为它表示一个基本事件的集。有时又称为样本空间的子集。所有可能事件的集合{1,2,3,4,5,6}则是这个例子的样本空间。

给定一个随机试验 E,所有可能事件的集合是它的样本空间,它的元素是基本事件。因此,可观察事件是样本空间的一些子集。事件和样本空间的定义提供了一个结构,在这个结构

内可以实现对事件的分析，这样在概率论中事件的所有定义和它们之间的关系都可以用集合论中的一些集和集的运算来描述。如果研究元素 ω 的空间为 Ω，子集为 $A, B, \cdots$，则集合论和概率论之间的一些关系如表 1.1 所示。

表 1.1　集合论和概率论之间的关系

集合论	概率论
空间 Ω	样本空间、必然事件
空集 $\varnothing$	不可能事件
元素 ω	基本事件
集 A	可观察事件或复合事件
A	出现 A
A^c	A 不出现
$A \cup B$	A 和 B 至少出现一个
AB	A 和 B 同时出现
$A-B$	A 出现而 B 不出现

在今后的讨论中，假定空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 都是可观察事件。并且要求它们与随机试验 E 有关的一切可观察事件的集组成博雷尔事件体 $\mathscr{F}$。这意味着一切由可列个可观察事件的并、交形成的事件也是可观察的，并包含在博雷尔事件体 $\mathscr{F}$ 中。于是，常常把对事件的分析转化为对集合的分析，用集合间的运算分析事件间的关系。从而用集合论的知识建立起事件的概率及其性质的概念。

1.2.2　概率函数

现在引进概率函数的概念。给定一个随机试验 E，对一切可观察事件的博雷尔事件体中的每一个事件集 A，对应一个有限数 $P(A)$。数 $P(A)$ 是事件集 A 的一个函数，假设定义在 $\mathscr{F}$ 中的所有集上，并满足下列性质：

① 概率的非负性：$P(A) \geqslant 0$；

② 概率的规范性：$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$；

③ 概率的可列可加性：对 $\mathscr{F}$ 中互不相交的可列集 $A_1, A_2, \cdots$，下列等式成立

$$P\left\{\sum_i A_i\right\} = \sum_i P(A_i) \tag{1.2.1}$$

则称 $P(A)$ 为 A 的概率测度或简称概率。

综上所述，一个随机试验的数学描述已经论述清楚了。它由三个基本要素组成，即样本空间 Ω，可观察事件的博雷尔事件体 $\mathscr{F}$ 和概率函数 P。这三个要素构成了与随机试验有关的概率空间，概率空间一般用三元总体 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 表示。

1.2.3　条件概率

1. 条件概率的定义和性质

在实际问题中，一般除了要考虑事件 A 的概率 $P(A)$ 外，还须考虑在“事件 B 已发生”的条件下，事件 A 的概率，称做条件概率，记为 $P(A|B)$。现在对条件概率做如下定义。

定义　设三元总体 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为一个概率空间，$A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{F}$，且 $P(B)>0$，在事件 B 已发生的条件下，事件 A 发生的条件概率为

$$P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.2.2}$$

条件概率 $P(A|B)$ 意味着事件 A 与事件 B 有关。若 $A \cap B=\varnothing$，即事件 A 和 B 互不相交，则 $P(A|B)=0$。

条件概率是一个确定的量。它具有下述性质：

① $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

② $P(\Omega|B)=1$；　　(1.2.3)

③ 若 $A_i \in \mathscr{F}$ $(i=1,2,\cdots)$，且 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B) \tag{1.2.4}$$

2. 乘法公式

由条件概率定义可得

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) \tag{1.2.5}$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) \tag{1.2.6}$$

需要注意，式(1.2.5)与式(1.2.6)同时成立，是在条件 $P(A)>0$，且 $P(B)>0$ 之下而言的。若 $P(A)$ 或 $P(B)$ 的值中有一个为零，则以上两式不能同时成立；若 $P(B)=0$，则只有式(1.2.5)成立，而式(1.2.6)不成立，这是因为 $P(A \mid B)$ 无定义。

上述乘法公式可以推广到 n 个事件的情况。设有 n 个事件 $A_i \in F (i=1,2,\cdots,n)$，且满足 $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \tag{1.2.7}$$

3. 统计独立性

定义 设 A, B 为两个事件，若满足

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{1.2.8}$$

则称 A, B 为统计独立的事件。

上面两个事件独立性的概念可以推广到 n 个事件相互独立的情况。

先推广到三个事件。设 A, B, C 是三个事件，若满足

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C) \tag{1.2.9}$$

和

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \tag{1.2.10}$$

则称 A, B, C 为相互独立的事件。若仅满足式(1.2.9)，则称三个事件 A, B, C 为两两相互独立。

再推广到 n 个事件 $A_i (i=1,2,\cdots,n)$。若对任意 $s(1 \leqslant s \leqslant n)$，及任意 $i_k, k=1,2,\cdots,s$，且 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant n$，有

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_s}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_s}) \tag{1.2.11}$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。

4. 全概率公式

设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 E 的一组事件，若

① $B_i \cap B_k = \varnothing, i \neq k; i, k=1,2,\cdots,n$。

② $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$。

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的一个划分。反之，若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的一个划分，则进行一次试验 E，事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中必有一个且仅有一个事件发生。

设 A 为 E 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的一个划分，则全概率公式为

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i) \tag{1.2.12}$$