

概率论与数理统计 学习指导与题解

○ 黄光谷 陈光大 胡启旭 黄东 编

- 大学生 备考的帮手
- 考研者 成功的阶梯
- 教师们 命题的参考

· 华中科技大学出版社 ·

<http://www.hustp.com>

高等数学好题精编系列

概率论与数理统计 学习指导与题解

黄光谷 陈光大 编
胡启旭 黄 东

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导与题解/黄光谷 等编. —武汉:
华中科技大学出版社, 2007 年 2 月

ISBN 978-7-5609-3953-7

I. 概… I. ①黄… ②陈… ③胡… ④黄… II. ①概
率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参
考资料 IV. O21

中国版本图书馆CIP 数据核字(2007)第 017733 号

概率论与数理统计学习指导与题解

黄光谷 等编

策划编辑:钟小珉

责任编辑:王汉江

封面设计:刘 卉

责任校对:陈 骏

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山

邮编:430074

电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北鄂东印务有限公司

开本:850×1168 1/32

印张:13.875

字数:333 000

版次:2007 年 2 月第 1 版

印次:2007 年 2 月第 1 次印刷

定价:20.80 元

ISBN 978-7-5609-3953-7/O · 408

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 介 绍

本书精选了概率统计课程最常用的四种教材和一本考研辅导书中有代表性的习题和考题,按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(简称“考纲”)“数学一”中概率统计所列顺序和内容编目并作了取舍,共分八章,各章章首列有学习指导,含考纲要求、重点难点和学习注意,以指导读者学习;各节开头列有该节的内容提要,包括主要概念、公式、方法和定理,然后精选了五种书的好题并逐题作了分析或解答.

本书集各家之长,精选各书好题于一书,具有典型性、系统性、资料性和很强的可读性,特别适宜于作为各理科、工科、农林、财经、管理等专业本、专科生学习概率统计课程的参考书,也可作为考研者的优秀复习资料和指南,还可为教师提供考试的命题参考.

前 言

要学好数学,一要深入理解数学概念、定理、公式等基础知识,二是学会解题,并从中掌握方法和培养能力.本书侧重于后者,精选了下列四本常用教材和一本考研辅导书中的好习题或考研题,并作了分析或解答,以作示范.

[1]浙江大学盛骤等编,概率论与数理统计,高等教育出版社,2001年第3版.对应的本书各节第一部分为内容提要,与上述浙大三版记号一致,第二部分简称“浙大习题选解”.各题编号,如1-6,第一个数字1是本书序号,第二个数字6是原教材题号,下同.

[2]王明慈、沈恒范主编,概率论与数理统计,高等教育出版社,1999年6月第1版.对应的本书各节第三部分简称“王、沈习题选解”.

[3]同济大学概率统计教研组编著,概率统计,同济大学出版社,2000年5月第2版.对应的本书各节第四部分简称“同济习题选解”.

[4]工科数学课程教学指导委员会本科组编,工程数学例题与习题(上册)(线性代数·概率论与数理统计),高等教育出版社,1996年5月第1版.对应的本书各节第五部分简称“工数习题选解”.

[5]黄光谷,胡启旭,何晓亚,石先军编,考研数学题典,华中科技大学出版社,2002年6月第1版.对应的本书各节第六部分简称“考研题选解”;其中序号1.1、99、一、(5)、(4')依次表示为该节本段的第1题,“数学一”、1999年试题的第一大题的第(5)小题,本题满分4分,其他类似.

本书按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》

(简称“考纲”)之数学一中概率论与数理统计的考试内容的顺序编目和选题,共分八章.本书各章开始所列的“考纲要求”,系录自“考纲”的“考试要求”部分;考纲尚未考到的方差分析及回归分析等内容,本书暂不选入.列出各章的考纲要求,以便指导读者掌握学习时的分寸、明确学习该章内容要达到的目的和要求,“考纲”与“概率统计课程基本要求”(相当于“教学大纲”)是基本一致的,所以达到了“考纲”的要求,也就达到了教学要求.阅读各章考纲要求时,要注意其中如了解、理解、会、掌握等用词层次的不同.

选入的各节习题,有的题已有详细的分析或提示,则以其代替该题的解答,不重复选解.题后留有[]的是选择题,画有横线 的是填空题.五本书的习题或考题都较好,但本书限于篇幅,只精选了各书约 $1/2$ 的题解合成一书.本书采众家之长,熟读此书,相当于读了五本题解书的精华.

感谢华中科技大学出版社的领导和编辑对本书的指导、支持和细心工作.本书中用到了许多习题、考题和资料,特此向所引用书籍的作者一并表示感谢!

由于作者水平有限,书中难免会有错误和缺点,恳请读者和同行批评指正,以便再版时修改.

编 者

2006年9月

目 录

第一章 概率论的基本概念	(1)
学习指导	(1)
第一节 随机事件 频率与概率	(2)
一、内容提要	(2)
二、浙大习题选解	(5)
三、王、沈习题选解	(7)
四、同济习题选解	(9)
五、工数习题选解	(13)
六、考研题选解	(16)
第二节 古典概率 条件概率 独立性	(20)
一、内容提要	(20)
二、浙大习题选解	(23)
三、王、沈习题选解	(31)
四、同济习题选解	(35)
五、工数习题选解	(42)
六、考研题选解	(45)
第二章 随机变量及其概率分布	(55)
学习指导	(55)
第一节 离散型随机变量及其分布律、分布函数	(56)
一、内容提要	(56)
二、浙大习题选解	(58)
三、王、沈习题选解	(63)
四、同济习题选解	(66)
五、工数习题选解	(68)

六、考研题选解	(72)
第二节 连续型随机变量及其概率密度	
随机变量的函数的分布	(76)
一、内容提要	(76)
二、浙大习题选解	(80)
三、王、沈习题选解	(86)
四、同济习题选解	(89)
五、工数习题选解	(94)
六、考研题选解	(98)
第三章 二维随机变量及其概率分布	(107)
学习指导	(107)
第一节 边缘分布与条件分布	(108)
一、内容提要	(108)
二、浙大习题选解	(111)
三、王、沈习题选解	(118)
四、同济习题选解	(121)
五、工数习题选解	(125)
六、考研题选解	(128)
第二节 独立的随机变量与随机变量函数的分布	(133)
一、内容提要	(133)
二、浙大习题选解	(136)
三、王、沈习题选解	(142)
四、同济习题选解	(146)
五、工数习题选解	(153)
六、考研题选解	(157)
第四章 随机变量的数字特征	(166)
学习指导	(166)
第一节 数学期望与方差	(167)
一、内容提要	(167)

二、浙大习题选解	(169)
三、王、沈习题选解	(177)
四、同济习题选解	(180)
五、工数习题选解	(185)
六、考研题选解	(190)
第二节 协方差、相关系数、矩与协方差矩阵	(210)
一、内容提要	(210)
二、浙大习题选解	(213)
三、王、沈习题选解	(218)
四、同济习题选解	(222)
五、工数习题选解	(228)
六、考研题选解	(232)
第五章 大数定律及中心极限定理	(242)
学习指导	(242)
一、内容提要	(243)
二、浙大习题选解	(245)
三、王、沈习题选解	(250)
四、同济习题选解	(253)
五、工数习题选解	(256)
六、考研题选解	(262)
第六章 数理统计的基本概念	(267)
学习指导	(267)
第一节 数理统计的基本概念	(268)
一、内容提要	(268)
二、浙大习题选解	(273)
三、王、沈习题选解	(277)
四、同济习题选解	(288)
五、工数习题选解	(296)
六、考研题选解	(303)

第七章 参数估计	(307)
学习指导	(307)
第一节 点估计	(308)
一、内容提要	(308)
二、浙大习题选解	(311)
三、王、沈习题选解	(319)
四、同济习题选解	(324)
五、工数习题选解	(330)
六、考研题选解	(334)
第二节 区间估计	(341)
一、内容提要	(341)
二、浙大习题选解	(342)
三、王、沈习题选解	(346)
四、同济习题选解	(349)
五、工数习题选解	(351)
六、考研题选解	(354)
第三节 0-1 分布和单侧区间的区间估计	(357)
一、内容提要	(357)
二、浙大习题选解	(358)
三、王、沈习题选解	(363)
四、同济习题选解	(366)
第八章 假设检验	(368)
学习指导	(368)
第一节 正态总体均值与方差的假设检验	(368)
一、内容提要	(368)
二、浙大习题选解	(370)
三、王、沈习题选解	(380)
四、同济习题选解	(387)
五、工数习题选解	(393)

六、考研题选解	(399)
附录1 近几年全国考研概率统计试题及解答	(401)
附录2 标准正态分布表	(410)
附录3 泊松分布表	(412)
附录4 χ^2 分布表	(414)
附录5 t 分布表	(418)
附录6 F 分布表	(420)
参考文献	(432)

第一章 概率论的基本概念

学习指导

(一) 考纲要求

1. 了解样本空间的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系与运算.

2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率,掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式,以及贝叶斯公式.

3. 理解事件的独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

(二) 重点难点

1. 重点:概率、随机事件、条件概率、古典概型、独立性等基本概念,事件的关系与运算,概率的加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式及它们用于计算的方法.

2. 难点:对立事件与独立事件、互斥(互不相容)事件与互逆(对立)事件的区别,贝叶斯公式(逆概率公式).

(三) 学习注意

1. 计算本章中的概率,用到中学的排列、组合知识较多,要事前复习,特别要分清是排列问题还是组合问题,是加法原理还是乘法原理,以免搞错.

2. 本章中基本概念较多,容易混淆. 因此本章是概率论与数理统计中最易出错、最难解题的一章. 本章中概念的考题较多,多以填空题、选择题形式的少分题出现,基本概念不搞清楚,一念之

差就会失分,因此应予以注意.

3. 事件的关系与运算是基础,它们类似集合的关系与运算,要搞清楚,要善于将概率的应用问题用事件 A_i 和 H_i 等表示出来,再用事件的运算和概率的公式去计算之,这种转换工作很重要,也可称为建立概率模型,是解概率问题的前提和关键,读者应熟悉之.

4. 本章中计算概率的种类较多,容易混淆,可通过阅读例子和做习题,从中总结出规律,归纳出几种常见模型,例如,摸球模型、入盒(分房)模型、几何概型、会面概型、古典概型,等等,以便求解类似概率问题用之.

5. 本章中频率与概率及条件概率的考题较多,读者要熟练掌握下列重要公式的用法.

$$\text{加法公式 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

$$\text{乘法公式 } P(AB) = P(B|A)P(A);$$

全概率公式

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n);$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

第一节 随机事件 频率与概率

一、内容提要

在个别试验中其结果呈现出不确定性,但在大量重复试验中又具有统计规律性的现象,称为随机现象. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

(一) 随机试验

这里的试验包括各种科学试验及对某一事物的某一特征的观察, 要作广泛地理解. 具有下述三个特点的实验称为随机试验:

- ① 可以在相同的条件下重复地进行;
- ② 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
- ③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

(二) 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 记为 S . 样本空间的元素, 即 E 的每个可能结果, 称为样本点, 记为 x 或 e .

样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 试验的目的不一样, 其样本空间也不一样.

(三) 随机事件

试验 E 的样本空间 S 满足某些条件的子集 A 称为 E 的随机事件, 简称事件. 在每次试验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现时, 称这一事件发生.

由一个样本点组成的单点集, 称为基本事件. 样本空间 S 包含所有的样本点, 它是 S 自身的子集, 在每次试验中它总是发生的, 称为必然事件. 空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点, 它也可作为样本空间的子集, 它在每次试验中都不发生, 称为不可能事件.

(四) 事件间的关系与事件的运算

事件是集合, 因而事件间的关系与事件的运算可按照集合论中集合之间的关系与集合的运算来处理, 举例如下.

- (1) 若 $A \subset B$, 称事件 B 包含事件 A , 是指 A 发生必然导致 B 发生. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, 则称事件 A 与 B 相等.
- (2) 和事件 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

称 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 $A_k (k=1, 2, \dots, n)$ 的和事件.

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_k (k=1, 2, \dots)$ 的和事件.

(3) 积事件 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

$\bigcap_{k=1}^n A_k$ 与 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 意义类似.

(4) 差事件 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

(5) 若 $A \cap B = \emptyset$, 称 A 与 B 是互斥事件或互不相容事件, 即 A 与 B 不能同时发生.

(6) 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 称 A 与 B 是互逆事件或对立事件, 记为 $B = \bar{A} = S - A$, 这时的每次试验, A, B 有且仅有一个发生.

事件的运算有交换律、结合律、分配律(略)及对偶律(德·摩根律):

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

(五) 频率

定义 在相同条件下进行 n 次试验, 其中事件 A 发生的次数 n_A 称为 A 发生的频数; 而比值 n_A/n 称为 A 发生的频率, 记为 $f_n(A)$.

频率的性质如下:

(1) $0 \leq f_n(A) \leq 1 (=100\%)$;

(2) $f_n(S) = 1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是两两互不相容的事件, 则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k).$$

当重复试验的次数 n 逐渐增大时, 频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数, 这种“频率稳定性”即统计规律性. 但实际中有时不能做大量试验(如破坏性试验), 这就要引入概率的定义.

(六) 概率

定义 设 S 是随机试验 E 的样本空间, 对于每一事件 $A \subset S$, 赋予实数 $P(A)$, 且集合函数 $P(\cdot)$ 满足条件:

① 非负性 $P(A) \geq 0$;

② 规范性 $P(S) = 1$;

③ 可列可加性

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$

其中 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容事件, 即

$$A_i A_j = \emptyset \quad (i \neq j, \text{ 且 } i, j = 1, 2, \cdots);$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在一定意义下, 频率 $f_n(A) \rightarrow P(A)$.

概率有如下重要性质:

(1) $P(\emptyset) = 0$;

(2) 有限可加性 若 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是两两互不相容事件, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n);$$

(3) 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$, 且

$$P(B - A) = P(B) - P(A);$$

(4) 对任一事件, $P(A) \leq 1 (= P(S))$;

(5) 逆事件的概率 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

(6) 加法公式 对任意两事件, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

推广到三个或 n 个事件, 则有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) \\ &\quad - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n). \end{aligned}$$

二、浙大习题选解

习题一([1]P32)

1-6 在房间里有 10 个人, 分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章, 任选 3 人记录其纪念章的号码. 求: (1) 最小号码为 5 的概率; (2) 最

大号码为5的概率.

解 从10人中任选3人的组合总数为 C_{10}^3 ;其中纪念章最小号码为5,则另两个号码是从6,7,8,9,10中任选2个,共有 C_5^2 种.同理,最大号码为5的有 C_4^2 种.于是由古典概率计算公式,得

(1) 最小号码为5的概率

$$p_1 = C_5^2 / C_{10}^3 = 1/12;$$

(2) 最大号码为5的概率

$$p_2 = C_4^2 / C_{10}^3 = 1/20.$$

2-7 某油漆公司发出17桶油漆,其中白漆10桶、黑漆4桶、红漆3桶,在搬运中所有标签脱落,交货人随意将这些油漆发给顾客.问一个订货为4桶白漆、3桶黑漆和2桶红漆的顾客,能按所定颜色如数得到订货的概率是多少?

解 本题属古典概率中的抽球模型.显然,基本事件总数为 C_{17}^9 ;由乘法原理,该顾客按所定颜色如数得到订货的方式有

$$C_{10}^4 C_4^3 C_3^2 (\text{种});$$

于是所求概率

$$p = C_{10}^4 C_4^3 C_3^2 / C_{17}^9 = 252/2431.$$

3-8 在1500个产品中有400个次品、1100个正品.任取200个,求:(1)恰有90个次品的概率;(2)至少有2个次品的概率.

解 本题为超几何分布的问题,用公式

$$p = C_{400}^k C_{1100}^{200-k} / C_{1500}^{200}$$

算之,其中 k 为取得次品的个数.

(1) 令 $k=90$,于是恰有90个次品的概率

$$p_1 = C_{400}^{90} C_{1100}^{110} / C_{1500}^{200}.$$

(2) 令 $k=0,1$,则至少有2个次品的概率

$$p_2 = 1 - (C_{1100}^{200} + C_{400}^1 C_{1100}^{199}) / C_{1500}^{200}.$$

4-9 从5双不同的鞋子中任取4只,问这4只鞋子中至少有2只配成一双的概率是多少?