华章数学译丛

30

An Introduction to Dynamical Systems

Continuous and Discrete

动力系统导论

(美) R. Clark Robinson 著
西北大学

韩茂安 邢业朋 毕平 译

机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学 译 丛

30

An Introduction to Dynamical Systems

Continuous and Discrete

动力系统导论

(美) R. Clark Robinson 著
西北大学

韩茂安 邢业朋 毕平 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书概括地介绍了动力系统的基础理论知识与基本研究方法. 全书分为两部分：第一部分主要介绍非线性常微分方程组的各个方面，第二部分主要介绍与叠函数有关的内容. 书中每一章的内容均按照“基本概念 + 应用 + 理论与证明 + 练习”的形式组织，有条不紊，十分适合教学使用.

本书既可作为高等院校相关专业常微分方程定性理论与分支或动力系统课程的教材或教学参考书，又可供专门从事动力系统理论研究的学者和工程技术人员参考.

本书版权登记号：图字：01-2005-0526

图书在版编目(CIP)数据

动力系统导论/(美)罗宾逊(Robinson, R. C.)著；韩茂安等译. —北京：机械工业出版社，2007.1

(华章数学译丛)

书名原文：An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete

ISBN 7-111-19999-5

Ⅰ. 动…　Ⅱ. ①罗…　②韩…　Ⅲ. 动力系统(数学)　Ⅳ. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 118484 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)
责任编辑：白红莉　迟振春
北京牛山世兴印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
186mm × 240mm · 37.75 印张
定价：75.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换
本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

动力系统是非线性科学的重要组成部分，研究自然现象随时间演变的极限行为. 经过庞加莱(Poincare)、李雅普诺夫(Lyapunov)、伯克霍夫(Birkhoff)等人的奠基和发展，动力系统已成为现代数学的重要分支之一，由此也产生了很多很好的应用数学(比如混沌控制等).

本书根据美国西北大学数学系教授 R. Clark Robinson 所著的《An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete》一书翻译而成. 翻译工作历时一年多，其中绝大部分内容是按照原文直译的，有个别之处是在原文的基础上根据译者的知识和理解来确定的. 尽管本书是一本数学著作，但书中不仅涉及一些应用模型，而且还含有不少体现作者水平的带有评论性的描述，这些方面自然增加了翻译的难度，译者对这部分内容的理解和翻译可能不完全与作者一致.

本书分两部分介绍动力系统的概念，第一部分讨论非线性常微分方程组有关定性理论和分支的各个方面，第二部分讨论离散动力系统的基本理论. 正像本书“前言”所述，本书假定学生已经学过单变量和多变量微积分、线性代数和微分方程导论的课程，可作为高年级本科生和低年级研究生非线性常微分方程或动力系统课程的教材. 本书在内容处理上十分注重对概念与思路的解释以及定理与方法的运用，并有比较翔实的细节，因此本书非常适合作为理工科硕士研究生常微分方程定性理论与分支或动力系统课程的教材或主要参考书.

本书的第 1、3、5、9、11 章及第 2 章前两节由邢业朋翻译，第 4、8、10、12 章及第 2 章的后三节由毕平翻译，第 6、7、13、14 章及书末的附录由韩茂安翻译，在每位译者翻译并自我审查后，由韩茂安对全书进行了审查和修改. 另外，在翻译和输稿过程中我们还得到了王政教授、博士研究生胡召平和臧红及硕士研究生杨俊敏和赵勇等人的帮助，在此向他们表示感谢. 由于时间仓促和水平有限，翻译难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正.

韩茂安

于 2006 年 9 月

前言

本书可作为高年级本科生非线性常微分方程或动力系统课程的教材，书中部分内容也可在低年级研究生课程中讲授．本书旨在提供计算的范例和方法，同时介绍相关数学概念．无论是介绍动力系统有关应用的概念还是更带理论性的数学引论的课程，主讲教师均可从本书选材．进一步的使用说明可参考下列“组织结构”中的有关说明．

本书假定学生选修过单变量和多变量微积分、线性代数和微分方程导论的课程．多变量微积分中有关偏导数的素材在本书中广泛使用，少数地方还用到多重积分和面积分（见附录 A）．特征值和特征向量是书中用到的线性代数的主要概念，有关线性代数的其他主题请见附录 C．微分方程基础知识只在本书第一部分用到，我们假定学生能用变量分离法解一阶方程，并了解二阶标量方程解的形式．选修过微分方程基础课程的学生通常对常系数线性系统（至少有实特征值的情形）比较熟悉，但本书第 2 章重述了部分材料，其中对相图也进行了介绍．没有选修过微分方程基础课程的学生也能够理解这里介绍的新材料，但需要用额外的努力弥补所缺少的必要背景知识．最后要提到的是，阅读本书并不要求学生学过实分析或高等微积分的课程．然而，使用这些课程中的一些术语会带来方便，为此，我们提供了一个有关连续性和拓扑学术语的附录．

组织结构

本书分两部分介绍动力系统的概念，两部分无先后之分：第一部分讨论非线性常微分方程组的各个方面，第二部分讨论叠函数的相关方面．两部分中任一部分均可用于一学期[⊖]、两学期甚至一学年的课程．在美国西北大学我们开设了两门课程，一门课程用一学期讲授第一部分，另一门课程用两学期讲授第二部分．在一学期的微分方程课程中，很难讲授混沌吸引子，甚至不得不略去各章末尾的许多应用实例和证明．一学期的微分方程也可能从第 9 ~ 11 章选用有关叠函数的题材．在用本书第二部分的离散动力系统课程中，我们用一学期讲授一维叠函数（第 9 ~ 11 章）的大部分材料．有关高维叠函数（第 12 ~ 13 章）的材料当然依赖于一维函数的材料，一学期的课程则可以在讲授第 9 ~ 11 章时融入一些高维函数的例子．最后，第 14 章分形可放在几章之前讲授，分形维可在微分方程课程结束时结合到混沌吸引子的材料中讲授，分形维或叠函数系统的材料可在一维叠函数的课程中讲授．

各章前面几节主要讲解概念，其后一节介绍某些应用，再后面一节是对较难结果的证明和更具理论性的材料．这种节之间的材料划分带有某种随意性．例如，有关竞争种群和捕食与被捕食体系的材料就安排在相关章的前面几节之一中，而不是放在各章末的应用部分，因为这些主题是为展现主要方法服务的．另外，把某些含有较复杂计算和有助于使概念更加清晰的证明放在一些主要节中．对较长且技巧性较强的证明和进一步的理论探讨分别在每一章的结尾

⊖ 这里是指每学年分为四学期制度中的一学期．——编辑注

给出.

对于着重从应用出发来讲授动力系统概念的课程，可从本书主要章节选材，不用各章末尾有关应用和包含更多理论材料的几节.

各章应用部分提供动力系统的诱导因素，并说明概念的用处. 这一节的材料并不是后面主要章节的论述所必需的. 这部分材料越多越能加强应用性.

用本书作为教材，教师可以通过舍弃较繁难的证明界定课程的理论水平. 具有较高理论水准的课程可以考虑采用各章后面的大部分证明.

计算机程序

本书并未明确介绍计算机编程问题. 但是，选用的一些习题需要用计算机模拟产生微分方程的相图或叠函数. Sample Maple 电子表格可从网页 http://www. math. northwestern. edu/ ~ clark/dyn-sys 获得，学生对其加以修改可以用来解决一些其他计算问题(有关本书的订正及更新也可通过该网址查到).

有几本用 Maple 和 Mathematica 来讨论动力系统的书，其中两本是 M. Kulenović [**58**] 和 S. Lynch [**70**]. J. Polking 和 D. Arnold 的书[**85**] 中讨论了用 Matlab 求解微分方程，所用软件包可从 http://www. math. rice. edu/ ~ dfield 获得. H. Nusse 和 J. Yorke 的书[**80**]中有其专门的动力系统软件包.

致谢

我谨对其他几本书的作者深表谢意，我在讲授这一题材时曾用过他们的书，这些书影响了我对题材的理解，特别是在有效地介绍题材方式方面. 我难以一一列出那些同样对我产生影响的更高级的书籍. 关于微分方程部分我用过的参考书有：F. Brauer 和 J. Nohel [**19**], M. Hirsch 和 S. Smale [**51**], M. Braun [**21**], I. Percival 和 D. Richards [**84**], D. W. Jordan 和 P. Smith [**55**], J. Hale 和 H. Koçak [**48**], S. Strogatz [**104**]. 有关叠函数部分我用过的参考书包括：R. Devaney 的两本书 [**31**]和[**32**], D. Gulick[**45**], K. Alligood、T. Sauer 和 J. Yorke [**7**].

还要感谢我读研究生期间指导过我的三位教授：Charles Pugh、Morris Hirsch 和 Stephen Smale，他们把我引领到动力系统这门学科，并教给我许多思想和方法，使我终身受益. 还有我在西北大学的许多同事以不同方式深深影响着我，他们之中有 John Franks、Donald Saari 和 Robert Williams.

下面的审阅人对本书初稿的改进提出了许多宝贵意见和建议，在此我也一并感谢. 他们是：John Alongi（波莫纳学院），Pau Atela(史密斯学院)，Peter Bates(伯明翰扬大学)，Philip Bayly(华盛顿大学)，Roman Grigoriev(佐治亚理工学院)，Michael Brin(马里兰大学)，Palle Jorgensen(艾奥瓦大学)，Randall Pyke(雷尔森大学)，Joel Robbin(威斯康星大学)，Bjorn Sandstede(俄亥俄州立大学)，Douglas Shafer(北卡罗来纳大学夏洛特分校)，Milena Stanislavova(堪萨斯大学)，Franz Tanner(密歇根理工大学)，Howard Weiss(宾夕法尼亚州立大学).

我还要感谢组稿编辑 George Lobell 对这个项目的鼓励，制作编辑 Lynn Savino Wendel 为改进表达的清晰性所提出的建议，Adam Lewenberg 对准备付印的最后电子文档给予的帮助，Julio Ottino 为本书提供封面照片，Miguel Lerma 对解决 LaTex 和图形的各种问题提供的帮助，以及 Marian Gidea 对使用 Adobe Illustrator 和 Kamlesh Parwani 对使用 Maple 电子表格所给予的帮助.

特别要感谢我的妻子 Peggie，她始终如一的宽容、耐心、理解和祝愿，使得本书最终得以完成.

R. Clark Robinson

clark@ math. northwestern. edu

目　录

第二部分 叠函数

历史回顾

微分方程理论历史悠久，可以追溯到大科学家牛顿(Isaac Newton). 古希腊人及后来的哥白尼(Copernicus)、开普勒(Kepler)、伽利略(Galileo)等已经运用运动特性来直接描述行星的运动，比如行星的运动轨道近似为椭圆(或是多个具有不同周期和振幅的环路的组合). 而牛顿另辟蹊径，用作用于行星上的力来描述决定行星运动的力学定律，这些力所产生的效果可以用微分方程来表述. 牛顿发现的基本定律就是，行星运动是由物体间的万有引力决定的，这个力与两物体质量的乘积成正比，与两物体间距离的平方成反比. 用牛顿万有引力定律可以证明，绕太阳运行的行星沿椭圆运动，而其他行星对它的万有引力会使该行星的运动轨迹发生偏移，这正好解释了行星的运动轨迹不是一个标准的椭圆. 在这方面有研究的后继人有欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)、拉普拉斯(Laplace)、勒让德(Legendre)、泊松(Poisson)、哈密顿(Hamilton)、雅可比(Jacobi)、刘维尔(Liouville)等.

到19世纪末，人们认识到很多非线性微分方程根本没有显式解(explicit solutions)，即便是遵守牛顿万有引力定律的三体运动也有非常复杂的性态，从而无法得到其显式解(例如太阳、地球、月亮的运动轨迹就无法用已知的函数来表示). 虽然短期解(short term solution)可以用幂级数来给出，但这一办法对于长期解(long-term solution)将不再适用. 为解决这一问题，庞加莱(Poincaré)在1880年至1910年期间，把研究工作的重心从寻找显式解转移到探讨解的几何性质上来. 他通过一些具体的例子阐述了自己的许多思想，这些思想成为当今混沌动力系统学科的开端. 特别需要指出的是，庞加莱意识到一个确定性系统(deterministic system)(即该系统所受外力是不改变的，也不是随机的)可以明显地出现随机性态(即混沌).

在1898年，阿达马(Hadamard)给出一个例子，表明曲率恒负的曲面的测地线具有混沌性质. 接下来，伯克霍夫(G. D. Birkhoff)继续庞加莱的工作并发现了很多不同类型的长期极限行为，其中包括本书5.4节和11.1节所阐述的α极限集和ω极限集. 他的工作总结在书《Dynamical Systems》[**16**]中，而动力系统(Dynamical system)一词则源于此书.

20世纪的上半叶涌现出大量有关非线性振子的研究工作，所谓非线性振子是模拟一组弹力(或其他诸如电力等物理力)的一个方程组，其中恢复力非线性地依赖于离开平衡点的位移. 李雅普诺夫(Lyapunov)等人研究了平衡点的稳定性(参见4.4节和5.3节)；范德波尔(Van der Pol)发现了某些自激系统存在周期轨道(参见6.3节)；安德罗诺夫(Andronov)和庞特里亚金(Pontryagin)证明了微分方程系统在一个吸引平衡点附近是结构稳定的[**8**](即对该微分方程做一个小扰动前后的解是等价的). 此外，包括本迪克松(Bendixson)、Cartwright、Bogoliubov、Krylov、Littlewood、Levinson和Lefschetz在内的一些人开展了非线性微分方程的研究. 所能进行分析研究的解的类型不外乎下面三种：(1)平衡态(静止不动)；(2)周期运动(例如行星运动的首次近似)；(3)拟周期解——它可表示为频率不可公度的几个周期项的组合(参见2.2.3节). 1950年前后，Cartwright、Littlewood和Levinson给出了一个有无穷多个不同周期的受迫非

线性振子模型——考虑这个微分方程系统的初值解，可发现无穷多个不同的初始条件，而由每个初始条件出发将得到一个周期恰好为强迫力频率某一倍数的周期运动，并且不同的初始条件导致不同的周期．这个例子的一些复杂性是以前从未见过的．

在20世纪60年代，斯梅尔(Stephen Smale)转而利用庞加莱首创的思想——从拓扑和几何的角度——来重新审视微分方程的性质，并在1967年发表了一篇影响深远的综述性论文[**98**]．尤其是他所提出的斯梅尔“马蹄”不但把Cartwright、Littlewood和Levinson等人的结果统一到了一个具有一般性的理论框架里，而且推广了这些结果，他还证明了这些结果都是后来所说的混沌现象．之后，一批美国和欧洲的数学家的工作进一步充实了斯梅尔的思想体系，与此同时，在莫斯科一批以阿诺索夫(Anosov)和Sinai为首的数学家也在考虑类似的问题，其中阿诺索夫把阿达马的工作推广到具有负变曲率的流形上之测地线．在1975年，“混沌”(chaos)一词首次由T. Y. Li和J. Yorke提出，并用来刻画比不动点、周期运动、拟周期运动更为复杂的非周期(aperiodic)性态(见[**66**])．一个与“混沌”密切相关的概念——*奇怪吸引子*由Ruelle和Takens引入，与其复杂的运动本质相比，这一概念更强调吸引子在相空间中复杂的拓扑和几何结构[**90**]．这些数学家的理论工作提供了许多思想和方法，并在后来广泛应用于物理学、天体力学、化学、生物学等一些实用性更强的研究领域．

其实，这些思想在物理系统中的运用从未停止过，对行星和恒星的运动的描述和确定这一研究历史悠久的问题就是其中一例．通过数学模型来研究这类运动就称为*天体力学*，这涉及有限个遵守牛顿万有引力的星体．伯克霍夫(Birkhoff)、Siegel、Kolmogorov、Arnold、Moser、Herman等许多人研究了稳定性问题，并发现了出现于天体力学及其他物理系统的复杂行为，其中有些可以用所谓的*哈密顿微分方程*来描述(这类方程能量守恒且可以用能量函数的偏导数来表示)．K. Sitnikov在[**97**]中给出了三个物体在牛顿引力下相互作用而出现混沌震荡的现象，后来，Alekseev指出上述现象可用“斯梅尔马蹄”来解释[**3～5**]，Moser的书[**78**]大大简化了这一结果，并深化了“斯梅尔马蹄”在更多物理系统中的应用．在发表于1971年、引入奇怪吸引子概念的文献[**90**]中，Ruelle和Takens给出了用于解释流体中湍流是如何形成的非线性动力系统的思想和方法．接下来，P. Coullet和C. Tresser在文献[**29**]、Feigenbaum在文献[**37**]中分别发现通向混沌的倍周期路径，进一步显示出非线性动力系统和物理学的密切联系．

此外，相关于一个全新的物理系统，以Belousov和Zhabotinsky在20世纪50年代的工作为
2 起点，相继产生一些出现混沌行为的化学反应数学模型，这些模型的解既不趋向于平衡状态，也不出现可预测的振动现象，最终这种古怪情形被理解为混沌和奇怪吸引子．

在20世纪20年代早期，A. J. Lotka[**69**]和V. Volterra[**111**]各自独立地用微分方程建立了反映两个物种数量相互作用的数学模型；到了20世纪70年代早期，May向我们展示了人口动力系统模型是如何产生混沌的，他又在专著[**75**]中阐述了一个简单的非线性数学模型是如何为大量的现象提供数学诠释的．从20世纪70年代开始，非线性动力学在生物数学模型中的应用便日益广泛；由Murray[**79**]和Taubes[**106**]各自编写的大学教材是研究涉及振动或混沌微分方程的一些生物学领域的入门书，而Kaplan和Glass的书[**56**]及Strogatz的著作[**104**]则包括了大量其他方面的应用．

大大影响非线性微分方程的研究的另一个因素是使用计算机来寻找数值解，为了开展这一研究而设计的有效算法当然也层出不穷．尽管书中讨论了一些最简单的算例，但我们更着重于利用计算机模拟来发现解的性质．1963 年 E. Lorenz 用一台计算机研究模拟大气湍流运动的非线性方程，做出了重要的贡献，他发现初始条件的细微变化可以在相对短的时间里导致非常不同的后果，这一性质被称为是*对初始条件的敏感依赖性*，或者是更常说的“*蝴蝶效应*”．后一种叫法源于洛伦兹(E. Lorenz)，他把这一现象形象地解释为澳大利亚的一只蝴蝶拍动一下翅膀就会在一个月后影响到美国的天气．我们在本书第 7 章介绍了他的工作．直到 20 世纪 70 年代洛伦兹的工作才被更注重理论的数学界所熟知，从此数学界就致力于证明洛伦兹关于此类方程的基本思想的正确性．最近，借助于计算机辅助手段，Warwick Tucker 已经证明洛伦兹系统不仅具有对初始条件的敏感依赖性，而且还具有所谓的“混沌吸引子”(详见第 7 章)．几乎与洛伦兹同时，Ueda 发现了范德波尔(Van der Pol)周期受迫系统(或其他非线性振子)具有现在所说的混沌吸引子，此类系统也将在第 7 章加以讨论(或参阅 Ueda 后来出版的著作[**109**])．

大约从 1970 年开始且仍在延续，借助计算机来研究非线性动力系统已经有很多数值研究成果，其中一部分在本书中作为解释某些现象的简单例子加以介绍(例如 7.4 节中关于 Rössler 吸引子的讨论)，另外一部分是自然科学、工程及其他可用非线性微分方程建模的领域中的一些特殊模型．Enns 和 McGuire 在书[**36**]中介绍了许多计算机程序，这些程序可用来研究出现于物理及其他自然科学学科中的非线性函数和非线性微分方程．

总之，20 世纪的后 40 年见证了非线性方法在解决物理问题方面的日益增长的重要性．如今人们通过有关数学理论及其应用方式对一个世纪前由庞加莱提出的许多思想有了更深入的认识．现代动力系统理论在其应用领域最重要的一个贡献在于它揭示了一个简单的模型可以具有复杂古怪的动力学性态，正因为产生了混沌，基本的环境未必含有随机扰动因素．

以下三本书是介绍混沌学发展历程的大众化读物：James Gleick 写的《Chaos：Making a New Science》[**40**]、Ian Stewart 的《Does God Play Dice?，The Mathematics of Chaos》[**102**]以及 Florin Diacu、Philip Holmes 合著的《Celestial Encounters》[**33**]．第一本书最畅销，该书着重于把研究人员的成果与实际应用结合起来，而 Stewart 的书更强调数学家在混沌学发展中的作用，其视 3
角与这本书更为密切．Gleick 的书易于被较多的读者所接受而更加流行，Diacu 和 Holmes 的书《Celestial Encounters》描述了庞加莱的贡献和时至今日的天体力学的发展，其处理别具一格，
恰到好处． 4

第一部分　非线性微分方程组

第1章　解微分方程的几何方法

在初等微分方程的基础课程中，讨论的重点是线性微分方程．例如，考虑带摩擦的线性调和振子(或有阻尼调和振子)：

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0,$$

其中$\dot{x}$表示$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\ddot{x}$表示$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，$m$，$k>0$，$b\geqslant0$．若令$v=\dot{x}$，则$m\dot{v}=m\ddot{x}=-kx-bv$，该方程可改写为只含有一阶导数的方程组：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=v\\ \dot{v}&=-\frac{k}{m}x-\frac{b}{m}v.\end{aligned}\tag{1.0.1}$$

用矩阵形式表示，即

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\ -\dfrac{k}{m}&-\dfrac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix}.$$

当$b=0$时，该方程组的一个显式解为

$$\begin{aligned}x(t)&=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\\ v(t)&=-\omega A\sin(\omega t)+\omega B\cos(\omega t),\end{aligned}$$

其中$\omega=\sqrt{k/m}$，A，B为任意常数，这些解都是以$2\pi/\omega$为周期的周期解．见图1.0.1.

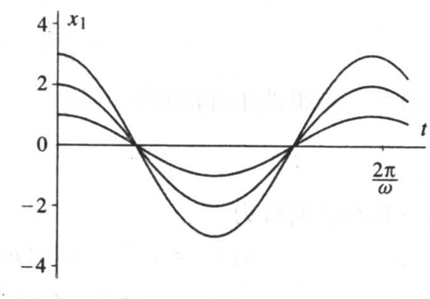

图1.0.1　线性调和振子的解：x看作t的函数

理解$b=0$时方程的解的另一方法是寻求这个方程组所守恒的能量．若方程$\dot{v}+\omega^2x=0$两边同乘以v，则有

$$v\dot{v}+\omega^2x\dot{x}=0.$$

方程左端恰为函数

$$E(x,v)=\frac{1}{2}v^2+\frac{\omega^2}{2}x^2,$$

关于t的导数，因此函数$E(x,v)$沿方程的解恒等于常数．该运动的积分(integral of motion)清楚地表明方程的解在由E的水平集确定的(x,v)平面的椭圆上运动．$(x,v)=(0,0)$是一个不

动点或平衡点，其他解在绕原点的椭圆形轨道上周期性地运动．对这个线性方程而言，所有的轨道形状相同，周期相同（与轨道的大小无关）：我们称它的局部行为和全局行为是一致的．见图 1.0.2.

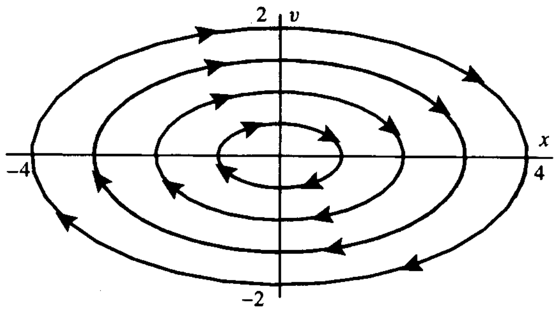

图 1.0.2 $(x,\ v)$ 平面上线性调和振子的解

为方便今后表述，称点 $\boldsymbol{x}^*$ 为微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的不动点当且仅当 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0}$. 始于一个不动点的解有零速度，所以它保持不动．因此，若 $\boldsymbol{x}(t)$ 是满足条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^*$ 的解，则对所有的 t，$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^*$ 恒成立．这种所受外力为平衡力且保持不动的点在习惯上称为平衡点．

设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^*$ 的解，若存在 $T>0$ 使得 $\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{x}^*$ 且 $\boldsymbol{x}(t)\neq\boldsymbol{x}^*$，$0<t<T$，则称点 $\boldsymbol{x}^*$ 关于系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 是周期的，T 称为周期或最小周期．显然对任意 t，$\boldsymbol{x}(t+T)=\boldsymbol{x}(t)$ 成立（即经过 T 单位的时间后 $x(t)$ 将自动重复）．点集 $\{\boldsymbol{x}(t):\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 称为周期轨道．

由微分方程组的解所决定的 $(x,\ v)$ 平面上的曲线集是相图的一个例子，相图的使用贯穿于全书；相图可帮助我们从图像（或几何）的角度来理解微分方程的解．特别地，对于非线性方程和无法得到解析解的方程而言，利用解的图像这一点非常重要．除了前面讲的使用能量函数来确定非线性方程的相图外，有时我们还利用其他几何方法，例如在 4.3 节介绍的零等倾线

8 法．此外，也用数值方法来画相图．

下面我们考虑 $b>0$ 时的情形，令

$$c=\frac{b}{m},\quad \omega^2=\frac{k}{m},\quad \mu=\sqrt{\omega^2-\frac{c^2}{4}},$$

则该微分方程组的矩阵的特征值是

$$\lambda=-\frac{c}{2}\pm \mathrm{i}\mu,$$

从而方程组的通解为

$$\begin{aligned} x(t)&=\mathrm{e}^{-ct/2}\left[A\cos(\mu t)+B\sin(\mu t)\right]\\ v(t)&=\mathrm{e}^{-ct/2}\left[-\left(A\mu+\frac{Bc}{2}\right)\sin(\mu t)+\left(B\mu-\frac{Ac}{2}\right)\cos(\mu t)\right].\end{aligned}$$

在这种情形下了解解的性质的另一种方法是用“能量函数”

$$E(x,v)=\frac{1}{2}v^2+\frac{\omega^2}{2}x^2,$$

这个函数在 $b=0$ 时是守恒的．若 $b>0$，则 $c>0$，从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(x,v)=v\dot{v}+\omega^2x\dot{x}=v(-cv-\omega^2x)+\omega^2xv=-cv^2\leqslant 0.$$

这表明该系统的能量是不增加的，利用李雅普诺夫函数一节中的简单讨论可知，系统的所有解都趋向位于坐标原点的不动点．此处实值函数 $E(x,v)$ 的使用更多地是从几何角度来证明原点是吸引的(attracting)．

方程组(1.0.1)是线性的，而我们考虑的大部分方程都是非线性的．单摆

$$mL\ddot{\theta}=-mg\sin(\theta)$$

就是一个简单的非线性方程的例子，若令 $x=\theta$，$v=\dot{\theta}$，则得到方程组

$$\dot{x}=v$$

$$\dot{v}=-\frac{g}{L}\sin(x).$$

对此非线性微分方程组，很难求出其显式解．而我们可以用刚才使用过的“能量法”来探寻其解的性质．做类似于前面的求导运算，我们发现函数

$$E(x,v)=\frac{v^2}{2}+\left(1-\frac{g}{L}\cos(x)\right)$$

沿着方程组的解是一个常数．就像对线性情形的讨论一样，可知方程组的解在函数 E 的等位线上运动，因此，这些等位线的集合决定了解的运动路径．我们不加证明地在图 1.0.3 中给出了等位线集的图像，在 5.2 节中我们还会返回来更详细地讨论这个例子．见例 5.2.3.

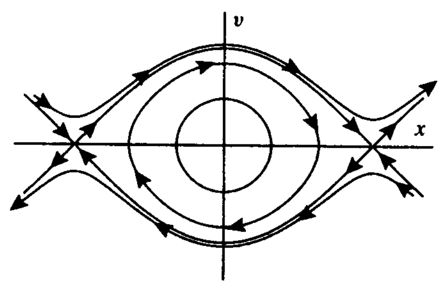

图 1.0.3　单摆的能量等位线集合

方程组有三个不动点 $(x,v)=(0,0)$，$(\pm\pi,0)$，原点附近的解是周期的，但远离原点的解或者关于 x 单调增加，或者关于 x 单调减小(即非周期的)．我们可以利用相平面(即 (x,v) 平面)中的等位线和轨线来获得解的信息． 9

如此简单的非线性方程就演示出线性方程与非线性方程之间的一些差别．首先，对于 $b=0$ 时的线性调和振子来说，不动点附近的局部行为决定了它所有解的行为；而对于单摆而言，在原点附近有周期轨道，在远离原点的地方也同时存在非周期轨道．其次，线性系统若有周期轨道，则它们的周期必相同；而单摆轨道的周期可以不同，图 1.0.4 给出了它的三个周期解的时距曲线图，依图可知，周期是随振幅而变化的．最后，在 2.2 节我们给出了求线性微分方程组显式解的方法；另一方面，我们不能用一个简单方法来解单摆方程，能量法只是给出解的几何信息，而不能给出显式解．

我们还讨论其他典型例子，研究既是竞争关系又是捕食与被捕食关系的两个物种的数量变化的模型就是其中之一，此外还有范德波尔振子，它有唯一的周期轨道，且其他解都趋于这个