姚文武 著

思路·方法·辅助线

——平面几何学习指导

山东教育出版社

平面几何学习指导

思路·方法·辅助线

姚文武　著

山东教育出版社

平面几何学习指导

思路·方法·辅助线

姚文武 著

出版者：山东教育出版社
（济南市纬一路321号 邮编：250001）
电 话：（0531）82092663 传真：（0531）82092661
网 址：http://www.sjs.com.cn
发行者：山东教育出版社
印 刷：山东新华印刷厂临沂厂
版 次：2006年12月第1版
2006年12月第1次印刷
印 数：1—3000
规 格：787mm×1092mm 32开本
印 张：5.375印张
字 数：130千字
书 号：ISBN 7-5328-5584-8
定 价：8.00元

图书在版编目(CIP)数据

思路·方法·辅助线/姚文武著.—济南:山东教育出版社.2006.12
ISBN 7-5328-5584-8

Ⅰ.思... Ⅱ.姚... Ⅲ.平面几何 Ⅳ.0123.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第157674号

引　言

理解掌握几何的基本概念和基础知识，是深入学习几何内容的根本保证，也是对中学生学习数学课程的起码要求．

通过练习，中学生应该并且能够做到：针对问题的结构，善于观察（条件的类型、结论的形式、图形的特征、数字及关系式的特点），善于联想（由“已知”想“可知”，由“欲证”想“须证”，由条件与结论联想相关的知识点和经验），善于逆推分析、代换转化，由表及里揭示隐含条件．这是探索解题思路、寻求解题方法、合理添加辅助线并利用辅助线辅助解题的一般规律．

为熟练掌握并灵活运用所学知识，系统练习必不可少，但漫无边际的“题海战术”不可取，要讲究解题的收获和效益．一个问题解决之后，须反思用过的方法及思路，考虑能否一题多解，同时回顾以前曾经做过的练习，从中悟出具有普遍性的规律，并在其后的练习中予以应用、检验和完善，通过比较和归纳，不断积累经验，全面提高分析问题、解决问题的能力．

自学是获取知识的重要途径，它能够帮助学生养成独立思考、深入钻研的良好习惯，在问题探究过程中培养学习兴趣，激发求知欲望，感受成功后的惬意和自信．这种自信，对于中学生今后的深造大有裨益．

说　明

一、解答平面几何问题，要特别注意剖析问题中隐含的知识脉络，理清解题思路，找出解题方法，合理绘制辅助线．“思路——方法——辅助线”是平面几何中特有的问题解决模式．

二、本书共分七章，各章均为课堂教学内容的提炼与延伸，适于中学生随教学进程同步参阅．

三、每章均包含“思路·方法·辅助线”、“解题范例”、“练习题”和“答案或提示”四部分：

1. 在“思路·方法·辅助线”中，针对不同类型的问题和条件，应该如何思考、如何应用、如何构作辅助线及相关的数学方法，分类予以说明与概括；

2. 在“解题范例”中，编排了类型各异的例题，每道例题在“解法”之外又给出“思路”和“注”，“思路”具体指导分析的方法与过程，“注”则归纳相应的规律、技巧以及应该注意的要点；

3. “练习题”按不同程度和要求分为 A、B 两组，另有少量的思考题供课外选作；

4. “答案或提示”则给出习题的结果或解法提示，并对部分习题给出一题多解及相应方法．

四、“复习题”综合各章内容，供复习全书知识时练习，对相关数学知识的理解、应用及综合能力进行自测．

五、书末附录两篇文章：《中学数学选择题的常用解法》和《中学数学选择题其它类型简介》，具体说明选择题的结构、特点及解法，供中学生参阅．

六、本书亦可供平面几何相关内容教学参考．书中不当之处，敬请读者批评指正．

姚 文 武

2006 年 6 月

目　　录

引　言
第一章　线段、角 …… (1)
思路·方法·辅助线 …… (1)
解题范例 …… (2)
练习题 …… (3)
答案或提示 …… (5)
第二章　相交线、平行线 …… (6)
思路·方法·辅助线 …… (6)
解题范例 …… (8)
练习题 …… (10)
答案或提示 …… (12)
第三章　三角形 …… (13)
思路·方法·辅助线 …… (13)
解题范例 …… (18)
练习题 …… (26)
答案或提示 …… (29)
第四章　四边形 …… (32)
思路·方法·辅助线 …… (32)
解题范例 …… (36)
练习题 …… (42)
答案或提示 …… (46)

第五章　相似形 ………………………………………… (49)
思路·方法·辅助线……………………………………… (49)
解题范例……………………………………………… (54)
练习题………………………………………………… (61)
答案或提示…………………………………………… (65)
第六章　解直角三角形 ……………………………… (68)
思路·方法·辅助线……………………………………… (68)
解题范例……………………………………………… (70)
练习题………………………………………………… (77)
答案或提示…………………………………………… (80)
第七章　圆 ………………………………………………… (82)
思路·方法·辅助线……………………………………… (82)
解题范例……………………………………………… (89)
练习题 ……………………………………………… (104)
答案或提示 ………………………………………… (114)
复习题 ………………………………………………… (118)
答案或提示 ………………………………………… (133)

附　录
附录1:中学数学选择题的常用解法 ………………… (144)
附录2:中学数学选择题其它类型简介 ……………… (156)

第一章　线段、角

思路·方法·辅助线

"线段、角"是平面几何的基础，包括线段与角的概念和表示，以及它们的分类和度量．学习这部分内容，尚谈不到辅助线问题，但必须牢固掌握基础知识，并逐步培养使用严谨的数学逻辑语言的能力，为今后更深入地学习数学知识做准备．

1．基础知识

（1）点、线、面、体．点只有位置而无大小；线只有长短（直线与射线无限长）而无粗细；平面图形只有形状差异而无厚薄；体则有长、宽、高．

（2）直线、射线、线段及其表示法；线段的端点、中点，线段的延长线及反向延长线；线段的长及其度量、加减与截取．

（3）角及其表示法；角的始边与终边，内部与外部；锐角、直角、钝角、平角、周角；余角、补角、互余、互补、互为邻补角；角的度量、加减及画法．

2．作图工具

（1）直尺（无刻度），可以过两个点连一条直线或过一个点任作直线，但不能度量线段的长度．

（2）刻度尺，具有直尺的一切用途，还可以在直线、射线或线段上量取一段具体的长度．

（3）圆规，可在直线上截取若干条等长的线段，或量取某条线段的若干倍；又可以定点为圆心、定长为半径画圆或圆弧．

（4）量角器（亦称半圆仪），可度量某个角的度数，或作已知度数的某个角．

(5)三角板(一副共两只),可当刻度尺使用;可画 $30°$、$45°$、$60°$与 $90°$角,以及由这些角的倍数或和差构成的角;又可两只并用(或与直尺并用)画平行线(详见第二章).

解 题 范 例

例 1 如图 1-1,已知线段 AB 长 40mm,C 是 AB 的中点,延长 AB 到 D 点,使 $CD=3CB$;E 点在线段 AB 的反向延长线上且 $BD=2EA$. 求线段 ED 的中点 M 到 C 点的距离.

思路:先求相关线段之长,再求线段之和差.

解:$\because AB=40$ 且 C 为中点,

$\therefore AC=CB=20.$

又 $CD=3CB$,

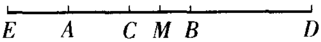


图 1-1

$\therefore BD=CD-CB=2CB=40, EA=20.$

$\therefore ED=EA+AB+BD=20+40+40=100, EM=50.$

故 $CM=EM-EC=EM-(EA+AC)=50-(20+20)=10$(mm).

答:CM 之长为 10mm.

注:解这类问题,要明确线段的中点、线段的延长线与反向延长线的概念,以及线段的和差倍分的关系.

例 2 已知角 α 的补角是 α 的 5 倍,角 β 与 1 直角、1 平角、1 周角的总和等于 β 的余角的 8 倍,角 γ 的补角比 γ 的余角的 3 倍少 $10°$,试比较 α、β、γ 三个角的大小.

解:据题意,可得

$$\begin{cases}180°-\alpha=5\alpha,\\ \beta+90°+180°+360°=8(90°-\beta),\\ 180°-\gamma=3(90°-\gamma)-10°\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=30°,\\ \beta=10°,\\ \gamma=40°.\end{cases}$$

$\therefore$ 三角的大小关系是 $\beta<\alpha<\gamma$.

注:明确角的分类及余、补关系,借助方程求解较为方便.

练　习　题

A　组

1. 判断题

(1) M 是直线 AB 的中点．（　　）

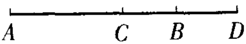
(2) N 是射线 AB 的中点．（　　）

(3) P 是 $\angle AOB$ 的 OA 边的延长线上一点．（　　）

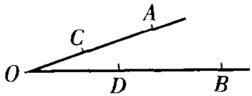
(4) Q 是 $\angle AOB$ 的 OB 边的反向延长线上一点．（　　）

(5) T 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点．（　　）

(6) 如图，比较两条线段的长短：$\because AC > BD$，$\therefore AB > CD$.（　　）



第 1(6) 题图



第 1(7) 题图

(7) 如图，比较两个角的大小：

$\because OA > OC, OB > OD$，$\therefore \angle AOB > \angle COD$.（　　）

(8) $0.5° = 50'$.（　　）

2. 填空题

(1) 锐角 α 的余角等于______，是______角；α 的补角等于______，是______角．

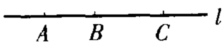
(2) 直角的余角等于______，补角等于______．

(3) 钝角 β 的余角______；β 的补角等于______，是______角．

(4) 18 分 = ______秒 = ______度．

(5) 54 秒 = ______分 = ______度．

(6) $1°45'30''$ = ______度 = ______分 = ______秒．



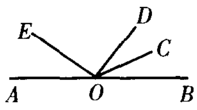
第 3 题图

3. A、B、C 是直线 l 上的三个点．

(1) 图中共有几条线段？各怎样表示？

(2)图中共有几条射线?

4. O 是直线 AB 上的一点,图中共有几个不大于平角的角?分别用三个大写字母把它们表示出来.



第 4 题图

B 组

1. 计算下列各题:

(1)某角的补角比直角大 20°,求此角的余角.

(2)某角的余角是平角的$\frac{2}{5}$,求此角的补角.

(3)某角的余角与补角之和等于此角的 4 倍,求此角.

(4)某角的余角与补角之比为 2 : 5,求此角.

(5)已知 2α 与 β 互余,3α 与 $4\beta-5°$互补,求角 α、β.

(6)某角的 5 倍减去一个周角,等于此角的余角,求此角与其补角的度数之比.

2. 直线 MN 与 PQ 相交于 O 点,$\angle MOP$、$\angle PON$ 的平分线分别是 OA、OB,C、D 分别是 OA、OB 的反向延长线上的点.

(1)按上述条件画出图形;

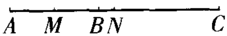
(2)求$\angle COD$ 的度数;

(3)求$\angle MOA+\angle BON$ 的度数;

(4)指出$\angle POB$ 的余角、邻补角.

思 考 题

1. 如图,B 是线段 AC 上的任意一点,M 是线段 AB 的中点,N 是线段 AC 的中点.求证:$BC=2MN$.



第 1 题图

2. 平面上有三条射线 OA、OB、OC,三个角$\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COA$

中的任意两角之和均大于第三角，$\angle BOC$ 的补角与 $\angle COA$ 的余角之和等于 $\angle AOB$ 的补角的三分之二.

(1)求 $\angle AOB$ 的度数;

(2)若 $\angle BOC$、$\angle COA$ 的度数均为整数,求此两角度数的范围.

答案或提示

A 组

1. (1)×. (2)×. (3)×. (4)√. (5)√. (6)√. (7)×. (8)×.

2. (1)$90°-\alpha$,锐角;$180°-\alpha$,钝角.　(2)0°, 90°.

(3)不存在;$180°-\beta$,锐角.　(4)1080, 0.3.

(5)0.9, 0.015.　(6)$1\frac{91}{120}$, 105.5, 6330.

3. (1)3 条. 线段 AB,BC,AC.

(2)6 条. 分别以 A、B、C 为端点,表示略.

4. 10 个(不大于即小于或等于). 表示略.

B 组

1. (1)20°. (2)162°. (3)45°. (4)30°. (5)$\alpha=35°$, $\beta=20°$. (6)5 : 7.

2. (2)90°. (3)90°.

思 考 题

1. 设 $AB=a$,$BC=b$,计算线段 MN 之长.

2. 三角之和为 360°,每个角均小于 180°.

(1)126°;　(2)$144°\leqslant\angle BOC\leqslant179°$, $55°\leqslant\angle COA\leqslant90°$.

第二章　相交线、平行线

思路·方法·辅助线

1. 几个术语

(1)**定义**:说明或描述概念(如对顶角、平行线、方程等)的语句,即揭示概念内涵的逻辑方法.

(2)**命题**:判断一个事物或问题的因果关系的语句.(这个判断不一定正确,即命题有真假之分)

(3)**定理**:经过推理证明为正确的命题,升格为定理.(定理可作为推理论证的依据)

(4)**公理**:经过长期实践总结的、不加证明而采用的真命题.(公理可作为推理论证的依据)

(5)**推论**:由定理或公理直接推出的真命题.(推论可作为推理论证的依据)

(6)**公式**:用字母、常数及特定符号描述定理或规律的(即表示几个相关量之间的数量关系的)数学表达式.

2. 证明两条直线互相垂直的方法

(1)根据垂线定义,证明两直线相交得直角.

(2)相邻两角如果互余,则此两角除公共边以外的另两条边互相垂直.

(3)邻补角的平分线互相垂直.

(4)直线外一点与直线上任一点相连,所得线段中最短的一条,是此直线的垂线.

(5)由其它直线介绍(设 a,b,l,m,n 为同一平面内的直线):

①若 $a /\!/ l$ 且 $b \perp l$,则 $a \perp b$;

②若 $a // m$、$b // n$ 且 $m \perp n$，则 $a \perp b$.

3. 证明两条直线互相平行的方法

(1)利用相关角(同位角、内错角、同旁内角)的关系.

(2)由其它直线介绍(设 a,b,l,m,n 为同一平面内的直线):

①若 $a // l$ 且 $b // l$，则 $a // b$;

②若 $a \perp l$ 且 $b \perp l$，则 $a // b$;

③若 $a // m$、$b // n$ 且 $m // n$，则 $a // b$;

④若 $a \perp m$、$b \perp n$ 且 $m // n$，则 $a // b$.

注:*以上是证明两条直线互相垂直或互相平行的最基本的方法,随着学习的进一步深入,本书将逐步给出其它重要方法.*

4. **"逆推分析"**—— 一种重要且常用的思维方法

一道证明题,其实质就是证明一个命题成立. 所谓"逆推",就是"**倒果为因**",将原题的因果关系颠倒过来,假设原题求证的结论成立,并把这个结论当作另一个新命题的条件,逐步推理,最后得到一个新结论,而这个新结论恰好是原题的条件或符合某条定理;如果上述推理过程的每一个步骤均**可逆**(即可以互相逆推),则原题的证明即告完成.

例如,原题是"已知有 A,求证有 D",在探索解题思路时,暂假设结论 D 已经成立,并以 D 为条件,分析能得到什么新结论;再以此新结论为条件,考虑又能得到什么新结论……结果发现:若有条件 D,则有结论 C;若有条件 C,则有结论 B;若有条件 B,则有结论 A 或符合某条与 A 有关的定理. 当上述推导过程均可逆时,则可将上述步骤逆转过来,得到原题的证明过程:$\because$ 有 A(或与 A 有关的某定理),$\therefore$ 得 B. $\because$ 有 B,$\therefore$ 得 C. $\because$ 有 C,$\therefore$ 得 D. 原题的证明过程到此结束.

逆推分析也可这样表述:欲证 D,须先证 C;欲证 C,须先证 B;欲证 B,须先有 A(已知条件及相关定理).

这种逆推的思维方法——"**执果索因**",对于分析问题的因果关系、探索解题思路,是大有裨益的.

解 题 范 例

例 1 证明：平行线外错角相等.

已知：直线 $AB /\!/ CD$，分别交直线 EF 于点 G、H（图 2－1）.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

思路：由对顶角关系，知 $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$. 欲证 $\angle 1=\angle 2$，须证 $\angle 3=\angle 4$，而 $\angle 3=\angle 4$ 恰恰由题设条件（$AB /\!/ CD$）和相关定理（平行线内错角相等）予以保证，且上述过程的每一个步骤均可逆.

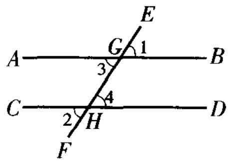


图 2－1

证明：$\because AB /\!/ CD$（已知），

$\therefore \angle 3=\angle 4$（平行线内错角相等）.

又 $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$（对顶角相等），

$\therefore \angle 1=\angle 2$（等量代换）.

注：在解题过程中，前面已经得到的结论，可作为其后推理过程的条件使用.

例 2 已知三条直线两两相交于点 A、B、C. 求证：$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB=180°$.

思路：求证式内的三个角彼此分离，能否把它们"移动"（等量代换）、合并成一个平角呢？回顾已学过的知识，知道平行线可发挥这种作用（同位角、内错角、同旁内角等关系），故需过某个交点作一条平行线，以迁移相关角的位置.

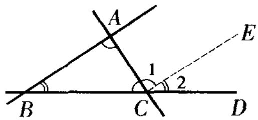


图 2－2

证法 1：过 C 点作 $CE /\!/ AB$，（图 2－2）则

$\angle 1=\angle A$（平行线内错角相等），

$\angle 2=\angle B$（平行线同位角相等）.

$\therefore \angle A+\angle B+\angle BCA=\angle 1+\angle 2+\angle BCA$（等量代换）.

$\because \angle 1+\angle 2+\angle BCA=\angle BCD=180°$（平角定义），

$\therefore \angle A+\angle B+\angle BCA=180°$（等量代换）.