银领工程

高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材

高等应用数学

颜文勇　柯善军　主编

高等教育出版社

Higher Education Press

银领工程

高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材

高等应用数学

颜文勇　柯善军　主编

内容提要

为适应新世纪对高等职业技术应用型人才的新要求，在全国大学生数学建模竞赛组委会立项课题研究成果的基础上，我们编写了这本二年制理工类高职高专高等数学教材。

本书包括函数的极限与连续、微分及其应用、积分及其应用、微分方程、傅里叶级数与拉普拉斯变换、线性代数初步、概率论与统计初步、图论基础和数学实验等九章。

本套教材可作为高等职业技术学院、高等专科学校及成人高校的通用教材，也可作为数学建模培训、数学实验课程和经济、工程应用人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/颜文勇，柯善军主编．—北京：高等教育出版社，2004.12

ISBN 7－04－015758－6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①颜…②柯…　Ⅲ．应用数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 126197 号

策划编辑 罗德春　**责任编辑** 舒敬江　**封面设计** 张　志　**责任绘图** 朱　静
版式设计 王　莹　**责任校对** 杨雪莲　**责任印制** 孔　源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京星月印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2004 年 12 月第 1 版
印　　张	16	**印　　次**	2004 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	330 000	**定　　价**	19.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号：15758－00

前　言

21世纪是知识经济时代，为配合产业技术的提升和社会经济的迅速发展，适应高职高专教育改革的要求，我们编写了这本《高等应用数学》。

本教材借鉴数学建模在提高学生综合能力和素质方面的成功经验，以培养应用型人才为目标，将数学基本知识、数学建模和数学实验有机融合，主要有以下几个特点：

1. 立足高职特色。根据高职高专理工类各专业对数学的基本要求，贯彻"理解概念、强化应用"的教学原则，强化基本知识，基本思想，突出本质。本书特别注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求过分复杂的计算和变换。对抽象概念，我们一针见血地指出其本质，如极限——分析事物发展变化规律的重要工具，导数——瞬时变化率，定积分——求总量的数学模型等，揭示数学朴素的本质。

2. 风格新颖，形式活泼。全书采用"案例驱动"法编写。由问题引出数学知识，然后将数学知识应用于处理各种生活和工程实际问题，用实例和示例加深对概念、方法的理解。这样，让数学来源于生活，又反作用于生活。同时，采用清晰，直观的表现风格，大量运用数表、图像和标注，简化了大量的文字描述，清晰、明快，让学习变得轻松。同时，我们还设计了图标和与案例匹配的图形，提高教材的"亲和力"。

3. 案例生活化，通俗化，增强可读性。我们设计的引例，尽量来源于生活。我们力图用日常生活中简单的实际问题引出抽象的数学概念，使数学知识生活化、通俗化、简单化，让学生将数学与实际生活联系在一起。在学生充分理解数学知识的基础上，再将它用于处理各种工程实际问题，抽屉式布局，由浅入深。

本书为理工类高职高专《高等应用数学》教材，前四章为各专业的基础模块，不低于48学时；后五章为提高模块，各专业可根据专业培养目标的要求，选学相应的教学内容，如电类和通信类，可选学傅里叶级数与拉普拉斯变换，计算机软件类可选学图论等。

参加本书编写的有成都电子机械高等专科学校的颜文勇、成和平，四川航空职业技术学院的柯善军，北京职业技术学院的李月清等教师。全书由颜文勇完成最后的统稿。

本教材的编写得到高等教育出版社的大力支持，浙江育英职业技术学院的郑茂玉老师对线性代数初步一章的编写提出了许多宝贵的意见和建议，成都电子机械高等专

科学校的陈琳、王科和石川也给本书的编写提供了大力帮助。在此向他们表示衷心感谢。

由于作者水平有限，时间也比较仓促，本书难免有不足之处，敬请读者指正。

编者

2004年8月

目　　录

第一章

函数的极限与连续

【目标】 复习中学的函数知识,能建立实际问题中的函数关系,理解函数极限与连续的概念,能用极限的思想方法分析实际问题.

内容简介

自然界没有绝对静止或绝对孤立的事物.函数能准确地刻画各事物或各因素之间的相依关系,它提供了进行数量研究的方法.公元1837年,德国数学家狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)提出了现今通用的函数定义,使函数关系更加明确.函数极限是一个最基本、最重要的概念.19世纪以前,人们用朴素的极限思想计算了圆的面积、体积等.19世纪之后,柯西(Cauchy,1789—1851)以物体运动为背景,结合几何直观,引入了极限概念.后来,魏尔斯特拉斯(Weierstrass,1815—1897)给出了形式化的数学语言描述.有了极限概念,我们可以计算许多具体的量,如圆周长、圆面积、速度、加速度等.极限概念奠定了微积分学的基础.以后的微分和积分都将借助于极限来描述.本章讨论函数极限与连续的基本概念、基本性质和基本运算,并介绍它们的一些实际应用.

1.1 函数

1.1.1 函数的概念

案例1[气温与时间的关系] 我们知道,气温随着时间的变化而变化.如何准确地表示某天气温与时间之间的变化关系呢?

案例 2[圆的面积]　圆的面积 A 与半径 r 的关系可表示为

$$A=\pi r^2.$$

在研究事物内部、事物与事物各因素间的关系时，我们常常通过对客观事物的分析，建立各因素之间的关系式. 这种关系式可以充分揭示各因素之间的数量关系，也是我们揭示事物发展规律，对事物进行分析和研究的重要基础.

概念和公式的引出

函数　设 x 和 y 是两个变量，D 是一给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数的**定义域**，$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

函数常用的表示法有三种：解析法、列表法和图形法.

(1) 解析法

$$y=f(x).$$

因变量　　对应法则　　自变量

如函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ 的定义域为 $D=\{x\mid -3<x<3\}$，值域为

$$\left\{y\,\middle|\,\frac{1}{3}\leqslant y<+\infty\right\}.$$

解析法的优点是便于数学上的分析和计算. 本书主要讨论用解析式表示的函数.

(2) 列表法

要获得一天中气温与时间的关系，可以每间隔一段时间测量一些数据，表 1.1.1 列出了在上午 10 时到中午 12 时每隔 20 分钟测得的气温数据，由此可以观察出这段时间内气温的变化规律.

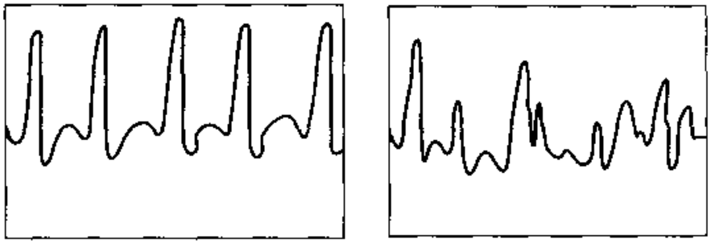
表 1.1.1

时刻 t	10:00	10:20	10:40	11:00	11:20	11:40	12:00
气温 T(单位:℃)	18	18	18.5	19	20	21	23

列表法的优点是直观、精确.

(3) 图形法

通过心电图的比较，医生可以诊断出该人是否患有心脏病. 如图 1.1.1(a) 为健康人的心电图，而图 1.1.1(b) 为患有严重心脏病病人的心电图.



(a)　(b)

图 1.1.1

图形法的优点是直观、通俗、容易比较.

进一步的练习

练习 1［自由落体运动的方程］ 在自由落体运动中,物体下落的距离 s 随下落时间 t 的变化而变化,下落距离 s 与时间 t 之间的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

解析法

其中 g 为重力加速度.

练习 2［波形函数］ 在电子科学中,有大量波形函数,图 1.1.2 为一周期为 T 的锯齿形波的图形.此函数在一个周期$[0,T)$上可表示为

解析法

$$y=\frac{h}{T}x \quad (0\leqslant x<T).$$

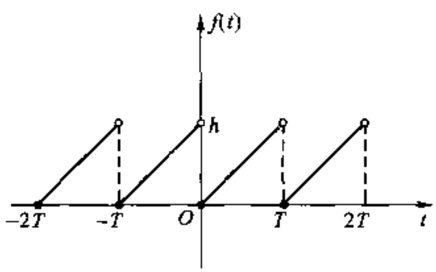


图 1.1.2

练习 3 [股票曲线]　股票在某天的价格和成交量随时间的变化常用图形表示，图 1.1.3 为某一股票在某天的走势图．从股票曲线，我们可以看出这只股票当天的价格和成交量随时间的波动情况．

图形法

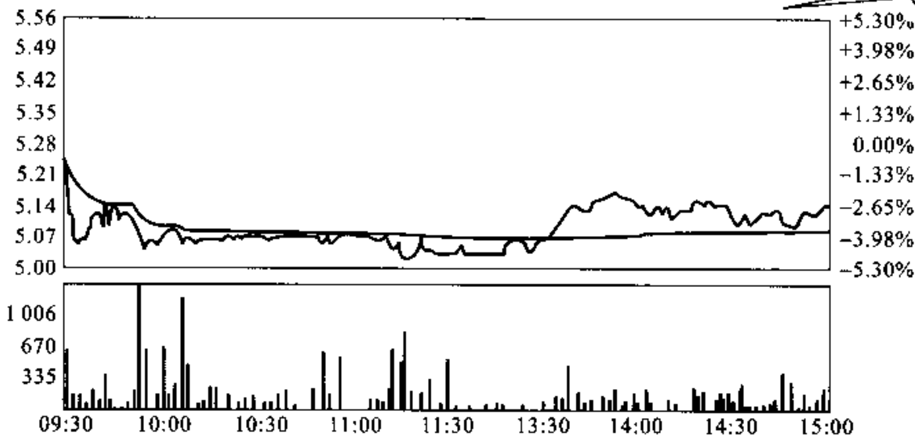


图 1.1.3

练习 4 [物理实验]　设某一物理现象的数学关系为 $y=\varphi(t)$，用实验测得 t_i 时刻 $\varphi(t_i)$ 的值，见表 1.1.2．

表 1.1.2

t	0	t_1	t_2	$\cdots$	t_m
$\varphi(t)$	φ_0	φ_1	φ_2	$\cdots$	φ_m

列表法

1.1.2　初等函数

案例[生产利润]　某一玩具公司生产 x 件玩具将花费 $400+5\sqrt{x(x-4)}$ 元，如果每件玩具卖 48 元，那么该公司生产 x 件玩具获得的净利润是多少？

解　经过简单分析，可以得到该公司生产 x 件玩具获得的净利润 y 为

利润 = 销售收入 − 成本

$$y=48x-400-5\sqrt{x(x-4)}.$$

此函数为一个表达式，此表达式是由一些简单函数经过有限次四则运算或有限次复合而得到的．

概念和公式的引出

基本初等函数 基本初等函数为以下五类函数(图形见附录1):

(1) 幂函数 $y=x^\mu$,μ 是常数

(2) 指数函数 $y=a^x$(a 是常数且 $a>0,a\neq1$),$x\in(-\infty,+\infty)$

(3) 对数函数 $y=\log_a x$(a 是常数且 $a>0,a\neq1$),$x\in(0,+\infty)$

(4) 三角函数

正弦函数 $y=\sin x,x\in(-\infty,+\infty),y\in[-1,1]$

余弦函数 $y=\cos x,x\in(-\infty,+\infty),y\in[-1,1]$

正切函数 $y=\tan x,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},y\in(-\infty,+\infty)$

余切函数 $y=\cot x,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z},y\in(-\infty,+\infty)$

(5) 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数 $y=\arccos x,x\in[-1,1],y\in[0,\pi]$

反正切函数 $y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty),y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x,x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,\pi)$

复合函数 若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,当 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域或其一部分取值时,$\varphi(x)$ 的值均在 $y=f(u)$ 的定义域内,从而得到一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数,这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,u 称为**中间变量**,记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

因变量 内层函数

外层函数

初等函数 由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成并且可以用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

如 $y=\ln(\sin 2x)+x^2,y=\mathrm{e}^{\sqrt{\arctan x}}+\cos x$ 等都是初等函数,$y=|x|$ 不是初等函数.

进一步的练习

练习1[生产费用] 某工厂每天最多生产100台计算机,工厂维持生产的日固定费用为4万元,生产一台计算机的直接费用(含材料费和劳务费)为4 250元.试建立该厂日生产 x 台计算机的总费用函数,并指出其定义域.

解 设该厂日生产 x 台计算机的总费用为 y(单位:元),则 y 为日固定费用和生产 x 台计算机所需总费用之和,即

$$y = 40\ 000 + 4\ 250x,$$

由于该厂每天最多能生产 100 台计算机,所以定义域为 $\{x|0 \leqslant x \leqslant 100\}$.

练习 2 [飞行距离] 一架飞机 A 中午 12 时从某地以 400 km/h 的速度朝北飞行,一小时后,另一架飞机 B 从同一地点起飞,速度为 300 km/h,方向朝东. 如果两架飞机飞行高度相同,不考虑地球表面的弧度和阻力. 问这两架飞机在时刻 t(飞机 B 起飞的时刻为 0)相距多远?

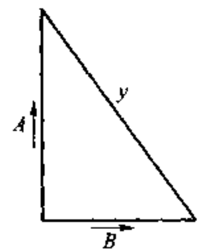


图 1.1.4

解 设两架飞机在 t 时刻相距 y km,由于两架飞机分别向北向东飞行,所以 t 时刻两架飞机所在地点的连线和各自飞行的路线组成一个直角三角形,如图 1.1.4 所示. t 时刻飞机 B 飞行的距离为 $300t$,飞机 A 早出发 1 小时,飞行的距离为 $400(t+1)$,由勾股定理,有

$$y = \sqrt{400^2(t+1)^2 + 300^2t^2},\text{其中 } t \geqslant 0.$$

练习 3 [汽车租赁] 一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 200 元加每公里收费 15 元.

(1) 试建立租用一辆该种汽车一天的租车费(单位:元)与行车路程 x(单位:km)之间的函数关系;

(2) 若某人某天付了 400 元租车费,问他开了多少千米?

解 (1) 设租用一辆该种汽车一天的租车费为 y,则 y 为每天的基本租金 200 元和当天行车 x km 所收费用 $15x$ 之和,即

$$y = 200 + 15x.$$

(2) 将 400 代入上式,得

$$400 = 200 + 15x,$$

解之,得 $x \approx 13.3$(km),即他开了 13.3 km.

1.1.3 分段函数

案例 [矩形波的函数表示] 图 1.1.5 为一个矩形波的图形,它在一个周期$[-\pi,\pi)$内的解析式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x < 0, \\ A, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

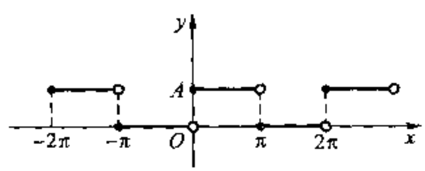


图 1.1.5

这个函数的特点是由多个表达式构成,它不是初等函数. 在工程实践中,这是一类常见函数.

概念和公式的引出

分段函数 在不同的定义域上用不同的函数表达式表示的函数称为**分段函数**.

进一步的练习

练习 1 [绝对值函数]

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

如图 1.1.6 所示.

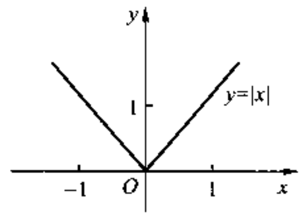


图 1.1.6

练习 2 [符号函数]

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

如图 1.1.7 所示.

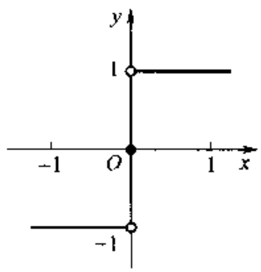


图 1.1.7

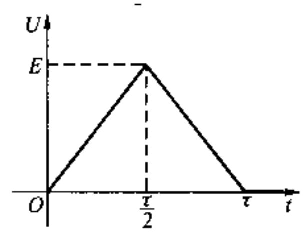


图 1.1.8

练习 3 [特征函数]

$$y=\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

其中 A 是数集,此函数常用于计数统计.

练习 4 [单位阶跃函数] 单位阶跃函数是电学中的一个常用函数,它可表示为

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

练习 5 [单三角脉冲] 脉冲器产生一个单三角脉冲,其波形如图 1.1.8 所示,电压 U 与时间 t ($t\geqslant 0$)的函数关系式为一分段函数

$$U=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t, & 0\leqslant t<\dfrac{\tau}{2},\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & \dfrac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & t>\tau.\end{cases}$$

点斜式，直线的斜率为$\dfrac{2E}{\tau}$

两点式，$\dfrac{U-0}{t-\tau}=\dfrac{E-0}{\dfrac{\tau}{2}-\tau}$

练习 6［个人所得税］　我们知道，当个人的月收入超过一定金额时，应向国家交纳个人所得税，收入越高，国家征收的个人所得税的比例也越高. 即“高收入，高税收”. 我国于 1993 年 10 月 31 日发布的《中华人民共和国个人所得税法》中规定月收入超过 800 元为应纳税所得额（表 1.1.3 仅保留了原表中前 2 级的税率）.

表 1.1.3

级数	全月应纳税所得额	税率（%）
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 元至 2 000 元部分	10

个人所得税一般在工资中直接扣除. 若某单位所有人的月收入都不超过 2 800 元，请建立月收入与纳税金额之间的函数关系.

解　设某人月收入为 x 元，应交纳所得税为 y 元.

当 $0\leqslant x\leqslant 800$ 时，$y=0$；

当 $800<x\leqslant 1\,300$ 时，$y=(x-800)\times 5\%$；

当 $1\,300<x\leqslant 2\,800$ 时，

$$y=(1\,300-800)\times 5\%+(x-1\,300)\times 10\%=25+(x-1\,300)\times 10\%,$$

故函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 800,\\ 0.05\times(x-800), & 800<x\leqslant 1\,300,\\ 0.1\times(x-1\,300)+25, & 1\,300<x\leqslant 2\,800.\end{cases}$$

如图 1.1.9 所示.

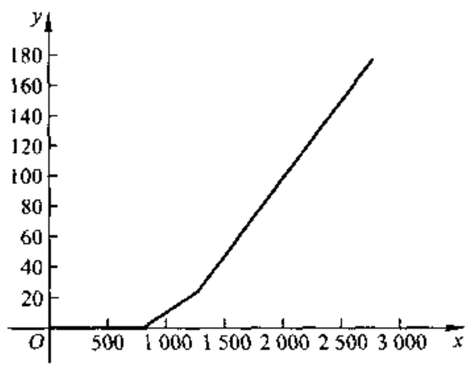


图 1.1.9

若某人月工资为 1 850 元，则应使用公式 $y=0.1\times(x-1\ 300)+25$ 求值，所交税为 $y|_{x=1\ 850}=0.1\times550+25=80$（元）.

练习 7［旅馆定价］ 一旅馆有 200 间房间，如果定价不超过 40 元/间，则可全部出租. 若每间定价高出 1 元，则会少出租 4 间. 设房间出租后的服务成本费为 8 元，试建立旅馆一天的利润与房价间的函数关系.

解 设旅馆的房价为 x 元/间，旅馆的一天利润为 y 元.

若 $x\leqslant40$，则旅馆出租 200 间，利润为 $y=200(x-8)$.

若 $x>40$，则旅馆少出租 $4(x-40)$ 间，出租了 $200-4(x-40)$ 间. 利润为 $y=[200-4(x-40)](x-8)$.

出租间数×利润/间

综上分析，旅馆利润与房价之间的函数为

$$y=\begin{cases}200(x-8), & x\leqslant40,\\ [200-4(x-40)](x-8), & x>40.\end{cases}$$

如果旅馆房价为 45 元/间，则应用公式 $y=[200-4(x-40)](x-8)$ 求值，旅馆一天的利润为 $y=(200-4\times5)\times(45-8)=6\ 660$（元）.

实训

1. 请列举你生活和学习中的一些函数及其常用表示方法.

2. ［产品收入］ 某工厂第 t 年生产某种产品的产量为 $120+2t+3t^2$ 个单位，单位产品的价格为 $6\ 000+700t$. 试建立该厂第 t 年的年收入函数.

3. ［矩形波］ 写出如图 1.1.10 所示的矩形波函数 $f(x)$ 在一个周期 $[-\pi,\pi)$ 上的函数表达式（解析式）.

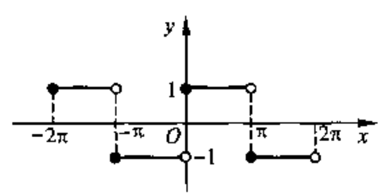


图 1.1.10

4. [邮资费用] 我国2001年8月1日公布的包裹邮寄费收费标准见表1.1.4.

表1.1.4

重量 / 资费 / 里程	首重1 000 g	5 000 g以内续重每500克	5 001 g以上续重每500克
500 km及500 km以内	5元	2元	1元

试建立在500 km及500 km以内包裹资费y(单位:元)与包裹重量x(单位:g)间的函数关系.

1.2 函数的极限

1.2.1 函数极限的概念

下面分两种情况来讨论.

(一) $x\to\infty$ 时函数的极限

案例1 [水温的变化趋势] 将一盆80℃的热水放在一间室温恒为20℃的房间里,水温T将逐渐降低,随着时间t的推移,水温会越来越接近室温20℃.

案例2 [自然保护区中动物数量的变化规律] 在某一自然保护区中生长的一群野生动物,其群体数量会逐渐增长,但随着时间t的推移,由于自然保护区内各种资源的限制,这一动物群体不可能无限地增大,它应达到某一饱和状态,如图1.2.1所示.饱和状态就是时间$t\to\infty$时野生动物群的数量.

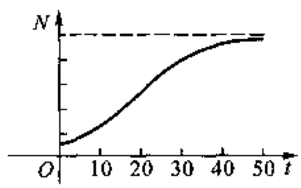


图1.2.1

这两个问题有一个共同的特征:当自变量逐渐增大时,相应的函数值接近于某一常数.

概念和公式的引出

$x\to\infty$ 时函数的极限 若函数$f(x)$当自变量x的绝对值无限增大时,相应的函数值$f(x)$无限接近于常数A,则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A\ (x\to\infty)$.

其中"lim"代表极限(limit),极限符号下面的$x\to\infty$表示自变量x的绝对值无限增大.