

“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇



希望杯

数学能力培训教程

张海英 骆 华 王墨森 等编著

小学六年级

登上更高境界

学会创新思考

掌握美的数学



数学能力测评的高水准资料

为千千万万的青少年播种希望

气象出版社

“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

“希望杯”数学能力 培 训 教 程

小学六年级

张海英 骆 华 王墨森 等编著

希望出版社

图书在版编目(CIP)数据

“希望杯”数学能力培训教程. 小学六年级 / 周国镇主编.
北京: 气象出版社, 2006. 12
(“希望杯”数学竞赛系列丛书)
ISBN 7-5029-4246-7
I. 希… II. 周… III. 数学课—小学—教学参考资料
IV. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 145222 号

气象出版社 出版

(北京市海淀区中关村南大街 46 号 邮编: 100081)

总编室: 010-68107112 发行部: 010-62175925

网址: <http://cmp.cma.gov.cn> E-mail: qxchs@263.net

责任编辑: 胡育峰 黄丽荣 终审: 陈云峰

封面设计: 贾衍凤 责任技编: 刘祥玉 责任校对: 庚 中

×

河北大普润印刷厂印刷

气象出版社 发行

×

开本: 850×1168 1/32 印张: 5.875 字数: 152.6 千字

2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第一次印刷

印数: 1~20000 定价: 10.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等, 请与本社
发行部联系调换

“希望杯”全国数学邀请赛 组织委员会

顾 问

- 龚 昇** 著名数学家
华罗庚数学奖获得者
中国科学技术大学原副校长
- 梅向明** 著名数学家
北京师范大学原院长
- 徐利治** 著名数学家
大连理工大学数学研究所原所长

常务委员

- 陈德泉** 应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长，
现任副理事长
华罗庚实验室主任
曾任第一、二届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任
- 计 雷** 应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长，
现任副理事长
华罗庚实验室副主任
曾任三届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任
- 徐伟宣** 应用数学家

中国科学院科技政策与管理科学研究所原所长
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长
华罗庚实验室副主任
曾任六届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任

周国镇 数学教育专家

《数理天地》杂志社社长、总编
历届“希望杯”组委会秘书长、命题委员会主任

刘学红 《中国青年报》名记者、中青在线网总裁

周春荔 数学教育专家

首都师范大学教授

吕伟泉 广东省教研室副主任

汪江松 数学教育专家

《中学数学》主编

湖北大学教授

顾宏达 数学教育专家

上海黄浦教育学院原院长

黄建弘 数学教育专家

上海师资培训中心实验基地主任

欧益生 浙江嘉兴市教研室主任

龙开奋 数学教育专家

广西师范大学数学系副教授

委 员

北 京	牛玉石							
天 津	王成维	闫 毅						
上 海	杨家政	熊 斌	王 镇	周祖康	张 波	毛育才		
重 庆	吴挽蓉							
河 北	邵魁军	胡天顺	石瑞贞	张丽晨	耿昌敏			
山 西	王 光	白 枫						
内 蒙 古	张志仁	王 荣	包 虎	步海英	刘彦彰	南 丁		
	张根宝	高秀恩	杨 莉	敖特根				
辽 宁	赵素艳	孙家逊	张顺清	岳慧思	舒凤杰	魏丽敏		
	陈玉华	王闰东	方广彦					
吉 林	张胜利	祝承亮						
黑 龙 江	熊晓青	于 辉	李修福	刘志臣	习全中	金贵泉		
	金绍先	李治军	邹 辉	孙继侠				
江 苏	许云峰	刘 健	陆 韧					
浙 江	吴明华	李世杰	应建军					
福 建	林金钟	薛玮纳	苏杰民	温晓丹	陈少平			
江 西	熊以情	徐源可	倪直明	肖连奇	李锦成	董乐华		
安 徽	李富彩							
山 东	赵水祥	侯加明	吕庆艳	王太忠				
河 南	马国军	陈宝亭						
湖 北	刘统菊							

湖 广	南 东	谢细华 徐山洪 殷切文 石永生	肖国瑞 周署 梁秉冠 卢建川	潘迪光 黄文毓 梁小贱 付冠流	曾晓牛 劳兆喜 邓志云 钟明	李西龙 陈文生 林国忠 陶冬来	康锡成 郑俊盛 郑喜中
海 四 贵 云	南 川 州 南	张光浓 李黎明 王荣方 张文英 罗红	赵颖钧 胡朝双 李爱丽 徐云贵	王兴华 欧群	张涤初 张浩仁	汪锐	龚灵
陕 甘 宁 青 新 澳	西 肃 夏 海 疆 门	李丹 胡学让 杨燕 闫翊德 杨卫平 吕晓白	王秋科 杨志杰 李红 黄志清	吴晓英 吕咏格 台来提·阿	吕咏格 张爱萍 赵兰泉	徐周让	

前 言

这套教程(含四、五、六年级各一册)是为小学四、五、六年级师生开展数学科普活动或参加“希望杯”数学能力测试而专门编写的培训教材。在编写过程中,作者们充分注意了新的小学数学教学大纲,认真研究了欧美国家小学数学教育的先进经验,力求充分体现“希望杯”的特色,为广大的小学师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法,以“鼓励学好课本知识,适当拓宽知识面,激发学习数学的兴趣和热情,培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届小学“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题,这些题目中的绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家们命题,其余则是由全国各地数学命题的研究人员编拟。这些题目,贴近现行的小学数学课本,很有启发性、思考性和趣味性,寓科学于趣味之中,寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者加深对数学课本的理解、掌握和应用,并且能实实在在地提高科学思维素质,而这种素质对于有效地学习任何别的功课都是必需的。正因为如此,历届小学“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好;小学数学各类考试命题人员经常从中吸取营养;有远见的数学教师大量地从中选取资料,以充实和丰富自己的教学内容;众多的数学教学和培训机构则用来作为主要教材。最有

说服力的是千千万万的小学生,正是经过对“希望杯”试题的学习、研究,提高了水平,大大提升了学数学的兴趣和信心,他们的数学素养明显地高于没有接触过“希望杯”的学生们。

考虑到大部分小学生只是希望能够很好地掌握学校里数学课本上的内容,另一方面也的确有不少小学生并不满足于此,他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲,所以我们的教程既包含了能充分体现小学数学主要内容的部分,也包含了小学数学课本中没有而小学生也能理解和掌握的一些有价值的内容。前者占教程的大部分,后者只占小部分。

考虑到小学生年龄小,阅读和理解能力不是很强,本教程在行文上力求简明易懂。

教程的作者不仅是“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的成员,而且还是著名的《数理天地》杂志的编辑,他们不仅有很好的数学功底,而且每个人都有丰富的教学经验,相信本教材的问世对于小学生数学学习水平的提高会有实际帮助。当然,书中定会有不妥不当之处,真诚地欢迎读者批评指正。

周国镇

2006年11月1日

注:周国镇 《数理天地》杂志社社长兼总编;中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事,数学教育委员会主任;“希望杯”全国数学邀请赛组委会秘书长,命题委员会主任。

目 录

“希望杯”全国数学邀请赛组织委员会

前 言

第 1 讲	四则运算	(1)
第 2 讲	找规律填数	(14)
第 3 讲	数字谜语	(25)
第 4 讲	比和比例	(41)
第 5 讲	统计图表	(58)
第 6 讲	应用题	(74)
第 7 讲	最值问题	(95)
第 8 讲	排列组合	(113)
第 9 讲	平面几何	(124)
第 10 讲	立体几何	(136)
第 11 讲	逻辑问题	(149)
第 12 讲	统筹问题	(161)



第1讲 四则运算

一、知识提要

1. 运算律

加法交换律 $a + b = b + a$;

加法结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$;

乘法交换律 $a \times b = b \times a$;

乘法结合律 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;

乘法分配律 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

2. 运算顺序

先乘除后加减;有括号的,先算括号内的,后算括号外的.

3. 分数的大小比较

基本性质:

(1) 若 $a > b$, 则 $b < a$;

(2) 若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$;

(3) 若 $a > b, c > d$, 则 $a + c > b + d$;

(4) 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.



基本方法:

- (1) 如果两个分数分母相同,分子大的分数较大;
- (2) 如果两个分数分子相同,分母小的分数较大;
- (3) 假分数大于真分数.

二、例 题

例 1 计算:

$$2.5 \times \left[\frac{17}{28} \div 4 \frac{1}{4} \times (0.92 - 0.88) \right] \times 6.3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

第 2 届(2004 年)五年级培训题

分析·解 应当“先算括号内,后算括号外”.在括号内,对于分数的乘除运算,先变除法运算为乘法运算,以便及时进行约分化简;对于分数与小数的混合运算,一般可以将小数化分数来计算(如例 2),但是仍要根据具体情况来定,不能一概而论(如例 1).

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2.5 \times \left(\frac{17}{28} \times \frac{4}{17} \times 0.04 \right) \times 6.3 \\ &= 2.5 \times \frac{0.04}{7} \times 6.3 \\ &= \frac{0.1}{7} \times 6.3 \\ &= 0.09. \end{aligned}$$

例 2 计算: $\frac{2\frac{5}{8} - \frac{2}{3} \times 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12} + 4.375\right) \div 19\frac{8}{9}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

第 3 届(2005 年)五年级培训题



解 1

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\frac{21}{8} - \frac{2}{3} \times \frac{33}{14}}{\left(\frac{37}{12} + \frac{35}{8}\right) \div \frac{179}{9}} \\&= \frac{\frac{21}{8} - \frac{11}{7}}{\frac{179}{24} \times \frac{9}{179}} \\&= \left(\frac{21}{8} - \frac{11}{7}\right) \times \frac{8}{3} \\&= 7 - 4\frac{4}{21} \\&= 2\frac{17}{21}.\end{aligned}$$

解 2

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\frac{21}{8} - \frac{2}{3} \times \frac{33}{14}}{\left(\frac{37}{12} + \frac{35}{8}\right) \times \frac{9}{179}} \\&= \frac{\frac{21}{8} - \frac{11}{7}}{\frac{179}{24} \times \frac{9}{179}} \times \frac{56}{56} \\&= \frac{147 - 88}{21} \\&= 2\frac{17}{21}.\end{aligned}$$

例 3 计算:

$$7.816 \times 1.45 + 3.14 \times 2.184 + 1.69 \times 7.816 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

第3届(2005年)五年级第1试

分析·解 根据加法交换律,先提取公因数,再合并化简.如
 7.816×1.45 与 1.69×7.816 有公因数 7.816 ,可先提取,于是



$$\begin{aligned} 7.816 \times 1.45 + 1.69 \times 7.816 &= 7.816 \times (1.45 + 1.69) \\ &= 7.816 \times 3.14, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } 7.816 \times 3.14 + 3.14 \times 2.184 &= 3.14 \times (7.816 + 2.184) \\ &= 3.14 \times 10 = 31.4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 7.816 \times 1.45 + 3.14 \times 2.184 + 1.69 \times 7.816 \\ &= 7.816 \times (1.45 + 1.69) + 3.14 \times 2.184 \\ &= 7.816 \times 3.14 + 3.14 \times 2.184 \\ &= 3.14 \times (7.816 + 2.184) \\ &= 3.14 \times 10 \\ &= 31.4. \end{aligned}$$

$$\text{例 4 } 2006 \times 2008 \times \left(\frac{1}{2006 \times 2007} + \frac{1}{2007 \times 2008} \right) = \underline{\quad}.$$

第4届(2006年)六年级第1试

$$\begin{aligned} \text{解 } 2006 \times 2008 \times \left(\frac{1}{2006 \times 2007} + \frac{1}{2007 \times 2008} \right) \\ &= 2006 \times 2008 \times \frac{1}{2006 \times 2007} + 2006 \times 2008 \times \frac{1}{2007 \times 2008} \\ &= \frac{2008}{2007} + \frac{2006}{2007} \\ &= \frac{2008 + 2006}{2007} \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$\text{例 5 } 0.0125 \times 3 \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \times 87.5 \div \frac{15}{16} \times \frac{16}{15} - 14 \div 6 \times 6 =$$

$$\text{解 原式} = \frac{1}{80} \times \frac{16}{5} + \frac{1}{7} \times \frac{175}{2} \times \frac{16}{15} \times \frac{16}{15} - 14$$



$$\begin{aligned}&= \frac{1}{25} - \frac{25 \times 16 \times 8}{15 \times 15} - 14 \\&= \frac{9 + 25 \times 16 \times 8}{225} - 14 \times \frac{225}{225} \\&= \frac{9 + 25 \times (16 \times 8 - 14 \times 9)}{225} \\&= \frac{9 + 25 \times 2}{225} \\&= \frac{59}{225}.\end{aligned}$$

例6 有五个数： $\frac{9}{5}$ ， $\frac{12}{7}$ ， $\frac{27}{17}$ ， $\frac{36}{19}$ ， $\frac{54}{29}$ ，其中最大的数是_____，最小的数是_____.

第12届(2001年)初一第1试

分析·解 由分数大小比较的基本方法知，可将五个数化为同分母(即找分母的最小公倍数)或将五个数化为分子相同的五个分数. 经过观察发现，寻找所给五个数的分子的最小公倍数较方便.

因为 9, 12, 27, 36, 54 的最小公倍数是 108，因此，分子化为相同(即为 108)，则分母越大时分数越小.

$$\begin{aligned}\text{因为 } \frac{9}{5} &= \frac{9 \times 12}{5 \times 12} = \frac{108}{60}, \frac{12}{7} = \frac{12 \times 9}{7 \times 9} = \frac{108}{63}, \\ \frac{27}{17} &= \frac{27 \times 4}{17 \times 4} = \frac{108}{68}, \frac{36}{19} = \frac{36 \times 3}{19 \times 3} = \frac{108}{57}, \\ \frac{54}{29} &= \frac{54 \times 2}{29 \times 2} = \frac{108}{58}.\end{aligned}$$

$$\text{又 } 57 < 58 < 60 < 63 < 68,$$

$$\text{所以 } \frac{108}{57} > \frac{108}{58} > \frac{108}{60} > \frac{108}{63} > \frac{108}{68},$$



即
$$\frac{36}{19} > \frac{54}{29} > \frac{9}{5} > \frac{12}{7} > \frac{27}{17}.$$

故这五个数中,最大的数是 $\frac{36}{19}$,最小的数是 $\frac{27}{17}$.

例 7 如果 a, b, c 是 3 个整数,则它们满足加法交换律和结合律,即

$$(1) a + b = b + a,$$

$$(2) (a + b) + c = a + (b + c).$$

现在规定一种运算“ $*$ ”,它对于整数 a, b, c, d 满足:

$$(a, b) * (c, d) = (a \times c + b \times d, a \times c - b \times d)$$

例: $(4, 3) * (7, 5) = (4 \times 7 + 3 \times 5, 4 \times 7 - 3 \times 5) = (43, 13)$

请你举例说明,“ $*$ ”运算是否满足交换律,结合律.

第 1 届(2003 年)四年级第 2 试

分析·解 在这里给了两个新的记号. 一个是有序的数对, 如 $(4, 3), (7, 5)$, 注意 $(4, 3)$ 与 $(3, 4)$ 应看作两个不同的有序数对; 一个是运算“ $*$ ”, 运算“ $*$ ”是建立在加、减、乘三种运算的基础之上的一种新的运算符号. 两个有序数对 (a, b) 与 (c, d) 经过“ $*$ ”的运算后, 又得到了一个有序数对, 这个数对中的第一个数等于两个括号中的第一个数的乘积与第二个数的乘积的和; 第二个数等于两个括号中的第一个数的乘积与第二个数的乘积的差.

$$\begin{aligned} (1) \text{ 例如: } (7, 5) * (4, 3) &= (7 \times 4 + 5 \times 3, 7 \times 4 - 5 \times 3) \\ &= (4 \times 7 + 3 \times 5, 4 \times 7 - 3 \times 5) \\ &= (4, 3) * (7, 5). \end{aligned}$$

所以“ $*$ ”运算满足交换律.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 例如: } (4, 3) * (7, 5) &= (4 \times 7 + 3 \times 5, 4 \times 7 - 3 \times 5) \\ &= (43, 13), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{所以 } [(4,3) * (7,5)] * (2,1) &= (43,13) * (2,1) \\
 &= (43 \times 2 + 13 \times 1, 43 \times 2 - 13 \times 1) \\
 &= (99,73),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{而 } (4,3) * [(7,5) * (2,1)] & \\
 &= (4,3) * (7 \times 2 + 5 \times 1, 7 \times 2 - 5 \times 1) \\
 &= (4,3) * (19,9) \\
 &= (4 \times 19 + 3 \times 9, 4 \times 19 - 3 \times 9) \\
 &= (103,49) \neq (99,73),
 \end{aligned}$$

所以“ $*$ ”运算不满足结合律。

反思 我们通过两个例子说明“ $*$ ”的运算满足交换律,不满足结合律. 其中,通过一个反面的例子就可以断言,“ $*$ ”运算不满足结合律. 但是第一个例子虽然正确,我们还不能下断语:“对任何两个有序数对,‘ $*$ ’运算都适用于交换律”. 正确的结论需要严格的证明. 事实上 $(a,b) * (c,d) = (a \times c + b \times d, a \times c - b \times d) = (c \times a + d \times b, c \times a - d \times b) = (c,d) * (a,b)$. 这里不管 a, b, c, d 取任何整数,等式都是成立的,这才是严格的证明.

例8 下而是小明同学在做作业时发现的一种计算个位数字是5的数的平方(两个相同的数的乘积)的一种简便方法:

$$\begin{aligned}
 15 \times 15 &= (10 + 5) \times (10 + 5) \\
 &= 1 \times (1 + 1) \times 100 + 25 = 225; \\
 25 \times 25 &= (20 + 5) \times (20 + 5) \\
 &= 2 \times (2 + 1) \times 100 + 25 = 625; \\
 35 \times 35 &= (30 + 5) \times (30 + 5) \\
 &= 3 \times (3 + 1) \times 100 + 25 = 1225;
 \end{aligned}$$

.....