21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

与上海科技文献版《离散数学》配套

离散数学

全程导学及习题全解

于晶晶　张爱琴　彭程　编
赵迪　主审

LISAN SHUXUE

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校　　　步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIA　　　ONGBUFUDAO

与上海科技文献版《离散数学》配套

离散数学

全程导学及习题全解

于晶晶　张爱琴　彭程　编
赵迪　主审

LISAN SHUXUE

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练　　　　　　更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

离散数学全程导学及习题全解/于晶晶、张爱琴、彭　程编．—北京：中国时代经济出版社，2007．2

（21世纪高等院校经典教材同步辅导）

ISBN 978－7－80221－246－6

Ⅰ．离…　Ⅱ．①于…　②张…　③彭…　Ⅲ．离散数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．0158

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第148872号

离散数学全程导学及习题全解

于晶晶　张爱琴　彭　程　编

出版者	中国时代经济出版社
地　址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦东办公区11层
邮政编码	100007
电　话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传　真	(010)68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京市优美印刷有限责任公司
开　本	880×1230　1/32
版　次	2007年2月第1版
印　次	2007年2月第1次印刷
印　张	8.875
字　数	250千字
印　数	1～5000册
定　价	12.00元
书　号	ISBN 978－7－80221－246－6

内容简介

本书是与上海科学技术文献出版社1982版《离散数学》教材相配套的辅助教材，内容按照教材章节顺序进行编写。本书分为九章，内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、函数、代数结构、格与布尔代数、图论、形式语言与自动机、纠错码初步。每章节包括：本章知识要点、典型例题分析与讲解、习题全解三部分。本章知识要点部分集中了离散数学的基本概念和定理；典型例题分析与讲解部分对常见典型题目的解题思路进行了分析；习题全解部分对教材中各对应习题做了详细的参考解答。

本书可作为高等院校离散数学课程的教学参考书，也可作为计算机软件水平考试和计算机等级考试用书，以及考研者应试复习。

前　　言

“离散数学”是计算机及其相关专业的一门核心课程，也是很多高校计算机专业研究生入学考试的科目之一。

“离散数学”这门课程理论性强，有大量的概念、定理和公式，要求学生具备一定的抽象思维能力和逻辑思维能力，给学生学习带来了很大的困难。为了帮助学生更好地掌握这门课程的重点，习题解答的思路，规范解题的步骤，我们编写了这本参考书。

本书是与上海科学技术文献出版社1982版《离散数学》教材相配套的辅助教材，内容按照教材章节顺序进行编写。本书分为九章，内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、函数、代数结构、格与布尔代数、图论、形式语言与自动机、纠错码初步。每章节包括三部分内容：本章知识要点、典型例题分析与讲解、习题全解。本章知识要点部分对基本的概念和定理进行了集中整理；典型例题分析与讲解部分对解题思路和技巧进行了点拨，使读者能举一反三，触类旁通；习题全解部分对教材各章节的每道习题都做了详细的解答，以利于读者自学。

全书由于晶晶、张爱琴、彭程编写，赵迪主审。本书编写过程中得到杨蕤、谢婧等同志的帮助，并得到中国时代经济出版社的领导和编辑们的支持和帮助，在此表示衷心的感谢！对《离散数学》教材作者左孝凌、李为鑑、刘永才等老师们表示衷心的感谢！

本书的特点是概念准确、解题思路清晰详细，是合适于高等院校

离散数学课程教学的参考书，广大考研者的应试复习书，以及计算机等级考试用书。

本书虽经努力编著而成，但由于作者水平有限，且时间紧迫，疏漏在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2007 年 1 月

目　录

第一章 命题逻辑

Ⅰ 本章知识要点

1. 命题及其表示法

命题 能表达判断,具有确定真值的陈述句.

真值 一个命题,总是具有一个"值",称为真值.真值只有"真"和"假"两种,记作 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{F}$.

命题类型 命题有两种类型:第一种类型是不能分解成更简单的陈述语句,称作原子命题;第二种类型是由联结词、标点符号和原子命题复合构成的命题,称作复合命题.

命题标识符 表示命题的符号.

命题常量 一个命题标识符如表示确定的命题,就称为命题常量.

命题变元 如果命题标识符只表示任意命题的位置标志,就称为命题变元.

原子变元 当命题变元表示原子命题时,该变元称为原子变元.

2. 联结词

否定 设 P 为一命题,P 的否定是一个新的命题,记作 $\neg P$.若 P 为 $\boldsymbol{T}$,$\neg P$ 为 $\boldsymbol{F}$;若 P 为 $\boldsymbol{F}$,$\neg P$ 为 $\boldsymbol{T}$."$\neg$"为一元运算符.

合取 两个命题 P 和 Q 的合取是一个复合命题,记作 $P\wedge Q$.当且仅当 P,Q 同时为 $\boldsymbol{T}$ 时,$P\wedge Q$ 为 $\boldsymbol{T}$,在其他情况下,$P\wedge Q$ 的真值为 $\boldsymbol{F}$."$\wedge$"为二元运算符.

析取 两个命题 P 和 Q 的析取是一个复合命题,记作 $P\vee Q$,当且仅当 P,Q 同时为 $\boldsymbol{F}$ 时,$P\vee Q$ 的真值为 $\boldsymbol{F}$,否则 $P\vee Q$ 的真值为 $\boldsymbol{T}$."$\vee$"为二元运算符.

条件 给定两个命题 P 和 Q,其条件命题是一个复合命题,记作 $P\rightarrow Q$,读作"如果 P,那么 Q"或"若 P 则 Q".当且仅当 P 的真值为 $\boldsymbol{T}$,Q 的真值为 $\boldsymbol{F}$ 时,$P\rightarrow Q$ 的真值为 $\boldsymbol{F}$,否则 $P\rightarrow Q$ 的真值为 $\boldsymbol{T}$.称 P 为前件,Q 为后件."$\rightarrow$"为二元运算符.

双条件 给定两个命题 P 和 Q,其复合命题 $P\rightleftarrows Q$ 称作双条件命题,读作"P 当且仅当 Q",当 P 和 Q 的真值相同时,$P\rightleftarrows Q$ 的真值为 $\boldsymbol{T}$,否则 $P\rightleftarrows Q$ 的真值为 $\boldsymbol{F}$."$\rightleftarrows$"为二元运算符.

3. 命题公式与翻译

合式公式 命题演算的合式公式(wff),规定为:

(1) 单个命题变元本身是一个合式公式.

(2) 如果 A 是合式公式,那么$\neg A$ 是合式公式.

(3) 如果 A 和 B 是合式公式,那么$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \rightarrow B)$ 和$(A \rightleftarrows B)$都是合式公式.

(4) 当且仅当能够有限次地应用(1)、(2)、(3) 所得到的包含命题变元.联结词和括号的符号串是合式公式.

翻译 把自然语言中的有些语句,翻译成数理逻辑中的符号形式.

优先次序 规定联结词运算的优先次序为:$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\rightleftarrows$.

4. 真值表与等价公式

真值表 在命题公式中,对于分量指派真值的各种可能组合,就确定了这个命题公式的各种真值情况,把它汇列成表,就是命题公式的真值表.

等价 给定两个命题公式 A 和 B,设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为所有出现于 A 和 B 中的原子变元,若给 $P_1,P_2\cdots,P_n$ 任一组真值指派,A 和 B 的真值都相同,则称 A 和 B 是等价的或逻辑相等.记作:$A\Leftrightarrow B$.

子公式 如果 X 是合式公式 A 的一部分,且 X 本身也是一个合式公式,则称 X 为公式 A 的子公式.

等价置换 设 X 是合式公式 A 的子公式,若 $X\Leftrightarrow Y$,如果将 A 中的 X 用 Y 来置换,所得到公式 B 与公式 A 等价,即 $A\Leftrightarrow B$.满足上述条件的置换称为等价置换(等价代换).

5. 重言式与蕴含式

重言式 给定一命题公式,若无论对分量作怎样的指派,其对应的真值永为 $\boldsymbol{T}$,则称该命题公式为重言式或永真公式.

矛盾式 给定一命题公式,若无论对分量作怎样的指派,其对应的真值永为 $\boldsymbol{F}$,则称该命题为矛盾式或永假公式.

蕴含式 当且仅当 $P\rightarrow Q$ 是一个重言式时,称 P 蕴含 Q,并记作 $P\Rightarrow Q$.

逆换式 对 $P\rightarrow Q$ 来说,$Q\rightarrow P$ 称作它的逆换式.

反换式 对 $P\rightarrow Q$ 来说,$\neg P\rightarrow\neg Q$ 称作它的反换式.

逆反式 对 $P\rightarrow Q$ 来说,$\neg Q\rightarrow\neg P$ 称作它的逆反式.

定理 1—5.1 任何两个重言式的合取或析取,仍然是一个重言式.

定理 1—5.2 一个重言式,对同一分量都用任何合式公式置换,其结果仍为一重言式.

定理 1—5.3 设A,B为两个命题公式,$A\Leftrightarrow B$当且仅当$A\rightleftarrows B$为一个重言式.

定理 1—5.4 设P,Q为任意两个命题公式,$P\Leftrightarrow Q$的充要条件是$P\Rightarrow Q$且$Q\Rightarrow P$.

6. 其他联结词

不可兼析取 设P和Q是两个命题公式,复合命题$P\overline{\vee}Q$称作P和Q的不可兼析取.$P\overline{\vee}Q$的真值为$\boldsymbol{T}$,当且仅当P与Q的真值不同时为$\boldsymbol{T}$,否则,$P\overline{\vee}Q$的真值为$\boldsymbol{F}$.

条件否定 设P和Q是两个命题公式,复合命题$P\overset{c}{\rightarrow}Q$称作命题$P$和$Q$的条件否定.$P\overset{c}{\rightarrow}Q$的真值为$\boldsymbol{T}$,当且仅当$P$的真值为$\boldsymbol{T}$,$Q$的真值为$\boldsymbol{F}$,否则$P\overset{c}{\rightarrow}Q$的真值为$\boldsymbol{F}$,由定义可知$P\overset{c}{\rightarrow}Q\Leftrightarrow\neg(P\rightarrow Q)$.

与非 设P和Q是两个命题公式,复合命题$P\uparrow Q$称作P和Q的“与非”,当且仅当P和Q的真值都为$\boldsymbol{T}$时,$P\uparrow Q$为$\boldsymbol{F}$,否则$P\uparrow Q$的真值为$\boldsymbol{T}$.且$P\uparrow Q\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)$.

或非 设P和Q是两个命题公式,复合命题$P\downarrow Q$称作P和Q的“或非”,当且仅当P和Q的真值都为$\boldsymbol{F}$时,$P\downarrow Q$的真值为$\boldsymbol{T}$,否则$P\downarrow Q$的真值为$\boldsymbol{F}$.且$P\downarrow Q\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)$

上述联结词有如下性质:

“$\overline{\vee}$”的性质

(1)$P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow Q\overline{\vee}P$

(2)$(P\overline{\vee}Q)\overline{\vee}R\Leftrightarrow P\overline{\vee}(Q\overline{\vee}R)$

(3)$P\wedge(Q\overline{\vee}R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\overline{\vee}(P\wedge R)$

(4)$(P\overline{\vee}Q)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

(5)$(P\overline{\vee}Q)\Leftrightarrow\neg(P\rightleftarrows Q)$

(6)$P\overline{\vee}P\Leftrightarrow\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}\overline{\vee}P\Leftrightarrow P$,$\boldsymbol{T}\overline{\vee}P\Leftrightarrow\neg P$.

“$\uparrow$”的性质

(1)$P\uparrow P\Leftrightarrow\neg(P\wedge P)\Leftrightarrow\neg P$

(2)$(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)\Leftrightarrow\neg(P\uparrow Q)\Leftrightarrow P\wedge Q$

(3)$(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)\Leftrightarrow\neg P\uparrow\neg Q\Leftrightarrow\neg(\neg P\wedge\neg Q)\Leftrightarrow P\vee Q$.

“$\downarrow$”的性质

(1)$P\downarrow P\Leftrightarrow\neg(P\vee P)\Leftrightarrow\neg P$

(2)$(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)\Leftrightarrow\neg(P\downarrow Q)\Leftrightarrow P\vee Q$

(3)$(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)\Leftrightarrow\neg P\downarrow\neg Q\Leftrightarrow P\wedge Q$

最小联结词组 对于任何一个命题公式,都能由仅含这些联结词的命题公式等价代换,而比这些联结词再少的命题公式不能对给定的公式作等价代换,

这样的联结词组就是最小联组词组.

7. 对偶与范式

对偶式 在给定的命题公式A中,使联结词$\vee$变成$\wedge$,将$\wedge$换成$\vee$,若有特殊变元$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{T}$亦相互取代,所得公式A^*称为A的对偶式.

合取范式 一个命题公式称为合取范式,当且仅当它具有形式$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geqslant 1)$. 其中$A_1, A_2, \cdots, A_n$都是由命题变元或其否定所组成的析取式.

析取范式 一个命题公式称为析取范式,当且仅当它具有形式$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geqslant 1)$. 其中$A_1, A_2, \cdots, A_n$都是由命题变元或其否定所组成的合取式.

小项 n个命题变元的合取式,称作布尔合取或小项,其中每个命题变元与它的否定不能同时存在,但两者必须出现且仅出现一次. 每个小项可用n位二进制予以编码.

$n = 3$时

$$m_{000} = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \qquad m_{100} = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$
$$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad m_{101} = P \wedge \neg Q \wedge R$$
$$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R \qquad m_{110} = P \wedge Q \wedge \neg R$$
$$m_{011} = \neg P \wedge Q \wedge R \qquad m_{111} = P \wedge Q \wedge R$$

大项 n个命题变元的析取式,称作大项或布尔析取,其中每个变元与它的否定不能同时存在,但两者必须出现且仅出现一次,每个大项可用n位二进制予以编码.

$n = 3$时

$$M_{000} = P \vee Q \vee R \qquad M_{100} = \neg P \vee Q \vee R$$
$$M_{001} = P \vee Q \vee \neg R \qquad M_{101} = \neg P \vee Q \vee \neg R$$
$$M_{010} = P \vee \neg Q \vee R \qquad M_{110} = \neg P \vee \neg Q \vee R$$
$$M_{011} = P \vee \neg Q \vee \neg R \qquad M_{111} = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$$

小项性质

(1) 每个小项当其真值指派与编码相同时,其真值为$\boldsymbol{T}$,在其余$2^n - 1$种指派情况下均为$\boldsymbol{F}$;

(2) 任意两个不同小项的合取式永为$\boldsymbol{F}$;

(3) 全体小项的析取式永为$\boldsymbol{T}$.

大项性质

(1) 每个大项当其真值指派与编码相同时,其真值为$\boldsymbol{F}$,在其余$2^n - 1$种指派情况下均为$\boldsymbol{T}$;

(2) 任意两个大项的析取式永为$\boldsymbol{T}$;

(3) 全体大项的合取式永为$\boldsymbol{F}$.

主析取范式 对于给定的命题公式,如果有一个等价公式,它仅由小项的

析取所组成，则该等价式称作原式的主析取范式.

主合取范式　对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称作原式的主合取范式.

定理 1—7.1　设 A 和 A^* 是对偶式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在 A 和 A^* 中的原子变元，则

$$\urcorner A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\urcorner P_1,\urcorner P_2,\cdots,\urcorner P_n)$$

$$A(\urcorner P_1,\urcorner P_2,\cdots,\urcorner P_n)\Leftrightarrow \urcorner A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

定理 1—7.2　设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在公式 A 和 B 中的所有原子变元，如果 $A\Leftrightarrow B$，则 $A^*\Leftrightarrow B^*$.

定理 1—7.3　在真值表中，一个公式的真值为 $\boldsymbol{T}$ 的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式.

定理 1—7.4　在真值表中，一个公式的真值为 $\boldsymbol{F}$ 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式.

8. 推理理论

有效结论　设 A 和 C 是两个命题公式，当且仅当 $A\rightarrow C$ 为一重言式，即 $A\Rightarrow C$，称 C 是 A 的有效结论，或 C 可由 A 逻辑地推出. 这里 A 可有 n 个前提 H_1，$H_2,\cdots,H_n$.

***P* 规则**　前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用.

***T* 规则**　在推导过程中，如果有一个或多个公式，重言蕴含着公式 S，则公式 S 可以引入推导之中.

相容　假设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为：$P_1,P_2,\cdots,P_n$，对于 P_1，$P_2,\cdots,P_n$ 的一些真值指派，如果能使 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的真值为 $\boldsymbol{T}$，则称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是相容的.

不相容　假设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为：$P_1,P_2,\cdots,P_n$，如果对于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的每一组真值指派，使得 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的真值均为 $\boldsymbol{F}$，则称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是不相容的.

判别有效结论有三种基本方法

(1) 真值表法　设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现于前提 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ 和结论 C 中的全部命题变元，假定对 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 作了全部的真值指派，就能对应地确定 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ 和 C 的所有真值，列出这个真值表，即可看出 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow C$ 是否成立.

(2) 直接证法　由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价或蕴含公式，推演得到有效的结论.

(3) 间接证法

① 要证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m\Rightarrow C$，只要证明 $H_1,H_2\cdots,H_m$ 与 $\urcorner C$ 不相容.

②CP 规则：要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C)$，如能证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge R \Rightarrow C$，即证得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C)$ 即可.

9. 应用

命题逻辑联结词相对应的门电路如图 1—1 所示

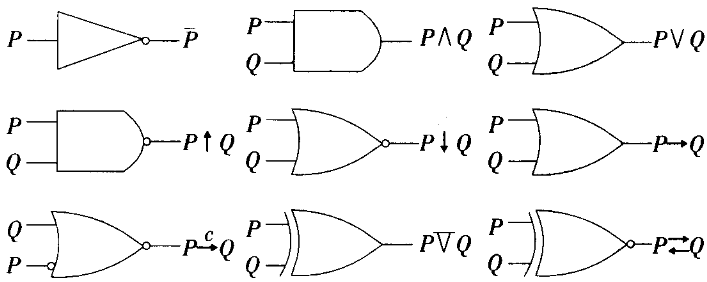

图 1—1

Ⅱ　典型例题分析与讲解

例 1—1　一个人起初说，"占据空间的、有质量的而且不断变化的叫做物质"；后来他改说，"占据空间的有质量的叫做物质，而物质是不断变化的."

问他前后主张的差异在什么地方，试以命题形式进行分析.

分析　要以命题形式分析前后主张，首先要把前后主张分别表示成命题表达式，因此在具体表达时，要先列出所有的原子命题，然后根据命题的含义，把所设的原子命题用适当的联结词连结起来.

解　设 P：它占据空间　　　　Q：它有质量

　　　R：它不断变化　　　　S：它叫作物质

他起初的主张可表示为：$(P \wedge Q \wedge R) \rightleftarrows S$

后来的主张可表示为：$(P \wedge Q) \rightleftarrows S) \wedge (S \to R)$

前后主张的差异在于：后来以为如果有 $P \wedge Q$，则必有 R；起初并没有这样的主张.

例 1—2　求命题公式 $(P \vee (Q \wedge R)) \to (P \wedge Q \wedge R)$ 的主析取范式和主合取范式.

（武汉理工大学 2002 年试题）

分析　求命题公式的主析取范式和主合取范式的方法有两种：真值表法和公式推导法.

(1) 真值表法

列出给定公式的真值表，其真值为 **T** 的指派所对应的小项析取，即为此公式的主析取范式；（注：小项中，命题变元与真值表中的 **T** 相对应，命题变元的否定与 **F** 相对应）. 其真值为 **F** 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式（注：大项中，命题变元与真值表中的 **F** 相对应，命题变元的否定与 **T** 相对应）.

(2) 公式推导法

主析取范式：① 将公式中的条件和双条件联结词化去，归为析取范式
② 除去析取范式中所有永假的析取项.
③ 将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并.
④ 对合取项补入没有出现的命题变元，即添加 $(P\vee\neg P)$ 式，然后，应用分配律展开公式.

主合取范式：① 将公式中的条件和双条件联结词化去，归为合取范式.
② 除去合取范式中所有为永真的合取项.
③ 合并相同的析取项和相同的变元.
④ 对析取项补入没有出现的命题变元，即添加 $(P\wedge\neg P)$ 式，然后，应用分配律展开公式.

此外，利用主范式的编码方法，在求出主析取范式的编码后，可立即写出主合取范式的编码. 对于给定 n 个变元的命题公式，其对应的编码有 2^n 个，与 n 位二进制数相对应. 一般应用 $\sum$ 表示小项的析取，应用 $\prod$ 表示大项的合取. 在应用编码表达式时，应注意极大项编码所对应的指派与极小项编码所对应的指派相反.

解　(1) 真值表法. 见表 1—1

设　$S\Leftrightarrow(P\vee(Q\wedge R))\rightarrow(P\wedge Q\wedge R)$

由真值表可知，S 真值为 **T** 的指派，所对应的小项析取即为 S 的主析取范式. 即 $S\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)$

同理，S 真值为 F 的指派所对应的大项合取为 S 的主合取范式：

$$S\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)$$

表　1—1

P	Q	R	$Q\wedge R$	$P\vee(Q\wedge R)$	$P\wedge Q\wedge R$	S
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**

续前表

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \wedge Q \wedge R$	S
F	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**

(2) 公式推导法

$$S \Leftrightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \quad \text{主析取范式}$$
$$= m_{001} \vee m_{000} \vee m_{010} \vee m_{111}$$
$$= \sum\nolimits_{0,1,2,7}$$
$$= \prod\nolimits_{3,4,5,6}$$
$$= M_{011} \wedge M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$$
$$= (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \quad \text{主合取范式}$$

例 1—3 证明$(P \to Q) \Rightarrow (P \to (P \wedge Q))$

分析 要证明 $P \to Q$ 是蕴含式,有如下几种方法:

① 利用真值表证明 $P \to Q$ 是永真式.

② 证明若 P 为 **T**,则必有 Q 为 **T**.

③ 证明若 Q 为 **F**,则必有 P 为 **F**.

④ 利用等价公式证明 $P \to Q$ 与 **T** 等价.

证明 ① 真值表法. 如表 1—2 所示

表 1—2

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge Q$	$P \to (P \wedge Q)$	$(P \to Q) \to (P \to (P \wedge Q))$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**

② 假设 $P \to Q$ 为 **T**.

a) 若 P 为 $\boldsymbol{T}$，则 Q 为 $\boldsymbol{T}$，则 $P \wedge Q$ 为 $\boldsymbol{T}$，$P \to (P \wedge Q)$ 为 $\boldsymbol{T}$.

b) 若 P 为 $\boldsymbol{F}$，则 $P \to (P \wedge Q)$ 必为 $\boldsymbol{T}$.

所以　$(P \to Q) \Rightarrow (P \to (P \wedge Q))$ 成立.

③ 假设　$P \to (P \wedge Q)$ 为 $\boldsymbol{F}$，则 P 为 $\boldsymbol{T}$，$P \wedge Q$ 为 $\boldsymbol{F}$，所以 Q 为 $\boldsymbol{F}$，则 $P \to Q$ 为 $\boldsymbol{F}$.

所以　$(P \to Q) \Rightarrow (P \to (P \wedge Q))$ 成立.

④ 等价公式　$(P \to Q) \to (P \to (P \wedge Q))$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to (\neg P \vee (P \wedge Q)) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee ((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q)) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \vee Q \\
&\Leftrightarrow \neg Q \vee Q \vee \neg P \\
&\Leftrightarrow T \vee \neg P \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{T}
\end{aligned}
$$

例 1—4　用推理规则证明 $A \to (B \to C), (C \wedge D) \to E, \neg \boldsymbol{F} \to (D \wedge \neg E) \Rightarrow A \to (B \to \boldsymbol{F})$

分析　利用推理规则进行论证主要有 3 种方法.

① 直接证法：要证明 $H_1, H_2, \cdots, H_n \Rightarrow C$，直接证法就是由前提 $H_1, H_2, \cdots, H_n$，利用一些公认的推理规则（P 规则和 T 规则），根据已知的等价或蕴含公式，推演得到有效的结认论 C.

② 间接证法（反证法）：要证明 $H_1, H_2, \cdots, H_n \Rightarrow C$ 可等价的证明：

$$H_1, H_2, \cdots, H_n, \neg C \Rightarrow \boldsymbol{F}.$$

③ CP 规则：这种方法主要针对结论为 $P \to Q$ 的公式，要证明 $H_1, H_2, \cdots, H_n \Rightarrow P \to Q$，可等价地证明：$H_1, H_2, \cdots, H_n, P \Rightarrow Q$.

证明　① 直接证法

(1) $A \to (B \to C)$	P
(2) $(A \wedge B) \to C$	$\boldsymbol{T}$(1)E
(3) $(C \wedge D) \to E$	P
(4) $C \to (D \to E)$	$\boldsymbol{T}$(3)E
(5) $(A \wedge B) \to (D \to E)$	$\boldsymbol{T}$(2),(4)I
(6) $\neg \boldsymbol{F} \to (D \wedge \neg E)$	P
(7) $\neg \boldsymbol{F} \to \neg(\neg D \vee E)$	$\boldsymbol{T}$(6)E
(8) $(\neg D \vee E) \to \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$(7)E
(9) $(D \to E) \to \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$(8)E
(10) $(A \wedge B) \to \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$(5),(9)I
(11) $A \to (B \to \boldsymbol{F})$	$\boldsymbol{T}$(10)E