常微分方程定性方法的应用

Applications of Qualitative Methods of Ordinary Differential Equations

丁同仁　编著

高等教育出版社

常微分方程定性方法的应用

Applications of Qualitative Methods of Ordinary Differential Equations

丁同仁　编著

高等教育出版社

内容简介

本书内容侧重于常微分方程定性方法在理论研究中的应用,它与作者在北京大学数学系多年从事的常微分方程教学和研究工作有密切的联系,可作为同行教师和研究生的教学参考书.全书共有六章,其标题分别为:常微分方程基础知识,Poincaré 指数及其应用,拓扑动力系统与混沌,对几个公开问题的探讨,Duffing 微分方程的非共振性,和对几个特殊微分方程的分析.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程定性方法的应用/丁同仁编著.—北京:高等教育出版社,2004.1(2005 重印)
ISBN 7-04-013211-7

Ⅰ.常… Ⅱ.丁… Ⅲ.常微分方程—定性理论—研究 Ⅳ.0175.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 121518 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http: //www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http: //www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http: //www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市联华印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2004 年 1 月第 1 版
印　　张	21.5	**印　　次**	2005 年 3 月第 3 次印刷
字　　数	360 000	**定　　价**	27.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　13211－00

序　言

本书内容侧重于常微分方程定性方法在理论研究方面的应用，它与作者在北京大学数学系多年从事的常微分方程教学和研究工作有密切的联系，可作为同行教师和研究生的教学参考书.

第一章从常微分方程的一些古典的定理开始，其实它们也是现代动力系统理论的基础. 作者在教学工作中有机会反复思考这些内容，像嚼橄榄一样品尝到其中滋味. 简单的概念可以是理论发展的轴心. 例如，常微分方程的初值问题从分析解的局部性质到全局性质，从研究运动的确定过程到随机过程，贯串于常微分方程理论发展的整个历史. 所谓确定过程是指初值问题解的存在和唯一性，它在有限时间内蕴含解对初值的稳定性. 这意味着常微分方程初值问题的解在有限时间内是可以预报的. 另外，解的存在和唯一性也蕴含一般差分计算的收敛性，这为差分方法在常微分方程的应用提供了最简单的条件. 而所谓随机过程说的是， Poincaré 发现某些微分方程初值问题的解在无限时间内是不可预报的，其原因在于这种解在无限时间内对初值是敏感的 (从而是不稳定的). 这也是现代混沌学的核心.

第二章介绍了有关向量场和不动点定理的基本知识，其中 Poincaré-Bohl 不动点定理和 Poincaré-Birkhoff 扭转定理是重点内容，因为它们在本书有多次的应用. 其次，我们按 Poincaré 指数的定义就闭曲线上的向量场证明了 Poincaré-Bendixson 的指数公式，而且在闭曲面上对 Poincaré-Hopf 的指数公式给出一个非传统的证明. 另外，我们还介绍了 Littlewood 关于 Brouwer 不动点定理的推广.

第三章的主要内容是拓扑动力系统的基础知识，其核心思想是运动的各种回复性，它们是周期性不同的推广. 首先是在 Poisson 意义下的所谓 P-式回复运动以及相关的准极小集；其次是由 Birkhoff 发现的所谓 B-式回复运动及其与极小集的联系，包括对 Poincaré-Bendixson 定理的推广；最后是概周期运动，其中一个经典的定理是： B-式回复运动是概周期的当且仅当它对轨线的闭包是 Liapunov 稳定的.

然后，作为古典动力系统的发展，我们按 Wiggins 的定义介绍了混沌运动的基本知识，它的特征是对初值的敏感性. 因此，混沌运动不是概周期的运动. 值得注意，混沌运动是准极小集内的 P-式回复运动，但重要的问题是逆命题何时成立？另外，有例子表明混沌运动与几何病态 (如

分形) 没有内在的联系.

第四章的内容是对几个公开问题的探讨. 例如, Birkhoff 关于"解析的 B-式回复运动存在性"的猜测, Morse 关于"解析的拓扑传递性蕴含度量传递性"的猜测, 和 Kolmogorov 关于"近可积 Hamilton 系统的不变混合环面的存在性"问题等. 它们的背景是不相同的, 但都涉及到一个核心的问题: 动力系统的拓扑传递性在何种条件下蕴含怎样的复杂性? 在二维流形上我们对这个问题有简单的答案: 当奇点的个数是正整数时, 拓扑传递性蕴含强混合性 (从而也蕴含混沌).

第五章主要研究 Duffing 方程 $\ddot{x}+g(x)=p(t)(\equiv p(t+T))$ 的非共振性问题, 其实这与周期解的存在性是二而为一的问题. 早期的非线性分析大致上是踩着线性方程的脚印前进的. 例如, 所谓 Duffing 方程的非共振性条件总要求"弹性集"

$$\Upsilon=\left\{y\in\mathbb{R}:\quad \liminf_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}\leq y\leq \limsup_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}\right\}$$

不含共振点 $\lambda_j=(2j\pi)^2/T^2\,(j\in\mathbb{Z}^+)$. 事实上, 这是线性 Duffing 方程的非共振性条件的一种推广, 因为对线性的 Duffing 方程而言"弹性集"就是弹性系数. 本章按 Duffing 方程的类型分析了时间映射, 得到了关于调和解、次调和解存在性与多解性的某些条件, 它们允许上述"弹性集" Υ 包含一个或多个共振点. 另外, 我们也能够构造一些发生非线性共振现象的 Duffing 方程, 使得相应的"弹性集" Υ 包含一个或多个共振点.

第六章讨论了一些类型不同的非线性微分方程, 其中没有统一的主题和现成的方法. 对特殊的方程进行特殊的分析, 这实际上是微分方程传统的方法.

需要特别声明, 本书最后两章的内容包含了作者与 Fabio Zanolin 教授合作的文章, 在写作过程中还经常与他商讨一些疑难的问题; 另外, 还有李承治、王铎和柳彬诸位教授给了许多及时的帮助. 作者在此向他们一并表示由衷的感谢. 同时, 要感谢高等教育出版社郭思旭同志对出版本书的大力支持和严谨审阅. 最后, 还要感谢夫人吕景华的理解和支持.

作者 *)

于 2003 年

*) 本书的写作得到国家自然科学重点基金项目的支持

策划编辑　李　蕊
责任编辑　郭思旭
封面设计　李卫青
责任印制　杨　明

郑重声明

目　录

第五章 Duffing 方程的非共振性

第一章　常微分方程基础知识

§1. 初值问题

1.1) 解的适定性

一般而言，n 阶的常微分方程可以写成如下的形式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1}$$

其中 $f(t,x)$ 的定义域为 $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, 而且 $f: D \to \mathbb{R}^n$. 我们也称 D 为微分方程 (1.1) 的 *定义域*. 为了讨论的方便，不妨假定 D 是开的区域.

注意，在微分方程 (1.1) 中 $t \in \mathbb{R}$ 所扮演的角色是自变量，而 $x \in \mathbb{R}^n$ 代表未知函数 $x = x(t)$.

假设函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 $J \subset \mathbb{R}$ 上是连续的，而且满足方程 (1.1), 亦即

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad (\,t \in J\,),$$

则称 $x = \varphi(t)$ 是 *微分方程 (1.1)(在区间 J 上) 的解*.

通常，人们所考虑的解需要满足一定的初值条件:

$$x(t_0) = x_0 \qquad (\text{这里初值点 } (t_0, x_0) \in D\,). \tag{1.2}$$

所谓 *初值问题 (1.1)+(1.2) 的解* 就是微分方程 (1.1) 满足初值条件 (1.2) 的解 $x = \varphi(t)$. 初值问题有时也叫作 Cauchy *问题*. 为了方便，通常把初值问题 (1.1)+(1.2) 简写成:

$$(E_0): \qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0\,.$$

在几何上初值问题 (E_0) 的解 $x = \varphi(t)$ 表示微分方程 (1.1) 通过初值点 (t_0, x_0) 的一条 *积分曲线* $\Gamma_0 \subset D$.

初值问题在微分方程理论中是一个基本问题. 这里首先需要考虑有关解的 *存在性和唯一性*, 以及解对 *初值的依赖性* 等问题. 实际上，这些问题的解答离不开微分方程的基本定理，而它们正是微分方程理论的基础 (参考 I:[2],[4],[5] 和 [9] 等).

对这些基本定理我们将作简单的介绍. 因为它们只涉及解的局部性质，所以我们的讨论不妨限于初值点 (t_0, x_0) 的某个矩形的局部邻域

$$Q = \{\ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n: \quad |t - t_0| \le a, \quad |x - x_0| \le b\ \} \subset D$$

内，其中 $a>0$ 和 $b>0$ 是适当小的常数. 然后，设定常数

$$M > \sup_{(t,x)\in Q} |f(t,x)| \qquad \text{和} \qquad h = \min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}.$$

定理 1.1 设 $f(t,x)$ 在 Q 上是连续的，则初值问题 (E_0) 的解在区间 $|t-t_0|\le h$ 上是存在的.

定理 1.2 设 $f(t,x)$ 在 Q 上是连续的，并对 x 满足李氏条件

$$|f(t,x)-f(t,y)| \le L|x-y| \tag{1.3}$$

其中 (t,x) 和 $(t,y)\in Q$, 而 (李氏) 常数 $L>0$. 则初值问题 (E_0) 的解在区间 $|t-t_0|\le h$ 上是存在和唯一的.

在一般文献上，定理 1.1 和定理 1.2 分别叫作 Peano 存在性定理和 Cauchy-Lipschitz 存在唯一性定理.

通常，初值是由测量得到的，而且实测的初值条件

$$x(\tau)=\xi \tag{1.2*}$$

与理论的初值条件 (1.2) 难免出现偏差. 不过，通常知道实测的初值 (τ,ξ) 满足一定的误差条件，例如：

$$|\tau-t_0| \le \frac{h}{4}, \qquad |\xi-x_0| \le \frac{b}{2}. \tag{1.4}$$

这样，我们需要讨论：相应初值问题 $(1.1)+(1.2^*)$ 的解关于初值的依赖性？ 为此，假设初值变动的区域为

$$U=\left\{(\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n:\quad |\tau-t_0|\le\frac{h}{4},\quad |\xi-x_0|\le\frac{b}{2}\right\}\subset Q.$$

现在把初值问题 $(1.1)+(1.2^*)$ 简写为

$$(E):\qquad \frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad x(\tau)=\xi,$$

而且以 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 表示相应的解. 然后，我们可以在区域

$$G=\left\{(t,\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n:\quad |t-t_0|\le\frac{h}{4},\quad (\tau,\xi)\in U\right\}$$

内讨论解 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 的性质.

定理 1.3 设 $f(t,x)$ 在矩形区域 Q 上是连续的，而且对 x 满足李氏条件 (1.3). 再设初值 (τ,ξ) 满足条件 (1.4). 则初值问题 (E) 的解 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 对 $(t,\tau,\xi)\in G$ 是连续的.

这个结论通常叫作：初值问题 (E) 的解 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 对初值 (τ,ξ) 是连续的.

如果初值问题的解是存在和唯一的，而且对初值是连续的，则称它是适定的. 因此，在定理 1.3 的条件下，初值问题 (E) 的解是适定的.

定理 1.4 设 $f(t,x)$ 在 Q 上是连续的，而且对 x 的偏导数 $f'_x(t,x)$ 也是连续的. 假设初值 (τ,ξ) 满足条件 (1.4). 则初值问题 (E) 的解 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 对 $(t,\tau,\xi)\in G$ 是连续可微的.

这个结论也叫作：初值问题 (E) 的解 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$对初值 (τ,ξ) 是连续可微的.

在一般的文献中，对这些定理的证明通常采用 Euler 折线逼近法或 Picard 逐次逼近法. 不过，Euler 折线法仅适用于定理 1.1 ~ 1.3 的证明，而不适用于定理 1.4; Picard 逐次逼近法仅适用于定理 1.2 ~ 1.4 的证明，却不适用于定理 1.1 (参考 I:[2]). 我们在下面将利用修正的 Tonelli 序列对定理 1.1 ~ 1.4 作出一揽子的证明.

1.2) Tonelli **序列**

对初值问题 (E_0), Tonelli (1910's) 设计了一种比较简明的近似解序列. 亦即，对任何整数 $m\geq 1$, 令

$$\phi_m(t)=\begin{cases} x_0\ , & t\in[t_0-\frac{h}{m},t_0+\frac{h}{m}],\\ x_0+\int_{t_0}^{t-\frac{h}{m}} f(t,\phi_m(t))\,dt, & t\in[t_0+\frac{h}{m},t_0+h],\\ x_0+\int_{t_0}^{t+\frac{h}{m}} f(t,\phi_m(t))\,dt, & t\in[t_0-h,t_0-\frac{h}{m}]. \end{cases} \tag{1.5}$$

它叫作 Tonelli 序列. 由 (1.5) 可见， Tonneli 序列 $\phi_m(t)$ 在区间 $[t_0,t_0+h]$ 上的定义首先从区间 $[t_0,t_0+\frac{h}{m}]$ 开始，然后按步长 $\frac{h}{m}$ 依次向右扩展到区间 $[t_0,t_0+h]$; 同样，在区间 $[t_0-h,t_0]$ 上的定义从区间 $[t_0-\frac{h}{m},t_0]$ 开始，然后按步长 $\frac{h}{m}$ 依次向左扩展到区间 $[t_0-h,t_0]$.

定理 1.1 和 1.2 的证明概要：对初值问题 (E_0), 可以构造考虑 Tonelli 序列 (1.5). 而且当 $f(t,x)$ 在 Q 上连续时，容易证明 Tonelli 序列 $\{\phi_m(t)\}$ 满足：

$$|\phi_m(t)-x_0|\leq Mh,\qquad t\in[t_0-h,t_0+h]$$

和

$$|\phi_m(t_2) - \phi_m(t_1)| \le M|t_2 - t_1|,$$

这里 t_1，$t_2 \in [t_0 - h, t_0 + h]$. 由此可见，序列 $\{\phi_m(t)\}$ 对 $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ 是一致有界和等度连续的.

因此，根据 Ascoli 引理，它至少有一个一致收敛的子序列 $\{\phi_{m_i}(t)\}$. 令

$$\phi(t) = \lim_{m_i \to \infty} \phi_{m_i}(t) \qquad (t_0 - h \le t \le t_0 + h),$$

则 $\phi(t)$ 在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上是连续的. 然后，在 (1.5) 中取 $m = m_i$，再令 $m_i \to \infty$. 则由 $\{\phi_{m_i}(t)\}$ 的一致收敛性直接推出

$$\phi(t) = x_0 + \int_0^t f(t, \phi(t))\, dt \qquad (t_0 - h \le t \le t_0 + h).$$

这就是说，$x = \phi(t)$ 在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上是初值问题 (E_0) 的解. 定理 1.1 得证.

从上面的证明知道，$f(t, x)$ 的连续性保证了上述初值问题解的存在性. 另一方面，在常微分方程的课程中大家已经知道，李氏条件保证了解的唯一性. 因此，定理 1.2 成立.　　$\Diamond$

在往后的讨论中我们需要下述 Gronwall 引理，它是估计某些积分不等式的重要工具.

Gronwall **引理**　*设连续函数 $u(t)$ 满足不等式*

$$0 \le u(t) \le C + \int_{t_0}^t [a(t)u(t) + K]\, dt \qquad (t_0 \le t \le t_1),$$

其中 $a(t) \ge 0$ 是连续函数，$C \ge 0$ 和 $K \ge 0$ 是常数. 则

$$u(t) \le [C + K(t - t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t a(t)\, dt\right) \qquad (t_0 \le t \le t_1).$$

(读者不难自行证明，也可参考 I:[5].)

定理 1.3 的证明概要：　对初值问题 (E) 可以在区间 $[\tau - \frac{h}{2}, \tau + \frac{h}{2}]$ 上作 Tonelli 序列：

$$\Phi_m(t) = \begin{cases} \xi\,, & t \in [\tau - \frac{h}{2m}, \tau + \frac{h}{2m}], \\ \xi + \int_\tau^{t - \frac{h}{2m}} f(t, \Phi_m(t))\, dt, & t \in [\tau + \frac{h}{2m}, \tau + \frac{h}{2}], \\ \xi + \int_\tau^{t + \frac{h}{2m}} f(t, \Phi_m(t))\, dt, & t \in [\tau - \frac{h}{2}, \tau - \frac{h}{2m}], \end{cases} \qquad (1.6)$$