概率论与数理统计

崔秋珍 主编

Gailülun
yu
Shuli
Tongji

武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

概率论与数理统计

主　编　崔秋珍

副主编　程志谦　时红霞

武汉理工大学出版社

武汉

内 容 提 要

本书较为系统地介绍了概率论与数理统计这门数学学科的基本知识，全书大体上可以分为三个部分：1～4 章为第一部分，主要讲解概率论的基础知识，5～7 章为第二部分，主要讲解数理统计的基础知识；8～9 章为第三部分，主要介绍这门学科知识的综合运用。在内容上，注意由浅入深，详略得当，非常适合高职高专的教学特点。全书重知识介绍、实践运用，少深奥的理论推导。书中实例贴近生活，较为生动，语言文字流畅，于平实中蕴含深刻。本书的更多特色之处，还希望读者在实际使用过程中去体会。

本书每章均附有习题，书末附有答案及常用统计分布表，使本书既便于教学使用，又适于自学。全书内容难度适中，适于高职高专学校选作教材，也可供相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/崔秋珍主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2006.9

ISBN 7-5629-2443-0

Ⅰ.概... Ⅱ.崔... Ⅲ.①概率论 ②数理统计

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 109144 号

出版发行：武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路 122 号 邮政编码：430070)

http://www.techbook.com.cn

E-mail：wutpyyk@163.com

经销者：各地新华书店

印刷者：武汉理工大印刷厂

开 本：787×960 1/16

印 张：10

字 数：197 千字

版 次：2006 年 9 月第 1 版

印 次：2006 年 9 月第 1 次印刷

印 数：1～4 000 册

定 价：15.00 元

前　言

概率论与数理统计是对随机现象进行演绎与归纳的科学，是从数量上研究随机现象客观规律的一门数学学科. 当前，概率论与数理统计知识已广泛应用于自然科学、社会科学、工程科学、工农业生产和军事技术中，是科技工作者和经济师们常用的数学工具，是大多数专业学生必修的一门专业基础课.

本书是根据教育部最新颁布的《高等工程专科学校课程教学的基本要求》编写的，与已正式出版的《高等数学》、《线性代数与线性规划》教材配套，供专科数学课程教学使用.

在编写中，我们力求体现专科教材特色，尝试对教学内容进行一些改革. 在内容选取上以“必须、够用”为原则，侧重概念和应用，不拘泥于理论推导和繁杂运算. 在内容的编排上，以基本概念、结论和方法为主，以一维随机变量和常用统计方法为重点. 书中标有 * 号的章节为选修内容.

全书分为九章，分别介绍随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析、正交试验设计. 每章配有习题，书末附有习题答案.

编写安排：第一章：程志谦、李平；第二章：崔秋珍；第三章：李守英；第四章：亢金轩；第五、六章：时红霞、赵武超；第七、九章：运士伟；第八章：许超. 全书由崔秋珍和程志谦统稿.

限于编者水平，加上时间仓促，书中难免有不足之处，敬请读者指正.

编　者

2006 年 6 月于洛阳

目　　录

第一章 随机事件与概率

第一节 随机现象与随机事件

一、概率论简介

1. 概率论的诞生

1654 年，一个名叫梅累的骑士就“两个赌徒约定赌若干局，且谁先赢 c 局便算赢家，若一赌徒胜 a 局($a<c$)，另一赌徒胜 b 局($b<c$)时便终止赌博. 问应如何分赌本”为题求教于帕斯卡，帕斯卡与费马通信讨论这一问题，于 1654 年共同建立了概率论的第一个基本概念——数学期望.

2. 概率论在实际中的应用

概率论就是研究随机现象规律性的一门数学学科，是数学的一个分支. 它研究随机现象的数量规律. 一方面，它有自己独特的概念和方法；另一方面，它与其他数学分支又有紧密的联系，它是现代数学的重要组成部分. 概率论的应用几乎遍及所有的科学技术领域，例如天气预报、地震预报、产品的抽样调查、工农业生产和国民经济的各个部门，在通讯工程中还可用来提高信号的抗干扰性、分辨率等.

二、随机现象

自然界和社会上所观察到的现象可分为：确定性现象与随机现象.

确定性现象：在一定条件下必然发生的现象.

确定性现象的特征：条件完全决定结果.

例如：(1)水在标准大气压下加热到 100℃时会沸腾；

(2)口袋中有 10 个白球，从中任取一球一定是白球.

随机现象：在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果，这种现象称为随机现象.

随机现象的特征：条件不能完全决定结果.

例如：(1)买一张彩票中大奖；

(2)口袋中有 10 个白球，5 个黑球，从中任取一球是白球；

(3)掷一枚硬币出现数字面.

随机现象有以下两个性质：

(1)随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述.

(2)随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性. 概率论就是研究随机现象这种规律的一门数学学科.

如何来研究随机现象？随机现象是通过随机试验来研究的.

三、随机试验

我们遇到过各种试验，在这里，我们把试验作为一个含义广泛的术语，它包括各种各样的科学试验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 下面举一些试验的例子：

(1)抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

(2)将一枚硬币抛三次，观察出现的结果；

(3)抛一粒骰子，观察出现的点数；

(4)记录车站售票处一天内售出的车票数；

(5)在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命；

(6)记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

这些试验都具有以下的特点：

(1)可以在相同的条件下重复地进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**.

四、样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的一切可能的结果是已知的，我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间(必然事件)**，记为 Ω；样本空间的元素，即 E 的每个结果称为**样本点(基本事件)**，记为 ω. 例如，上面的 6 个随机试验的样本空间分别为：

$\Omega_1=\{H,T\}$；

$\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$；

$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots,n\}$，这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数；

$\Omega_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_6=\{(x,y) \mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度. 并设这一地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1.

五、随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的结果称为**随机事件**，简称**事件**. 随机事件常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，它是样本空间 Ω 的子集合. 在每次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A **发生**.

例如在 E_3 中，如果用 A 表示事件"掷出奇点数"，那么 A 是一个随机事件. 由于在一次投掷中，当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时才称事件 A 发生了，所以我们把事件 A 表示为 $A=\{1,3,5\}$. 同样地，若用 B 表示事件"掷出偶点数"，那么 B 也是一个随机事件，$B=\{2,4,6\}$.

对于一个随机试验 E，在每次试验中必然发生的事件，称为 E 的**必然事件**，记为 Ω；在每次试验中都不发生的事件，称为 E 的**不可能事件**，记为$\varnothing$. 例如在 E_3 中，"掷出的点数不超过 6"就是必然事件，用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$. 而事件"掷出的点数大于 6"是不可能事件，这个事件不包括 E_3 的任何一个可能结果，所以用空集$\varnothing$表示. 对于一个试验 E，它的样本空间 Ω 是 E 的必然事件；空集$\varnothing$是不可能事件. 必然事件与不可能事件虽已无随机性可言，但在概率论中，常把它们当作两个特殊的随机事件，这样做是为了数学处理上的方便.

六、事件间的关系与运算

因为事件是一个集合，因而事件间的关系和运算是按集合间的关系和运算来处理的. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据"事件发生"的含义，给出它们在概率论中的含义.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，不可能事件为$\varnothing$，A、B、$A_k(k=1,2,\cdots)$是随机试验 E 的随机事件.

(1)事件的包含与相等

若 事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 A 包含于事件 B**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称**事件 A 与事件 B 相等**. 即 $A=B$.

(2)事件的并(和)

"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"的事件称为**事件 A 与事件 B 的并(和)事件**，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 事件 $A\cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生.

事件的并可以推广到多个事件的情形. 设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义它们的和事件为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$，记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$.

(3)事件的交(积)

“事件 A 与事件 B 同时发生”的事件称为**事件 A 与事件 B 的交(积)事件**,记为 $A\cap B$,也简记为 AB. 事件 $A\cap B$(或 AB)发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生,即 A 与 B 同时发生.

类似地,可以定义 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生$\}$.

(4)事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件称为**事件 A 与事件 B 的差事件**,记为 $A-B$.

(5)互斥事件(互不相容)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,则称**事件 A 与事件 B 互斥**,或称它们是**互不相容**的. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互斥,则称这些事件是两两互斥的.

(6)对立事件

“A 不发生”的事件称为**事件 A 的对立事件**,记为 $\overline{A}$. A 和 $\overline{A}$ 满足:$A\cup\overline{A}=\Omega$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$, $\overline{\overline{A}}=A$.

(7)事件运算满足的定律

设 A、B、C 为事件,则有

交换律:$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$.

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1　向指定目标射三枪,观察射中目标的情况. 用 A_1、A_2、A_3 分别表示事件“第一、二、三枪击中目标”,试用 A_1、A_2、A_3 表示以下各事件:

(1)只击中第一枪;

(2)只击中一枪;

(3)三枪都没击中;

(4)至少击中一枪.

解　(1)事件“只击中第一枪”,意味着第二枪不中,第三枪也不中. 所以,可以表示成 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(2)事件“只击中一枪”,并不指定哪一枪击中. 三个事件“只击中第一枪”、“只击中第二枪”、“只击中第三枪”中,任意一个发生,都意味着事件“只击中一枪”发生. 同时,因为上述三个事件互不相容,所以,可以表示成 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup$

$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(3)事件“三枪都没击中”，就是事件“第一、二、三枪都未击中”，所以，可以表示成 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(4)事件“至少击中一枪”，就是事件“第一、二、三枪中至少有一次击中”，所以，可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$. 或 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

第二节　概率的统计定义

一、频率

设 E 为一随机试验，A 为其任一事件，在相同条件下，把 E 独立地重复做 n 次，n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为频数)，比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.1}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率.

人们在实践中发现：在相同条件下重复进行同一试验，当试验次数 n 很大时，某事件 A 发生的频率具有一定的“稳定性”，就是说其值在某确定的数值上下摆动. 一般地说，试验次数 n 越大，事件 A 发生的频率就越接近那个确定的数值. 因此事件 A 发生的可能性的大小就可以用这个数量指标来描述.

历史上有一些著名的试验，为我们提供了直观的背景. 如表 1-1 为一个掷硬币试验及其统计结果.

表 1-1

试验者	掷硬币次数	出现正面的次数	频率
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

这些试验的结果是很有启发性的，虽然事件 $A=\{出现正面\}$ 在一次试验中可能发生也可能不发生，但在大量重复试验中，它出现的频率稳定在 0.5 附近.

二、概率的统计定义

定义 1.1　设有随机试验 E，若当试验的次数 n 逐渐增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某常数 p，则称数 p 为事件 A 发生的**概率**，记为：

$$P(A)=p. \tag{1.2}$$

概率的这种定义，称为概率的统计定义，统计定义是以试验为基础的，但这并不是说概率取决于试验. 值得注意的是事件 A 发生的概率是事件 A 的一种属性. 就是说完全决定于事件 A 本身的结果，是先于试验客观存在的. 概率的统计定义只是描述性的，一般不能用来计算事件的概率. 通常只能在 n 充分大时，以事件出现的频率作为事件概率的近似值.

三、概率的性质

性质 1　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

性质 2　$P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1$；

性质 3　若 $AB=\varnothing$，则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$；

性质 4　$P(\overline{A})=1-P(A)$；

性质 5　$P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$；

特别地，若 $A \subset B, P(B-A)=P(B)-P(A)$；

性质 6　对任意两个事件 A、B，有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.3}$$

这个公式称为加法公式.

这条性质可以推广到多个事件. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是任意 n 个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_i A_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) +\cdots+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n). \tag{1.4}$$

例 1　设事件 A、B 的概率分别为 $1/3, 1/2$. 在下列三种情况下分别求 $P(B\overline{A})$ 的值：

(1) A 与 B 互斥；

(2) $A \subset B$；

(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解　由性质 5，$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$.

(1) 因为 A 与 B 互斥，所以 $AB=\varnothing$，

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}.$$

(2) 因为 $A \subset B$，所以

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

(3) $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

第三节　古典概型

一、古典概型(等可能概型)

“概型”是指某种概率模型.“古典概型”是一种最简单、最直观的概率模型. 如果某个随机试验 E 满足下面两个条件:

(1)试验的样本空间的元素只有有限个;

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有上述特点的概型称为**古典概型**或**等可能概型**.

下面介绍古典概型中事件概率的计算.

设在古典概型中,试验 E 共有 n 个基本事件,事件 A 包含了 m 个基本事件,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.5}$$

例 1　一袋中有 8 个大小相同的球,其中 5 个黑色球,3 个白色球. 现从袋中随机地取出两个球,求取出的两球都是黑色球的概率.

解　从 8 个球中取出两个,不同的取法有 C_8^2 种. 若以 A 表示事件{取出的两球是黑球},那么使事件 A 发生的取法为 C_5^2 种,从而

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}.$$

例 2　在箱中装有 100 个产品,其中有 3 个次品,为检查产品质量,从这箱产品中任意抽取 5 个,求抽取的 5 个产品中恰有一个次品的概率.

解　从 100 个产品中任意抽取 5 个产品,共有 C_{100}^5 种抽取方法,事件 A={有 1 个次品,4 个正品}的取法共有 $C_3^1C_{97}^4$ 种取法,故得事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_3^1C_{97}^4}{C_{100}^5}\approx 0.138.$$

例 3　将 N 个球随机地放入 n 个盒子中($n>N$),求:

(1)每个盒子最多有一个球的概率;

(2)某指定的盒子中恰有 $m(m<N)$ 个球的概率.

解　这显然也是等可能问题.

先求 N 个球随机地放入 n 个盒子的方法总数. 因为每个球都可以落入 n 个盒子中的任何一个,有 n 种不同的放法,所以 N 个球放入 n 个盒子共有 $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{N}=n^N$ 种不同的放法.

(1)事件 A={每个盒子最多有一个球}的放法. 第一个球可以放进 n 个盒子之

一，有 n 种放法；第二个球只能放进余下的 $n-1$ 个盒子之一，有 $n-1$ 种放法；…；第 N 个球只能放进余下的 $n-N+1$ 个盒子之一，有 $n-N+1$ 种放法，所以共有 $n(n-1)\cdots(n-N+1)$ 种不同的放法. 故得事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{n^N}.$$

(2)事件 $B=\{$某指定的盒子中恰有 m 个球$\}$的放法. 先从 N 个球中任选 m 个分配到指定的某个盒子中，共有 C_N^m 种选法；再将剩下的 $N-m$ 个球任意分配到剩下的 $n-1$ 个盒子中，共有 $(n-1)^{N-m}$ 种放法. 所以事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{C_N^m(n-1)^{N-m}}{n^N}.$$

例 4　在 1～9 的整数中可重复地随机取 6 个数字组成 6 位数，求下列事件的概率：

(1)6 个数字完全不同；

(2)6 个数字不含奇数；

(3)6 个数字中的 5 恰好出现 4 次.

解　从 9 个数字中允许重复地取 6 个进行排列，共有 9^6 种排列方法.

(1)事件 $A=\{6$ 个数字完全不同$\}$的取法有 $9\times8\times7\times6\times5\times4$ 种，故

$$P(A)=\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{9^6}=0.11.$$

(2)事件 $B=\{6$ 个数字不含奇数$\}$的取法. 因为 6 个数字只能在 2，4，6，8 四个中选，每次有 4 种取法，所以有 4^6 取法. 故

$$P(B)=\frac{4^6}{9^6}.$$

(3)事件 $C=\{6$ 个数字中 5 恰好出现 4 次$\}$的取法. 因为 6 个数字中 5 恰好出现 4 次可以是 6 次中的任意 4 次，出现的方式有 C_6^4 种，剩下的两数字只能在 1，2，3，4，6，7，8，9 中任取，共有 8^2 种取法. 故

$$P(C)=\frac{C_6^4 8^2}{9^6}.$$

二、几何概型

上述古典概率是在有限样本空间下进行的，为了克服这种局限性，我们将古典概型推广.

如果一个试验具有以下两个特点：

(1)样本空间 Ω 是一个大小可以计量的几何区域(如线段、平面、立体).

(2)向区域 Ω 内任意投一点，落在区域 A 内可能性的大小与 A 的度量成正比，而与 A 的位置无关.

那么，事件 A 的概率由式(1.6)计算：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}. \tag{1.6}$$

例 5　在一个均匀陀螺的圆周上均匀地刻上[0,4]上的所有实数，旋转陀螺，求陀螺停下来后，圆周与桌面的接触点位于[0.5,1]上的概率.

解

$$P(A)=\frac{\text{区间}[0.5,\ 1]\text{的长度}}{\text{区间}[0,\ 4]\text{的长度}}=\frac{0.5}{4}=\frac{1}{8}.$$

例 6　甲乙两人相约 8～12 点在预定地点会面. 先到的人等候另一人 30 分钟后离去，求甲乙两人能会面的概率.

解　以 X、Y 分别表示甲、乙两人到达的时刻，那么 $8\leqslant X\leqslant 12$，$8\leqslant Y\leqslant 12$；若以 (X,Y) 表示平面上的点的坐标，则所有基本事件可以用这平面上的边长为 4 的一个正方形：$8\leqslant X\leqslant 12$，$8\leqslant Y\leqslant 12$ 内所有点表示出来. 两人能会面的充要条件是 $|X-Y|\leqslant 1/2$（图 1-1 中阴影部分），所以所求的概率为：

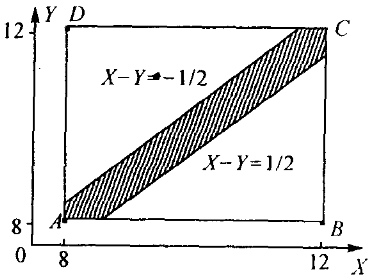

图 1-1

$$P=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形 }ABCD\text{ 的面积}}=\frac{16-2\times\left[\frac{1}{2}\times\left(4-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{16}=\frac{15}{64}.$$

第四节　条件概率与乘法公式

一、条件概率

在实际问题中，常常会遇到这样的问题：在得到某个信息 A 以后（即在已知事件 A 发生的条件下），求事件 B 发生的概率. 这时，因为求 B 的概率是在已知 A 发生的条件下，所以称为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率，简称**条件概率**，记为 $P(B|A)$.

由此引入条件概率的一般定义：

定义 1.2　设 A、B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.7}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

计算条件概率可选择两种方法之一：

(1)在缩小后的样本空间中计算 B 发生的概率 $P(B|A)$.

(2)在原样本空间 Ω 中,先计算 $P(AB)$、$P(A)$,再按公式

$$P(B|A)=P(AB)/P(A)$$

计算,求得 $P(B|A)$.

例 1 设某种动物由出生起活 20 岁以上的概率为 80%,活 25 岁以上的概率为 40%.如果现在有一个 20 岁的这种动物,问它能活 25 岁以上的概率?

解 设事件 $A=\{$能活 20 岁以上$\}$;事件 $B=\{$能活 25 岁以上$\}$.按题意,$P(A)=0.8$,由于 $B\subset A$,因此 $P(AB)=P(B)=0.4$.由条件概率定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5.$$

例 2 掷两粒骰子,已知点数和出现了偶数,求点数和大于 9 的概率.

解 设事件 $A=\{$出现偶数$\}$;事件 $B=\{$点数和大于 9 $\}$.按题意,$P(A)=0.5$,$P(B)=1/6$,因此 $P(AB)=1/9$.由条件概率定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{9}}{0.5}=\frac{2}{9}.$$

二、乘法公式

由条件概率的定义容易推得概率的乘法公式:

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) \tag{1.8}$$

利用这个公式可以计算积事件的概率.乘法公式可以推广到 n 个事件的情形:

若 $P(A_1),P(A_2),\cdots,P(A_n)>0$,则

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) \tag{1.9}$$

例 3 在一批由 90 件正品、3 件次品组成的产品中,不放回地接连抽取两件产品,问第一件取正品,第二件取次品的概率.

解 设事件 $A=\{$第一件取正品$\}$,事件 $B=\{$第二件取次品$\}$.

按题意,

$$P(A)=\frac{90}{93},\quad P(B|A)=\frac{3}{92}$$

由乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{90}{93}\times\frac{3}{92}=0.0315.$$

三、全概率公式

为了计算复杂事件的概率,经常把一个复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件的和,通过分别计算简单事件的概率,求得复杂事件的概率.

全概率公式：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个事件组，且满足：

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$；

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$.

则对 Ω 中的任意一个事件 B，有

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n) \tag{1.10}$$

证明　因为

$$B=B\Omega=B(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=BA_1\cup BA_2\cup\cdots\cup BA_n$$

由假设 $(BA_i)\cap(BA_j)=\varnothing,i\neq j$，得到

$$\begin{aligned}P(B)&=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n)\\&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n).\end{aligned}$$

例 4　7 人轮流抽签，抽一张参观票，问第二个人抽到的概率？

解　设 $A_i=\{$第 i 个人抽到参观票$\}(i=1,2)$，于是

$$P(A_1)=\frac{1}{7},\quad P(\overline{A_1})=\frac{6}{7},\quad P(A_2|A_1)=0,\quad P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{1}{6}$$

由全概率公式

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=0+\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{7}$$

从这道题我们可以看到，第一个人和第二个人抽到参观票的概率一样；事实上，每个人抽到的概率都一样. 这就是“抽签不分先后原理”.

例 5　设一仓库有一批产品，已知其中 50%、30%、20%依次是甲、乙、丙厂生产的，且甲、乙、丙厂生产的次品率分别为 1/10，1/15，1/20，现从这批产品中任取一件，求取得正品的概率？

解　以 A_1 表示事件“取得的这件产品是甲厂生产”，A_2 表示事件“取得的这件产品是乙厂生产”，A_3 表示事件“取得的这件产品是丙厂生产”，B 表示事件“取得的产品为正品”，于是

$$P(A_1)=\frac{5}{10},\quad P(A_2)=\frac{3}{10},\quad P(A_3)=\frac{2}{10};$$

$$P(B|A_1)=\frac{9}{10},\quad P(B|A_2)=\frac{14}{15},\quad P(B|A_3)=\frac{19}{20}.$$

按全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=\frac{5}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{14}{15}+\frac{2}{10}\times\frac{19}{20}=0.92\end{aligned}$$

四、贝叶斯公式

设 B 是样本空间 Ω 的一个事件，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个事件组，且满足：