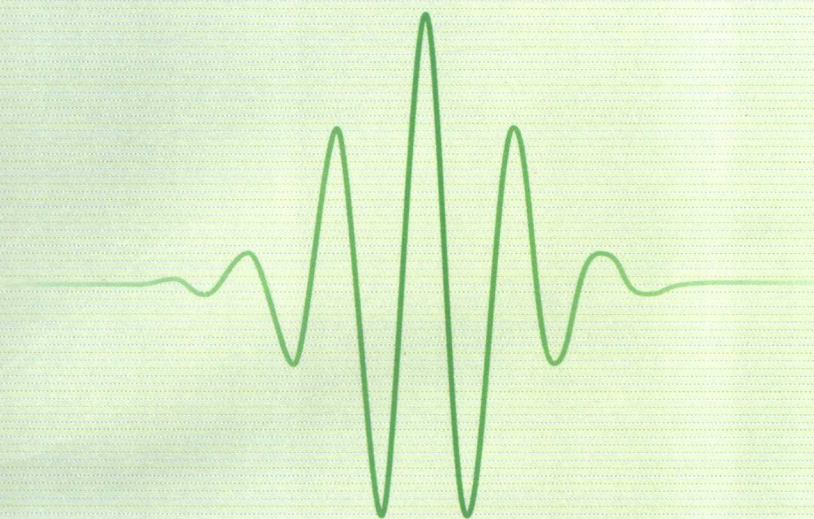


# 小波分析

## 理论、算法及其应用

(美) Jaideva C. Goswami Andrew K. Chan 著  
许天周 黄春光 译



国防工业出版社  
National Defense Industry Press



著作权合同登记 图字:军—2005—046号

图书在版编目(CIP)数据

小波分析理论、算法及其应用/(美)戈斯瓦米  
(Goswami J. C.), (美)钱(Chan A. K.)著;许天周,黄春光译.  
—北京:国防工业出版社,2007.2  
书名原文:Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications  
ISBN 7-118-04824-0

I. 小… II. ①戈…②钱…③许…④黄… III. 小波分析  
IV. 0177

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第122600号

Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications (by Jaideva C. Goswami, Andrew K. Chan)

Copyright© 1999 by John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved. This translation under license.  
本书中文简体字版专有出版权归国防工业出版社所有,翻版必究。

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

腾飞胶印厂印刷

新华书店经售

\*

开本 787×1092 1/16 印张 15½ 字数 350千字

2007年2月第1版第1次印刷 印数 1—4000册 定价 27.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

# 前 言

本书选材于作者在 Texas A&M 大学电子工程系为本科生和研究生讲授小波课程的材料以及在 Texas A&M 大学举行的几次短期培训课程和会议论文集,包括电磁学研究进展论文集(PIERS)、IEEE 无线与传播(IEEE-AP)论文集、IEEE 微波理论与技术(IEEE-MTT)会议论文集、计算电磁协会(ACES)会议论文集。参加短期课程培训的人员来自工业界和大学。他们主要具有电子工程、物理学和数学的背景知识,对小波一点不懂或知道的甚少。在准备讲稿时,我们参考了小波方面的许多书,有些书适合数学家和物理学家,而其他则更适合具有信号处理背景知识的工程师。因此,我们觉得写一本这样的书是有必要的。该书应该将小波的理论、算法及其应用结合在一起,使读者更容易学习小波并能够利用小波去解决实际问题,这正是我们写此书的目的,试图在数学的严密性与小波理论的实际应用之间建立平衡,许多数学概念尽量通过图形给予说明。

本书按以下进行组织。第 1 章给出本书总的轮廓,其余分为四个部分。第 2 章和第 3 章中回顾了线性代数、傅里叶分析和离散信号分析的基本概念。第 4 章、第 5 章和第 6 章中主要讨论了时频分析、多分辨分析和不同种类小波的构造。第 7 章和第 8 章中给出了计算小波变换及通过滤波器方法实现的一些算法。第 8 章、第 9 章和第 10 章中给出了小波在信号处理和边值问题中的许多有趣的应用。

在准备本书的过程中,我们得到许多人的帮助,与 Charles Chui 教授的合作使我们学习到许多小波的知识,对他表示深深的感谢。感谢 Raj Mittra 教授、Linda Katehi 教授和 Hao Ling 教授邀请我们在 IEEE-AP 和 MTT 联合会短期课程上的报告,也要感谢 L. Tsang 教授邀请我们组织 PIERS 的短期培训课程。第 4 章和第 9 章的部分内容取材于在 Texas A&M 大学与研究生的共同工作,特别值得一提的研究生是 Minsen Wang、Howard Choe、Nai-wen Lin、Tsai-fa Yu 和 Zhiwha Xu,对他们的贡献表示感谢。我们对 Michelle Rubin 为本书的录入和大部分的校对工作表示深深的感谢。感谢 Kai Chang 教授鼓励我们撰写此书,也要感谢责任编辑 George J. Telecki 先生和副主编 Angioline Loreda 女士,他们在该书出版过程中进行了有效的管理和指导。最后感谢 Mousumi Goswami 和 Sophia Chan 以及我们的家人在本书的准备过程中所给予的鼓励和支持。

Jaideva C. Goswami  
Andrew K. Chan

# 目 录

第 1 章 本书论述了什么 .....	1
第 2 章 数学预备知识 .....	4
2.1 线性空间 .....	4
2.2 矢量与矢量空间 .....	5
2.3 基函数 .....	7
2.4 局部基与 Riesz 基 .....	10
2.5 离散线性赋范空间 .....	11
2.6 正交投影逼近 .....	12
2.7 矩阵代数与线性变换 .....	13
2.7.1 矩阵代数基础 .....	13
2.7.2 特征矩阵 .....	15
2.7.3 线性变换 .....	16
2.7.4 基变换 .....	16
2.7.5 Hermitian 矩阵、酉矩阵与正交变换 .....	17
2.8 数字信号 .....	18
2.8.1 信号采样 .....	18
2.8.2 线性平移不变系统 .....	18
2.8.3 卷积 .....	19
2.8.4 $z$ 变换 .....	21
2.8.5 收敛域 .....	21
2.8.6 逆 $z$ 变换 .....	23
2.9 习题 .....	23
参考文献 .....	24
第 3 章 傅里叶分析 .....	25
3.1 傅里叶级数 .....	25
3.2 例子 .....	26
3.2.1 整流正弦波 .....	26
3.2.2 梳函数和傅里叶级数核 $K_N(t)$ .....	27
3.3 傅里叶变换 .....	28
3.4 傅里叶变换的性质 .....	30
3.4.1 线性 .....	30

3.4.2	时间位移与时间尺度的变化 .....	30
3.4.3	频率位移与频率尺度的变化 .....	30
3.4.4	矩 .....	31
3.4.5	卷积 .....	31
3.4.6	帕塞瓦尔定理 .....	32
3.5	傅里叶变换的例子 .....	32
3.5.1	矩形脉冲 .....	32
3.5.2	三角形脉冲 .....	33
3.5.3	高斯函数 .....	34
3.6	泊松求和公式 .....	35
3.7	采样定理 .....	37
3.8	部分和与 Gibbs 现象 .....	39
3.9	离散时间信号的傅里叶分析 .....	40
3.9.1	离散傅里叶基与离散傅里叶级数 .....	40
3.9.2	离散时间傅里叶变换 .....	41
3.10	离散傅里叶变换 .....	43
3.11	习题 .....	44
	参考文献 .....	44
<b>第 4 章</b>	<b>时频分析</b> .....	<b>45</b>
4.1	窗函数 .....	46
4.2	短时傅里叶变换 .....	47
4.2.1	逆变换公式 .....	48
4.2.2	Gabor 变换 .....	48
4.2.3	时频窗 .....	48
4.2.4	短时傅里叶变换的性质 .....	49
4.3	离散短时傅里叶变换 .....	50
4.4	离散 Gabor 表示 .....	52
4.5	连续小波变换 .....	52
4.5.1	逆小波变换 .....	54
4.5.2	时间频率窗 .....	54
4.6	离散小波变换 .....	56
4.7	小波级数 .....	57
4.8	时间频率图的解释 .....	58
4.9	Wigner-Ville 分布 .....	59
4.10	Wigner-Ville 分布的性质 .....	62
4.10.1	实性 .....	62
4.10.2	边缘性 .....	62

4.10.3	相关函数 .....	63
4.11	二次叠加原理 .....	63
4.12	模糊函数 .....	64
4.13	习题 .....	65
4.14	计算机程序 .....	66
4.14.1	短时傅里叶变换 .....	66
4.14.2	Wigner-Ville 分布 .....	67
	参考文献 .....	69
<b>第 5 章</b>	<b>多分辨分析</b> .....	<b>70</b>
5.1	多分辨空间 .....	71
5.2	正交、双正交及半正交分解 .....	72
5.3	二尺度关系 .....	75
5.4	分解关系 .....	76
5.5	样条函数 .....	77
5.6	映射函数到多分辨分析空间 .....	81
5.7	习题 .....	82
5.8	计算机程序 .....	83
	参考文献 .....	84
<b>第 6 章</b>	<b>小波的构造</b> .....	<b>85</b>
6.1	小波构造的必要条件 .....	85
6.1.1	二尺度序列之间的关系 .....	85
6.1.2	重构序列与分解序列之间的关系 .....	87
6.2	半正交样条小波的构造 .....	88
6.3	规范正交小波的构造 .....	92
6.4	规范正交尺度函数 .....	93
6.4.1	Shannon 尺度函数 .....	93
6.4.2	Meyer 尺度函数 .....	94
6.4.3	Battle-Lemarié 尺度函数 .....	98
6.4.4	Daubechies 尺度函数 .....	99
6.5	双正交小波的构造 .....	102
6.6	小波的图解显示 .....	104
6.6.1	迭代法 .....	104
6.6.2	频谱法 .....	105
6.6.3	特征值法 .....	106
6.7	习题 .....	106
6.8	计算机程序 .....	108
6.8.1	Daubechies 小波 .....	108

6.8.2 迭代法 .....	109
参考文献 .....	110
<b>第7章 离散小波变换与滤波器组算法 .....</b>	<b>111</b>
7.1 抽取与插值 .....	111
7.1.1 抽取 .....	111
7.1.2 插值 .....	114
7.1.3 先卷积后抽取 .....	115
7.1.4 先插值后卷积 .....	116
7.2 逼近子空间中信号的表示 .....	116
7.3 小波分解算法 .....	118
7.4 重构算法 .....	120
7.5 基变换 .....	121
7.6 半正交子空间中信号的重构 .....	123
7.6.1 样条函数的基变换 .....	123
7.6.2 样条小波的基变换 .....	126
7.7 例子 .....	129
7.8 二通道完全重构滤波器组 .....	132
7.8.1 二通道完全重构滤波器组的频谱域分析 .....	133
7.8.2 时间域分析 .....	138
7.9 滤波器组的多相位表示 .....	141
7.9.1 多相位域的信号表示 .....	141
7.9.2 多相位域的滤波器组 .....	142
7.10 离散小波变换和完全重构滤波器组的登记 .....	143
7.11 习题 .....	144
7.12 计算机程序 .....	145
参考文献 .....	147
<b>第8章 快速积分变换及其应用 .....</b>	<b>148</b>
8.1 较细的时间分辨率 .....	148
8.2 较细的尺度分辨率 .....	150
8.3 函数映射到倍频程间的逼近子空间 .....	153
8.4 例子 .....	154
8.4.1 线性函数的积分小波变换 .....	155
8.4.2 裂缝检测 .....	158
8.4.3 非倍频程频率成分信号的分解 .....	158
8.4.4 扰动正弦信号 .....	159
8.4.5 线性调频信号 .....	162
8.4.6 带噪声音乐信号 .....	163

8.4.7 波导模式的扩散性 .....	164
参考文献 .....	165
<b>第9章 小波在数字信号处理中的应用</b> .....	<b>166</b>
9.1 小波包 .....	166
9.2 小波包算法 .....	170
9.3 阈值处理 .....	171
9.3.1 硬阈值处理 .....	171
9.3.2 软阈值处理 .....	171
9.3.3 百分率阈值处理 .....	172
9.3.4 实现 .....	172
9.4 抑制干扰 .....	172
9.5 故障轴承特征的识别 .....	175
9.5.1 声音信号的模式识别 .....	175
9.5.2 小波、小波包及 FFT 的特性 .....	178
9.6 二维小波与小波包 .....	180
9.6.1 二维小波 .....	180
9.6.2 二维小波包 .....	182
9.7 二维信号的小波与小波包算法 .....	183
9.7.1 二维小波算法 .....	183
9.7.2 二维小波包算法 .....	183
9.8 图像压缩 .....	186
9.8.1 图像编码 .....	186
9.8.2 小波树编码器 .....	186
9.8.3 嵌入零树小波编码 .....	186
9.8.4 嵌入零树小波举例 .....	187
9.8.5 空间定向树 .....	190
9.8.6 广义自相似树 .....	191
9.9 微钙化点检测 .....	191
9.9.1 CAD 算法的结构 .....	192
9.9.2 图像分割与非线性对比度增强 .....	192
9.9.3 子图像的小波分解 .....	192
9.9.4 小波系数域处理 .....	194
9.9.5 直方图阈值处理和黑色像素消除 .....	194
9.9.6 参数 ART2 聚类 .....	195
9.9.7 结果 .....	195
9.10 多载波通信系统 .....	195
9.10.1 OFDM 多载波通信系统 .....	195



9.10.2	小波包基 M CCS .....	197
9.11	三维医学图像可视化 .....	199
9.11.1	三维小波和算法 .....	199
9.11.2	绘制方法 .....	200
9.11.3	兴趣区域 .....	201
9.11.4	总结 .....	202
9.12	计算机程序 .....	203
9.12.1	二维小波算法 .....	203
9.12.2	小波包算法 .....	207
	参考文献 .....	209
<b>第 10 章</b>	<b>小波在边值问题中的应用</b> .....	<b>211</b>
10.1	积分方程 .....	211
10.2	矩量法 .....	214
10.3	小波方法 .....	214
10.3.1	快速小波算法的使用 .....	215
10.3.2	小波的直接应用 .....	215
10.3.3	频谱域小波 .....	216
10.3.4	小波包 .....	220
10.4	区间小波 .....	220
10.5	稀疏度和误差修正 .....	223
10.6	数值实例 .....	224
10.7	半正交小波与正交小波 .....	230
10.8	微分方程 .....	231
10.9	样条与小波的表达式 .....	232
	参考文献 .....	234

# 第 1 章 本书论述了什么

20 世纪初期小波分析的概念已经在不同领域以不同的形式出现。调和分析中的 Littlewood-Paley 技巧、Calderón-Zygmund 理论以及信号处理中数字滤波器组理论被认为是小波分析的先驱工作。然而,通过不同领域一些研究者的工作,包括 Strömberg、Morlet、Grossmann、Meyer、Battle、Lemarié、Coifman、Daubechies、Mallat、Chui 等人,在 20 世纪 80 年代,小波理论引起人们的关注,还有很多研究人员也作出了重要贡献。

在离散数据集的应用中,小波可以被认为是一个函数的膨胀与平移所生成的基函数。类似于傅里叶分析,也有小波级数(WS)和积分小波变换(IWT)。在小波分析中,WS 与 IWT 密切相关。实直线上能量有限的函数的 IWT 在时间—尺度域中某点的值给出了其小波级数表示的系数。傅里叶级数与傅里叶变换之间不存在这种关系,这是由于它们应用于不同的函数类,傅里叶级数应用于能量有限的周期函数,而傅里叶变换应用于实直线上能量有限的函数。此外,傅里叶分析是研究函数的所有时间(频率)成分对函数的每个频率(时间)分量的影响。另一方面,小波分析是一种局部分析工具,这种局部特性使得小波分析更适合于信号的时间—频率分析。

小波技巧使得我们能够将一个复杂函数分解为一些较为简单的函数,然后分别进行研究。这个性质结合快速小波算法使得小波技巧在分析与综合问题中很吸引人,快速小波算法与快速傅里叶变换相比同样有效。不同类型的小波已经作为工具用于解决许多领域的问题,这些领域包括信号分析、图像分析、医学诊断、边值问题、地球物理信号处理、统计分析、模式识别等。小波在这些领域已获得广泛应用,而其新的应用仍在不断探索中。

小波能够有效地表示非平稳(瞬变)信号,这是其流行的主要原因。由于大部分自然和人工信号具有瞬变的特点,因此除了平稳信号用傅里叶表示外,不同的小波已用于许多类非平稳信号的表示。傅里叶分析利用整体(非局部)正弦和余弦函数作为基函数,而小波分析利用时间域和频率域局部化的基函数表示非平稳信号,这样会更加有效。因此,小波表示更加简洁而且容易实现。利用非常有效的多分辨率分析,人们能够将信号表示为不同分辨率下有限个分量的和,而每个分量可以根据应用的不同目的进行自适应处理。小波分析的主要作用是它能够给出信号在不同分辨率下的简洁表示。在偏微分方程的数值解法中,未知解能够用不同分辨率的小波去表示,从而导致了解的多网格表示。利用小波基阈值技巧能够将积分算子得到的稠密矩阵进行解的任意精确度的稀疏化。

已经有许多关于小波的专著和特定应用领域的教科书,然而,我们感觉缺乏一本系统介绍小波专题及其广泛应用的教科书,这正是我们写这本人门书的动机。我们的目的是:(1)在容易阅读的形式下给出数学上细致的分析;(2)给读者介绍一些可能的应用领域,包括信号处理和边值问题;(3)提供了一些算法和计算机代码。本书的定位是大学高年级学生和一年级研究生。同时充分的细节对于没有信号分析背景知识的实际工程师来说也是

有用的。

本书按逻辑关系介绍小波的概念,共分四个主要部分。我们宁可不去花费精力证明定理和发展算法,而是利用基函数对信号非常基本的表示来系统地讨论本学科面临的问题。通过与傅里叶分析和短时傅里叶变换的比较来解释小波分析,研究多分辨分析来说明分解和重建算法,结合滤波器理论使得读者可以对滤波器算法与小波算法进行比较。小波在不同方面的特殊应用包括信号处理、图像处理、电磁波扩散、边值问题、小波成像系统和抑制干涉等。本书各章详细概括如下。

第2章和第3章回顾一些基本的数学概念和方法,给出时间—频率分析与时间—尺度分析。为了更好地理解小波理论,回顾线性函数空间的基础是必须的。将欧几里得矢量空间中的概念推广到高维空间。矢量的投影、基函数、局部基和 Riesz 基、正交性以及双正交性等概念也将在第2章中讨论。此外,还将讨论函数的最小二乘逼近和一些数学工具,比如矩阵代数和  $z$  变换等,为连续小波变换和离散小波变换的发展建立基础。第3章对傅里叶分析进行了简单回顾。这一章的主要目的不是继续发展傅里叶分析,而是提供给读者傅里叶分析中的一些重要问题和关系,它们与后面的讨论密切相关。讨论了傅里叶级数和傅里叶变换的主要性质,还研究了几个较著名的定理,包括泊松(Poisson)求和公式、单位分解定理、采样定理以及部分求和的 Dirichlet 核等。为了将其与连续和离散小波变换进行比较,还简单地讨论了离散时间傅里叶变换和离散傅里叶变换,给出了傅里叶分析在信号表示中的一些优点和缺陷。

时间—频率分析与时间—尺度分析的发展构成了本书第二部分的核心内容。第4章主要致力于讨论短时傅里叶变换(时间—频率分析)和连续小波变换(时间—尺度分析),说明了这两种变换之间的相似性和差异,此外还介绍了窗宽的概念,用它来度量时间函数及其频谱的局部化。这一章还包括这些变换的主要性质,比如完全重建和逆的唯一性等。在时间—频率分析方面,通过对 Gabor 变换和 Wigner-Ville 分布的讨论来结束这一章。第5章介绍多分辨分析。通过二尺度关系和分解关系的推导研究了嵌套逼近空间与小波空间的关系,讨论了空间之间和基函数之间的正交性与双正交性以及它们的整数平移。这一章还讨论了半正交  $B$  样条函数以及将函数映射到多分辨空间上的技巧。在第6章中详细讨论了小波构造的方法和必要的条件,通过举例说明正交、半正交和双正交小波的构造过程。这一章还讨论了双正交小波子空间及其正交性,本章最后给出了计算中所用公式的推导和小波的图形。

在第7章和第8章中研究了小波分析的算法。第7章提供了分解算法与重建算法的构造和实现。本章首先讨论这些算法的基本构造模块,推导出抽取、插值、离散卷积以及它们之间的联系。尽管这些算法对不同类型的小波是普适的,但特别关注的是紧支集半正交  $B$  样条小波,推导出样条空间与对偶样条空间之间的映射公式。在这一章,还利用  $z$  变换研究了数字信号处理中滤波器组的完全重建算法,讨论了时间域与多相域算法的等价性。本章最后给出了双正交小波构造的例子。在第7章中局限于离散小波算法的讨论,包括离散小波变换的时变性和数据分布的稀疏性。为了减少阅读的难度,在第8章中研究了半正交样条小波的快速积分小波变换(FIWT)算法。在这一章逐渐地将算法展开讨论,以增强时间分辨率作为开始,而以增强尺度分辨率作为结束,通过 FIWT 一系列的应用来说明其重要性。

本书最后一部分涉及到小波对工程问题的应用。第 9 章讲述小波在信号与图像处理中的应用。在第 10 章中我们讨论小波在求解边值问题中的应用。为了改善小波在频谱域的性能,第 9 章首先讨论小波包的概念,它是小波分析的推广,信号在频谱域中的小波包表示比小波表示更加精细,这是由于小波包将小波频谱进一步分解成子频谱,讨论雷达干涉抑制时这是有用的。这一章还讨论了 3 种幅值的阈值处理,它们被用于图像压缩,以故障轴承的特征识别来结束一维小波信号处理。第 7 章中的小波算法被推广到二维图像处理,这一章主要的小波图像处理包括图像压缩、目标检测与识别。由于篇幅所限,没有包括树形图像编码的细节,然而,对乳房 X-光照片中微小钙化点的检测、识别和分类进行了较详细的讨论。还讨论了小波包在多通道通信系统中的应用,以及小波分析在三维医学图像可视化中的应用。第 10 章涉及到边值问题中的小波,同时研究了传统矩量法与小波基矩量法,讨论了矩量法中使用小波的不同途径。特别地,在一定程度上详细讨论了有界区间上的小波在求解电磁散射问题时所出现的积分方程中的应用,这些边界小波在图像处理中还适合于避免边界效应。最后,利用小波求解传输线路中的不连续问题来说明小波在频谱域中的应用。

本书的大部分材料取自于作者在 Texas A&M 大学电子工程系为大学生和研究生所开设的课程以及联合会短期课程的讲稿。本书的材料可以作为一个学期的课程,这些专题也可以作为其他信号处理课程的补充。每一章都用许多图表来解释数学概念,在有些章节后配有习题,而且在一些章节后还给出了计算机源代码。

## 第 2 章 数学预备知识

本章的目的是使读者熟悉一些数学记号和工具,这将有利于理解小波理论。因为小波是满足某些允许性条件的连续函数,因此,讨论函数空间的一些定义和性质是明智的。对于函数空间更详细的讨论,读者可以参考实分析的标准参考书。下一章讨论的小波算法涉及到系数序列的数字处理,数字信号处理中相关专题,比如采样、 $z$  变换、线性平移不变系统以及离散卷积等的基础知识,这对于掌握好小波理论是必备的。此外,线性代数和矩阵技巧的简单讨论在滤波器组的离散时间域分析中是非常有用的。对本章内容熟悉的读者可以跳过这一章。

### 2.1 线性空间

在广泛的意义上,函数空间是指满足一定数学结构模式的函数的集合。例如,有限能量空间  $L^2(-\infty, \infty)$  是平方可积函数的集合,也就是满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2.1)$$

线性空间上的一些要求和运算规则说明如下:

- (1) 空间  $S$  必须是非空的;
- (2) 若  $x \in S$  和  $y \in S$ , 则  $x + y = y + x$ ;
- (3) 若  $z \in S$ , 则  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
- (4) 在  $S$  中存在唯一的元素  $\mathbf{0}$ , 使得  $x + \mathbf{0} = x$ ;
- (5) 在  $S$  中存在另一个唯一的元素  $-x$ , 使得  $x + (-x) = \mathbf{0}$ 。

除了这些简单而重要的规则以外,还定义了标量乘法  $y = cx$ , 使得:若  $x \in S$ , 则对于每一个标量  $c$  有  $y \in S$ 。对于空间  $S$ , 有下面附加规则:

- (1)  $c(x + y) = cx + cy$ ;
- (2)  $(c + d)x = cx + dx$ , 对于标量  $c$  和  $d$ ;
- (3)  $(cd)x = c(dx)$ ;
- (4)  $1 \cdot x = x$ 。

满足这些附加规则的空间称为线性空间。然而,到目前为止,我们还没有定义度量线性空间中元素大小的标准。对  $S$  中的每个函数,如果我们赋予一个数  $\|x\|$ , 称为  $x$  的范数,这样的空间成为赋范线性空间(即具有范数的线性空间)。空间的范数还必须满足一些数学性质:

- (1)  $\|x\| \geq 0$ , 而且  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- (2)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ;

(3)  $\|ax\| = |a| \|x\|$ , 其中  $a$  是标量。

函数的范数是函数到原点(即 0) 的距离。换句话说, 我们能够使用范数

$$\|x - y\| \quad (2.2)$$

度量两个函数  $x$  与  $y$  之间的差异(或距离)。

对于特别的线性空间有许多范数可供选择。例如, 有限能量空间  $L^2(-\infty, \infty)$  使用范数

$$\|x\| = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} < \infty \quad (2.3)$$

将这个范数称为  $L^2$ -范数。这个范数也被用来度量两个有限能量函数的整体差异(或误差)。均方根误差(RMSE) 定义为

$$\text{RMSE} = \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - f_a(x)|^2 dx \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

式中  $f_a(x)$  是  $f(x)$  的逼近函数。式(2.4) 中的表达式是  $L^2$ -范数下的逼近误差。

## 2.2 矢量与矢量空间

基于在 2.1 节所讨论的函数空间的基本概念, 我们现在讨论矢量空间的一些基本概念。首先简单回顾几何矢量分析。

三维欧几里得矢量空间的矢量  $\mathbf{V}$  由三个复数  $\{v_1, v_2, v_3\}$  来定义, 这三个复数与三个正交的单位矢量  $\{a_1, a_2, a_3\}$  相联系。有序集  $\{v_j\}_{j=1}^3$  表示矢量  $\mathbf{V}$  的三个标量分量, 其中单位矢量集  $\{a_j\}_{j=1}^3$  生成三维欧几里得矢量空间。欧几里得矢量空间中的任何矢量  $\mathbf{U}$  能够被分解为三个矢量分量  $\{u_j a_j\}_{j=1}^3$  [如图 2.1(d) 所示]。

欧几里得矢量空间中矢量的加法和标量乘法定义为

$$(1) \mathbf{U} + \mathbf{V} = \{u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3\};$$

$$(2) k\mathbf{V} = \{kv_1, kv_2, kv_3\}.$$

除以上这些运算以外, 三维欧几里得空间中的矢量还满足交换律与结合律:

$$(1) \mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U};$$

$$(2) (\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W} = \mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}).$$

我们可以用列矩阵表示一个矢量:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

这是由于上面的所有数学规则都可以应用于列矩阵。类似于函数的范数的定义, 我们定义矢量的长度为

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (2.6)$$

在矢量代数中, 两个矢量的数量积(内积) 是一个非常重要的运算, 我们将在下面讨论这

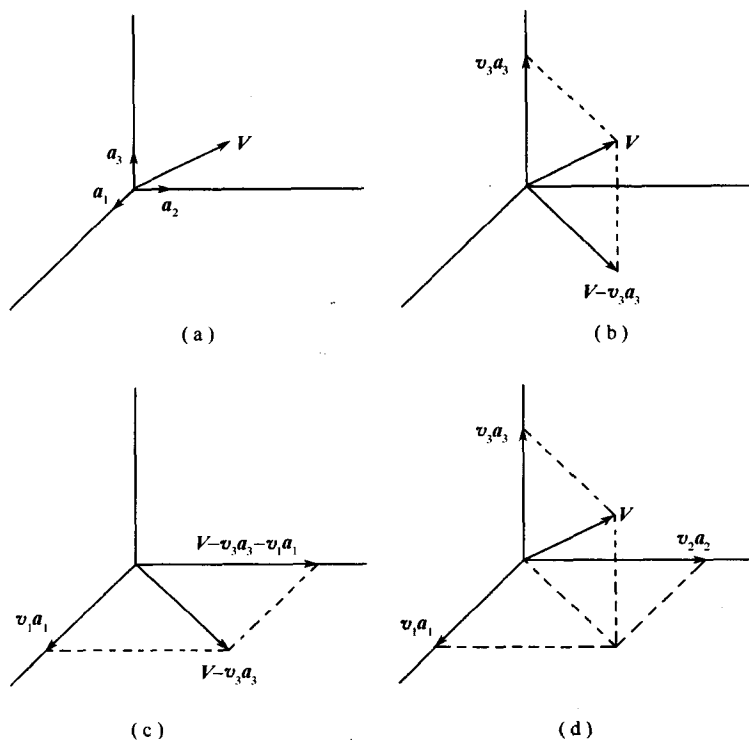


图 2.1 欧几里得空间中矢量的正交分解

个问题。两个矢量的数量积定义为

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{U}| |\mathbf{V}| \cos(\widehat{\mathbf{U}, \mathbf{V}}) =$$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

式中上标 T 表示矩阵的转置运算。众所周知，数量积满足交换律： $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}$ 。若  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$ ，则称这两个矢量  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  互相正交。我们定义一个矢量在另一个矢量上的投影为

$$\frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}_v = \mathbf{U} \text{ 在 } \mathbf{a}_v \text{ 方向的投影} =$$

$$\mathbf{U} \text{ 在 } \mathbf{a}_v \text{ 方向的分量} \quad (2.8)$$

投影是一个重要的概念，它将在以后的讨论中经常使用。如果需要找到一个矢量在给定方向上的分量，我们只要取该矢量与给定方向单位矢量的数量积。

现在，我们可以将三维欧几里得空间中基底与投影的概念推广到  $N$  维矢量空间。一

个矢量在该空间中的分量构成  $N \times 1$  列矩阵, 而基矢量  $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^N$  构成一个正交集满足:

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_l = \delta_{k,l} \quad \forall k, l \in \mathbf{Z} \quad (2.9)$$

式中  $\delta_{k,l}$  是 Kronecker  $\delta$  函数, 定义为

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (2.10)$$

利用内积我们能获得矢量  $\mathbf{V}$  特定的分量  $v_j$  (或  $\mathbf{V}$  在方向  $\mathbf{a}_j$  的投影):

$$v_j = \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}_j \quad (2.11)$$

而且矢量  $\mathbf{V}$  可以表示为它的矢量分量的线性组合:

$$\mathbf{V} = \sum_{k=1}^N v_k \mathbf{a}_k \quad (2.12)$$

众所周知, 一个矢量能被分解为沿基矢量方向的基本矢量, 每次可以找到它的一个分量。图 2.1 说明了这个过程, 在图 2.1(a) 中的矢量  $\mathbf{V}$  被分解为  $\mathbf{V}_p = \mathbf{V} - v_3 \mathbf{a}_3$  和它的正交补矢量  $v_3 \mathbf{a}_3$ 。矢量  $\mathbf{V}_p$  被进一步分解为矢量  $v_1 \mathbf{a}_1$  和  $v_2 \mathbf{a}_2$ 。图 2.1(d) 表示矢量  $\mathbf{V}$  由其分量的重构。

尽管图 2.1 中所示的例子很初等, 但它类似于小波分解与重构算法, 不同之处是正交分量是小波函数:

## 2.3 基函数

我们将欧几里得几何矢量空间的概念推广到赋范线性空间, 也就是说, 将几何矢量的集合想象成函数的集合。用基函数代替基矢量, 基函数可以表示相应空间中的任意函数, 这些基函数是相应空间中函数的基本构成成分。我们将以傅里叶级数作为例子, 傅里叶级数将在第 3 章中更详细地讨论。

例子: 让我们回顾, 周期函数  $p_T(t)$  能被展开成级数:

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.13)$$

式中  $T$  是函数的周期;  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f$  是基本频率;  $e^{jk\omega_0 t}$  是基本频率的  $k$  次谐波。如果建立  $p_T(t)$  与  $\mathbf{V}$ 、 $c_k$  与  $v_k$  以及  $e^{jk\omega_0 t}$  与  $\mathbf{a}_k$  之间的等价关系, 则等式 (2.13) 等同于等式 (2.12), 因此, 函数集  $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  构成离散频率傅里叶空间的基, 这里  $\mathbf{Z}$  是所有整数  $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  的集合, 系数集  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  通常称为离散频谱。众所周知, 离散傅里叶基是一个正交基。利用函数的内积记号

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} g(t) \overline{h(t)} dt \quad (2.14)$$

式中  $\overline{h(t)}$  表示  $h(t)$  的复数共轭。我们用下面的等式表示正交性

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t} dt = \delta_{k,l} \quad \forall k, l \in \mathbf{Z} \quad (2.15)$$

对它们除以  $\sqrt{T}$ , 则我们可以规范化基函数(关于单位能量), 因此,  $\{e^{jk\omega_0 t} / \sqrt{T}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  构成离



散傅里叶空间的标准正交基。

### 正交性与双正交性

函数的正交展开是信号分析的一个重要工具,展开的系数表示信号分量的大小。在前面的例子中,傅里叶系数表示信号谐波频率的幅度。如果为了特别信号处理的目的,我们决定使某些谐波频率(比如 60Hz 噪声)减到最小(或使其为 0),可以在此频率处简单地设计一个滤波器去除噪声。因此,在处理信号之前将其分解为不同的成分对于观测信号是非常有意义的。

信号的正交分解是直接的,而且系数的计算是简单和高效的。若函数  $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$  关于某个规范正交集  $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}} \subset L^2(\mathbf{R})$  展开,可以写成:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t) \quad (2.16)$$

计算系数时只要取函数与基函数的内积就可以得到系数:

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\phi_k(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \phi_l(t) \overline{\phi_k(t)} dt = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \delta_{l,k} = c_k \end{aligned} \quad (2.17)$$

式(2.17)中内积的计算需要对于所有的  $t$  函数  $f(t)$  的知识而且不是实时可计算的。

我们已经看到规范正交基是表示信号有效和直接的方法,然而,在某些应用中规范正交基函数可能缺乏某些期望信号处理的性质,这导致了处理中的不方便。双正交表示是一个可能的选择,它有利于克服正交性约束而且对于给定的函数产生一个好的逼近。设  $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}} \subset L^2(\mathbf{R})$  是一个双正交基函数的集合,如果存在另一个基函数的集合  $\{\tilde{\phi}_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}} \subset L^2(\mathbf{R})$  使得:

$$\langle \phi_k, \tilde{\phi}_l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t) \overline{\tilde{\phi}_l(t)} dt = \delta_{k,l} \quad (2.18)$$

集合  $\{\tilde{\phi}_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  被称为  $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  的对偶基。按照双正交基可以将函数  $g(t)$  展开为

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \phi_k(t)$$

而且得到系数

$$d_n = \langle g, \tilde{\phi}_n \rangle = \quad (2.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\tilde{\phi}_n(t)} dt \quad (2.20)$$

另一方面,也可以按照对偶基展开函数  $g(t)$ :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{d}_k \tilde{\phi}_k(t) \quad (2.21)$$

而且得到对偶系数

$$\tilde{d}_l = \langle g, \phi_l \rangle = \quad (2.22)$$