湖南师范学院数学函授专修科講义

代　　数

（下　册）

湖南师范学院数学系編

湖南人民出版社

目　录

第六章　綫性方程組

綫性方程組就是关于未知数的一次方程的組。例如：

$$(1)\ \begin{cases} x-y=1, \\ x+y=3; \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} 2x+3y=4, \\ 4x+6y=5; \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=2; \end{cases}$$

都是含二未知数的綫性方程組。

方程$xy-1=0$不是綫性的，因为它含有未知数的二次項。

我們这里将要討論到一般的含 n 个方程与 n 个未知数的綫性方程組；即含 n 个未知数$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$的方程組。

$$(4)\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n; \end{cases}$$

其中的系数a_{ij}及b_i($i, j=1, \cdots\cdots, n$)都是数。

方程組(4)的一个解指的是一組数$k_1, k_2, \cdots\cdots, k_n$，用它們分别代(4)中的 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 后，得到一組恒等式，即每方程两端的值相同。

不同的綫性方程組的解的情况也不同。例如，(1)有解$x=2$，$y=1$，但方程組(2)沒有解，因为否則第一个方程的左端的值将

等于4，这时第二个方程左端的值$4x+6y=2(2x+3y)$将等于8，而不是5，而对于(3)来説，任何一对数$x=k$, $y=1-k$都是它的解。

討論綫性方程組就是要决定它的解的情况，有解或沒有解；在有解的时候还要决定解的个数以及求解的方法。对一般的方程組(4)要把这些問題全部解决，需要一些較高深的理論，我們不打算討論，这里我們只討論一种特殊的情况。

§1. 二阶三阶行列式

我們先看含二个未知数及二个方程的綫性方程組：

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$$

假定方程組(1)至少有一解(x_1, x_2)。用a_{22}乘第一个方程(即乘其两边)，a_{12}乘第二个方程，然后从第一个依項减去第二个；又用a_{21}乘第一个方程，a_{11}乘第二个方程，然后从第二个减去第一个，得：

$$(2)\quad \begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}。 \end{cases}$$

由此可知，方程組(1)的任何一个解都滿足方程組(2)，但当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，方程組(2)只有一解，就是：

$$(3)\quad x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

故方程組(1)最多只有一解，就是(3)。用(3)代入方程組(1)，知(3)确为方程組(1)的解。故当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，方程組

(1)有唯一解，就是(3)。

(3)中的分母是由(1)的未知数的系数所确定的。为了方便起見，我們用下面的表来表示：

$$(4)\ D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

这个数叫作一个二阶行列式，它等于表中第一对角綫(从左上角到右下角)上二数乘积减去第二对角綫(从右上角到左下角)上二数的乘积之差。表中的数叫作行列式的元素，而称横的各排为行，直的各排为列。

表示式(3)中的分子与它的分母有类似的形状，也可以分别表为两个二阶行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}。$$

即在行列式(4)中以常数項列分别代第一列式或第二列所得的行列式，这样一来，表示式(3)可写成下面的形式：

$$(5)\ x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}。$$

总結上面的事实，可得关于解含二个未知数二个方程的綫性方程組的克萊姆規則：

若由方程組(1)的未知数的系数所組成的二阶行列式$D\neq 0$，則方程組(1)有唯一解，其中x_i($i=1,2$)的値是以D为分母，D_i为分子的分数，而D_i是在D中以常数項列换第i列所得到的行列式。

例 解方程組

$$\begin{cases}2x_1+x_2=7,\\ x_1-3x_2=-2,\end{cases}$$

此处行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-6-1=-7\neq 0,$$

故可應用克莱姆規則求解。因

$$D_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-19,\qquad D_2=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-11$$

故得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{19}{7},\qquad x_2=\frac{11}{7}。$$

現在再看含三个未知数三个方程的綫性方程組

$$(6)\ \begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3。\end{cases}$$

像前面处理含二个未知数的方程組一样，用数$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$分别乘第一，第二，第

三个方程，而后把三个方程相加，则x_2，x_3都被消去，得等式

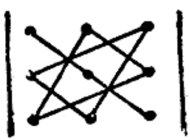
$$(7)\ (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$$

这里x_1的系数由方程組（6）中未知数的系数确定我們用下面的符号表示：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

叫作三阶行列式

虽則三阶行列式的表式很复杂，但我們可以用下面的方法帮助記忆，事实上，式中的三个正項有一項是第一对角綫上三数的乘积，其余两項是位于第一对角綫的两平行綫的元素和它对角上的元素的乘积，有負号的三項可以类似的从第二对角綫得出，这个方法可以用下列的图来表示，右图是計算三个正項的規則，右图是計算三个負項的規則：



例 計算三阶行列式

i) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3 -2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times1\times2 = 30+2-24-12+20-6=10$

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\times3\times0+0\times2\times1+(-5)\times(-2)\times(-2)-(-5)\times3\times1-0\times(-2)\times0-1\times2\times(-2)=$

$$=-20+15+4=-1$$

把行列式D中第一列的元素分別換成常数項b_1，b_2，b_3，得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

按照上面的方法把 D_1展开，恰等于式(7)的右端，故(7)可写成

$$Dx_1=D_1$$

像上面一样我們用数$a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$，$a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$，$a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$分别乘(6)中各方程再相加，可以消去$x_1$，$x_3$及用数$a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$，$a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$分別乘(6)中各方程，可以消去$x_1$，$x_2$得

$$Dx_2=D_2, \qquad Dx_3=D_3,$$

这里D_i($i=2$，3)是在行列式D中以絕对項列換第 i列后所得到的行列式：

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}。$$

若 $D\neq0$，則得

$$(8)\quad x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}。$$

把(8)中的值代入(6)，知其确为方程組(6)的解，并且是(6)的唯一解，新得关于解含三个未知数三个方程的綫性方程組的克萊姆規則：

若由方程組（6）的未知数的系数所組成的三阶行列式 $D\neq0$，則方程組有唯一解，$x_i\ (i=1,2,3)$是以D为分母，D_i为分子的分数，而 D_i 是在 D 中以常数項列换第 i 列所得到的行列式

例 解方程組

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+\ x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=2, \\ x_1-\ x_2+\ x_3=-1. \end{cases}$$

首先計算行列式 D：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(-5)\cdot1+(-4)\cdot3\cdot1+1\cdot(-1)\cdot1 -1\cdot(-5)\cdot1-(-4)\cdot1\cdot1 -2\cdot3\cdot(-1)=-8$$

因$D\neq0$，故可应用克萊姆規則求出其唯一解，由于

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=6.$$

故得：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

§2. 排　列

为了解含二个未知数二个方程及含三个未知数三个方程的綫性方程組，我們引入了二阶行列式及三阶行列式，我們問，是不是也可以象二阶行列式与三阶行列式一样，对于一般的含 n 个未知数 n 个方程的綫性方程組，引入一般的 n 阶行列式呢？答

案是肯定的。但是我們不可能对每一个 n 都象上面一样从解綫性方程組引出，因为当 n 增大时，計算将变得非常麻煩；另外，对任何具体的 n 来作一次，也是不可能的。因此必須通过分析，一般的定义 n 阶行列式，然后再証明这样定义的 n 阶行列式确能用来解綫性方程組。

看上面的二阶行列式与三阶行列式，它們都是一些項的代数和，而每一項都是二个或三个数的乘积，因此对于一般的 n 阶行列式，也应該是一些項的代数和，为了确定其中每一項应該如何取符号，先討論另外一个概念——排列。

任意 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 按一定順序排起来，叫作这 n 个元素的一个排列。

在討論排列时，因为我們只注意这些元素在某一排列中的先后順序，至于这些元素本性如何，我們不必考慮，因此我們常用自然数 1, 2, ……, n 来代表这些元素。

在中学代数中，已經知道 n 个元素共能組成 $n!$（$n! = 1.2\cdots n$，叫作 n 的阶乘）个不同的排列。例如，取三个数碼 1, 2, 3，共能作出 $3! = 6$ 个不同的排列如下：

123，132，231，213，312，321。

（**注意**　这里的 123 不是表数一百二十三，而是指 1, 2, 3 这个排列，但在 $n \leq 9$ 时，我們不用“，”将数碼隔开）。

在排列 123 中，三个数碼是按自然順序排列起来的，但在其它的五个排列中則不然，例如在排列 132 中，数碼 3 排在数碼 2 的前面，一般的，若在某一排列中，一个較大的数碼排在一个較小的数碼的前面，我們說这两个数碼构成一个反序。一个排列中所有反序的数目叫作这个排列的反序数。例如，排列 132 中 3 与 2

构成一个反序，而它的反序数是1；排列123中沒有反序，故其反序数是0；排列321中3与2，3与1，2与1都构成反序，故其反序数为3。

我們可以按照下面的方法，計算一个排列的反序数：首先計算有多少个数碼排在1的前面，其次，把1划去，計算有多少个数碼排在2的前面（划去了的1不再計算），再把2划去，計算有多少个数碼在3前面，其余照此推下去（每次划去了的数碼都不計算）。假如在1前有m_1个数碼，在2前有m_2个数碼，……，最后在n前有m_n个数碼，則这个排列的反序数等于$m_1+m_2+\cdots+m_n$。

例 計算排列531246的反序数。

1前面有两个数碼（5和3），划去1：53~~1~~246

2前面有两个数碼（5和3），划去2：53~~12~~46

3前面有一个数碼（5），划去3：5~~312~~46

4前面有一个数碼（5），划去4：5~~3124~~6

5前面沒有任何数碼。划去5：~~53124~~6

最后，6前面也沒有数碼（所有的都被划去）。由此，知所求的反序数等于$2+2+1+1+0+0=6$。

在一个排列中，若其反序数是奇数，称这个排列为奇排列；若其反序数是偶数，則称它为偶排列。例如，排列132是奇排列，123及531246都是偶排列。

为了弄清楚所有n个元素的排列之間的关系，我們引入排列的对换这一概念。

在一个排列中，交換其中某两个元素的位置，得到一个新的排列，这种对排列的变換叫作一个对换。

例如，在排列531246中交換1与4的位置，得新排列534216。

这个对换用(1,4)来表示。一般的，在排列。

$$i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots, i_l, \cdots, i_n.$$

中(这里 $i_1, i_2 \cdots, i_n$ 就是 $1,2,\cdots,n$ 这n个数碼的某一种排列)，变换i_k及i_l，得新排列

$$i_1, i_2, \cdots, i_l, \cdots, i_k, \cdots, i_n。$$

这个对换用(i_k, i_l)表示。

首先，我們很容易了解，利用对换，常常可以把一个排列变成同样数碼的另外任何一个排列，我們看一个具体例子。

例如，要把排列

(A)　　　3,4,5,6,8,7,1,2

变成排列

(B)　　　8,1,7,2,5,4,3,6。

在排列(A)中，第一个数碼是3，在排列(B)中，第一个数碼是8。为了使数碼8排在第一个位置，对排列(A)施行对换(3,8)，得

(A_1)　　　8,4,5,6,3,7,1,2。

现在，再比較(A_1)和(B)，(A_1)的第二个数碼是4，(B)的第二个数碼是1，所以对(A_1)施行对换(4,1)后，得排列：

(A_2)　　　8,1,5,6,3,7,4,2,

(A_2)中1排在第二个位置，継續如下施行这样的变换，得(后面括弧內示所施的对换)：

8,1,7,6,3,5,4,2	(5,7)
8,1,7,2,3,5,4,6	(2,6)
8,1,7,2,5,3,4,6	(3,5)
8,1,7,2,5,4,3,6	(4,3)

最后所得到的是排列(B)。

另外，我們看着对换对排列的奇偶性所产生的結果。对奇排列321施行对换(2,3)，得排列231，这是一个偶排列。由此看出，經过一个对换，排列改变了它的奇偶性。这并不是一个偶然的結果，事实上，下面的一般定理成立。

定理 1 經过一个对换，每一个排列都变更了它的奇偶性。

証明 1° 我們首先討論一种特殊情况，假設被对換的数碼是排在相邻的位置的。設所給的排列是·

$$(1)\qquad \overbrace{\cdots}^{A}\ ik\ \overbrace{\cdots}^{B}$$

式中A代表排在 i 左端的一群数，B代表着排在 k 右端的一群数，对排列(1)施行对換(i,k)，得排列:

$$(2)\qquad \overbrace{\cdots}^{A}\ ki\ \overbrace{\cdots}^{B}$$

显然，經过这样一个对換后，i与A中或B中的数碼所成的反序数沒有改变，同样，k与A或B中的数碼所成的反序数也沒有改变，現在，假設在排列(1)中，i,k 是依自然順序排列着的，則在排列(2)中，k,i 組成了一个反序，就是(2)比(1)增了一个反序。反之，若在排列(1)中，i,k是一个反序，則在排列(2)中，k,i就依自然順序排列，因此，(2)比(1)減少了一个反序。总之，不論是增加或減少一个反序，都变更了排列的奇偶性。

2° 現在再討論一般情形，設所給的排列是

$$(3)\qquad \overbrace{\cdots}^{A}\ i\ i_1\ i_2\cdots i_m\ k\overbrace{\cdots}^{B}$$

在 i 与 k 之間有 m 个数碼 i_1，i_2，…，i_m. 对排列(3)施行对換(i, k)，得排列

$$(4)\qquad \overbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}^{A}\ k\ i_1\ i_2\cdots i_m\ i\ \overbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}^{B}$$

但排列(4)也可以用下面的方法得出，在排列(3)中，使数碼 i 向右移动，依次与 i_1，i_2…，i_m 交換位置，这样的对換一共是 m 次，得排列

$$(5)\qquad \overbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}^{A}\ i_1\ i_2\cdots i_m\ i\ k\ \overbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}^{B}$$

再在(5)中使 k 向左移动，依次与i，i_m，…，i_2，i_1 交換，一共經过 m+1 次，得排列(4)，这样，由排列(3)到排列(5)，再变到排列(4)，每一次的交換数碼都是相邻两个数碼的对換，这样的对換一共是

$$m+(m+1)=2m+1$$

次，由1°，每一次这样的对換都变更排列的奇偶性，故由排列(3)到排列(4)一共变更 2m+1次 奇偶性，而2m+1是一个奇数，故排列(4)与(3)的奇偶性相反，定理得証

利用定理1，可以証明

定理2 当 $n\geqslant 2$时，n个数碼的排列有一半是奇排列，一半是偶排列，即奇排列与偶排列的个数都是 $\frac{n!}{2}$.

証明 我們已經知道，n 个数碼的排列一共有 n! 个，今設在这 n! 个排列中，有 p 个奇排列和 q 个偶排列。

設想对每一个奇排列，都施行同一个对換，例如(1, 2)，由定理1，每一个奇排列都变成一个偶排列，并且没有两个是相同

的，由此得 $p \leqslant q$。

同样，对每一个偶排列施行同一个对换，由定理1，得 q 个不同的奇排列，由此得 $q \leqslant p$。

比較 $p \leqslant q$ 及 $q \leqslant p$，得 $p=q$。

§3. n 阶行列式

为了引入一般的 n 阶行列式，先討論我們已經知道的二阶和三阶行列式.

回忆一下二阶和三阶行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}。$$

我們看到，二阶行列式的每一項是两个位在不同的行与不同的列的元素的乘积，反轉来，表中所有这样的两个元素的乘积也都拿来作为行列式的項，同样的，三阶行列式的每一項都是不同行也不同列的三个元素的乘积，反轉来，所有这样的乘积都用来作为行列式的項。

为了找出行列式各項符号的規律，看每一項各元素的足碼，在二阶和三阶行列式中，每一元素的一对足碼依次表示該元素所在的行序数和列序数，在三阶行列式中任取一項，例如：$a_{12}a_{23}a_{31}$，将其行足碼与列足碼分开依次排起来，得排列1 2 3（反序数为0）与2 3 1（反序数为2），我們看到，若某項之行足碼排