

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI



JIXIE DONGLIXUE

机械动力学

石端伟 主编



中国电力出版社
<http://jc.cepp.com.cn>

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI



JIXIE DONGLIXUE

机械动力学

主 编 石端伟
编 写 刘 照 王晓笋 张志强
主 审 郭应龙



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材。

本书主要阐述机械振动分析基础、机械系统响应的数值计算方法、工程实践中典型机械系统的动力学分析方法。

本书既可作为高等工科院校机械类专业的本科生教材，也可供从事机械设计和研究的技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

机械动力学/石端伟主编. —北京: 中国电力出版社,
2007

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5083 - 5053 - 0

I. 机... II. 石... III. 机械学: 动力学—高
等学校—教材 IV. TH113

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 163021 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2007 年 2 月第一版 2007 年 2 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 12.5 印张 302 千字

印数 0001—3000 册 定价 19.80 元

版 权 专 有 翻 印 必 究

(本书如有印装质量问题, 我社发行部负责退换)

前 言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育“十一五”教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。

在传统的机械设计方法中，对机械的运动分析与载荷计算一般建立在刚性假设的基础上（即按刚性构件来分析机构的运动），按静力学或刚体动力学的方法来分析机械的载荷。

随着工业和科学技术的迅速发展，各行业迫切需要大量新型、高效率、高速度、高精度和自动化的机械和技术装备。由于机械速度的提高，机械振动和平衡问题已成为某些机械设计中的关键问题之一，尤其是在机器人及精密机械中，这些问题除了动载，还涉及运动精度。在设计这些高速度、高精度的机械时，要涉及到各种动力学因素，要精确计算各部件的真实运动情况并考虑构件的弹性、运动副中间隙等因素对构件运动的影响，才能使各部件动作协调，机械正常运转。

现代的机械设计方法正在由传统的静态设计向动态设计过渡，机械动力学日益受到重视。

由于计算机的飞速发展和广泛应用，机械动力学的研究也有了显著的进展，对多自由度系统的动力学研究、考虑构件弹性和运动副中间隙等动力学问题时，都引入了数值计算方法。大量的商业软件问世，尤其是 MATLAB、ADAMS、ANSYS、CATIA、UG、Pro/E 等，大大促进了机械动力学的发展。各种刊物中有关机械动力学的论文很多，并且新成果正在逐步反映到国内外的教材中去。在机械原理、机械设计、有限元分析、测试技术等课程中，机械动力学的内容也得到了充实。但是，目前国内在机械动力学方面的教材不多，远不能适应机械设计教学和有关工程技术人员的需要。本书是试图为满足上述要求而编写的。

本书包含机械振动分析基础、机械系统响应的数值计算方法、工程实践中典型机械系统的动力学分析方法。

自 2001 年以来，我们在《机械动力学（讲义）》使用过程中，对各章节内容进行了反复调整。学生在学习中，对理论力学、材料力学、机械原理、机械设计有了更深的理解，也了解了部分数值分析方法，对 MATLAB、ADAMS、ANSYS 等软件的应用产生了浓厚的兴趣。

本书既可以作为机械类专业的机械动力学教材，也可作为相关专业高年级本科生、研究生及教师的参考书。

本书第一章由刘照编写，第二章由石端伟、刘照共同编写，第四章由刘照、张志强共同编写，第五章由石端伟、王晓笋共同编写，第九章由张志强编写，第十章由王晓笋编写，其余章节由石端伟编写，并由石端伟担任主编。武汉大学郭应龙教授对本书进行了认真的审

稿，提出了很多宝贵意见。本书在编写的过程中得到了肖晓晖、郭菁两位副教授以及武汉工业学院张永林教授、湖北工业大学华中平教授的指导和热情帮助，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，竭诚欢迎读者批评指正。

编 者

2006年10月

目 录

前言

绪论	1
第一节 研究机械动力学的主要意义	1
第二节 机械动力学研究的主要内容	1
第一章 单自由度系统的振动	4
第一节 概述	4
第二节 单自由度系统的振动	4
第三节 等效力学模型	12
第四节 隔振原理	14
第五节 等效黏性阻尼	16
第六节 非简谐周期激励的响应	17
第七节 单位脉冲的响应	19
第八节 任意激励的响应	20
第九节 任意支承激励的响应	20
习题一	21
第二章 多自由度系统的振动	24
第一节 多自由度系统的自由振动	24
第二节 动力减振器	30
第三节 多自由度系统的模态分析方法	32
第四节 确定系统固有频率与主振型的方法	36
习题二	47
第三章 机械系统响应的数值计算	50
第一节 欧拉法及其改进	50
第二节 线性加速度法	52
第三节 纽马克- β 法	57
第四节 威尔逊 θ 法	58
第五节 龙格-库塔法	61
习题三	64
第四章 连续系统的振动	66
第一节 弦的振动	66
第二节 杆的轴向振动	69
第三节 圆轴的扭转振动	74
第四节 梁的横向振动	76

第五节 连续系统固有频率的其他求解方法	84
习题四	88
第五章 刚性构件组成的机械系统动力学	91
第一节 曲柄连杆机构动力学分析	91
第二节 差动轮系动力学分析	95
第三节 五杆机构动力学分析	96
习题五	101
第六章 弹性构件组成的机械系统动力学	102
第一节 轴与轴系的振动	103
第二节 凸轮机构动力学	112
第三节 齿轮传动系统动力学	116
第四节 带传动系统动力学	121
习题六	125
第七章 起重机械动力学	127
第一节 概述	127
第二节 起升机构动力学	128
第三节 运行机构动力学	132
习题七	137
第八章 行走式机械动力学	139
第一节 概述	139
第二节 传动系统的扭转振动	141
第三节 传动系统的弯曲振动	148
第四节 行驶系统的振动	154
习题八	156
第九章 有限单元法	158
第一节 基本思想	158
第二节 有限元软件 ANSYS 中的动力学分析	165
第十章 非线性振动基础*	171
第一节 非线性振动特性	171
第二节 非线性振动实例	172
第三节 相平面	175
第四节 平衡的稳定性及奇点的性质	179
第五节 相轨线	184
习题十	190
参考文献	192

绪 论

第一节 研究机械动力学的主要意义

现代化的工业、农业、交通等各个部门的发展,要求设计出更多生产效率高、性能良好的机械设备,由此而导致机械产品市场的激烈竞争。

随着机械运转速度的不断提高,动力学的分析方法从静力分析发展到动态静力分析,又发展到动力分析和弹性动力分析,其考虑的因素越来越多,越来越符合客观真实情况,分析复杂程度越来越高。例如,汽车的高速化推动了对整车振动和传动系统与噪声的研究,内燃机和各种自动化机械的高速化推动了高速凸轮机构动力学的研究。

结构、材质的轻型化是现代机械设计的另一特征。能源和资源的危机向机械产品提出了节能、节材的要求,而材质的改善和最小重量优化方法的发展促使机械产品的轻型化成为可能。机械弹性动力学的发展直接与轻型化相联系。

对于精密机械,分析误差时必须尽可能考虑各种因素,如间隙、弹性、制造误差等。精密机械在高速运转下的精度与静态时有很大的差别。精密机床的动态特性研究和高速间歇机构的动态定位精度研究就是这样发展起来的。

长期以来,机械设计普遍采用静态设计方法,动态设计方法是近些年提出的新的设计方法。用静态设计方法设计机械时,只考虑静态载荷和静特性,待产品试制出来以后再作动载荷和动态特性测试,发现问题时再采取补救措施。动态设计方法在设计、制造、管理等各阶段,采取综合性技术措施,早期直接地考虑动力学问题。例如,高速旋转机械可以用静态方法设计,制造出来以后通过动平衡减小振动,还要使运转速度避开共振的临界转速。但是随着转速的提高和柔性转子的出现,不仅在设计时要进行动态分析,而且在运行的过程中还要进行状态监测和故障诊断,并及时维护,排除故障,避免发生重大事故。例如,汽车、飞机的设计早就应用了动态设计方法。动态设计的基础就是动力学分析。

第二节 机械动力学研究的主要内容

机械动力学是研究机械在力的作用下的运动和机械在运动中产生的力的一门学科。机械动力学研究的主要内容概括起来,主要有如下几个方面。

一、共振分析

随着机械设备的高速重载化和结构、材质的轻型化,现代化机械的固有频率下降,而激励频率上升,有可能使机械的运转速度进入或接近机械的“共振区”,引发强烈的共振。所以,对于高速机械装置(如高速皮带、齿轮、高速轴等)的支承结构件乃至这些高速机械本身,均应进行共振验算。

这种验算在设计阶段进行,可避免机械的共振事故发生;而在分析故障时进行,则有助于找到故障的根源和消除故障的途径。

二、振动分析与动载荷计算

现代的机械设计方法正在由传统的静态设计向动态设计过渡,并已产生了一些专门的学科分支。如机械弹性动力学就是考虑机械构件的弹性来分析机械的精确运动规律和机械振动载荷的一个专门学科。

三、计算机与现代测试技术的运用

计算机与现代测试技术已成为机械动力学学科赖以腾飞的两翼。它们相互结合,不仅解决了在振动学科中许多难以用传统方法解决的问题,而且开创了状态监测、故障诊断、模态分析、动态模拟等一系列有效的实用技术,成为生产实践中十分有力的现代化手段。

机械动力学的各个分支领域,在运用计算机方面取得了丰硕成果,如 MATLAB、ADAMS、CATIA、ANSYS 等大型仿真软件得到了广泛的运用。

四、减振与隔振

高速与精密是现代机械与仪器的重要特征。高速易导致振动,而精密设备却又往往对自身与外界的振动有极为严格的限制。因此,对机械的减振、隔振技术提出了越来越高的要求。所以,隔振设备的设计、选用与配置以及减振措施的采用,也是机械动力学的任务之一。

机械动力学在近年来虽然得到了迅速的发展,但仍有大量的理论问题与技术问题等待人们去探索,其中主要包括以下几个方面。

1. 振动理论问题

这类问题主要是指非线性振动理论问题。工程上的非线性问题常常采用简化的线性化处理,或在计算机上进行分段线性化处理。在这方面还有待进一步探索。

工程中的大量自激振动(如导线舞动、机床颤振、车轮振摆、油缸与导轨的爬行等),目前还缺乏统一成熟的理论方法,许多问题尚待研究。

2. 虚拟样机技术

机械系统动态仿真技术又称为机械工程中的虚拟样机技术,是 20 世纪 80 年代随着计算机技术的发展而迅速发展起来的一项计算机辅助工程(CAE)技术。运用这一技术,可以大大简化机械产品的开发过程,大幅度缩短产品的开发周期,大量减少产品的开发费用和成本,明显提高产品的质量,提高产品的系统及性能,获得最优化和创新的设计产品。因此,该技术一出现,就受到了人们的普遍重视和关注,而且相继出现了各种分析软件,如 MATLAB、ADAMS、ANSYS、CATIA、UG、Pro/E、SolidWorks 等。对于这方面的工作,目前我国还有相当大的差距。

3. 振动疲劳机理的研究

许多机械零件的疲劳破坏是由振动产生的。如何把振动理论与振动疲劳机理结合起来仍是一个热门课题。

4. 有关测试技术理论和故障诊断理论的研究

适用、有效、廉价的测试诊断设备与技术的研究,离生产急需尚有相当大的距离。

5. 流固耦合振动

流体通过固体时会激发振动,而固体的振动,如导线舞动、卡门涡振动、轴承油膜振荡等,又会反过来影响流体的流场和流态,从而改变振动的形态。

6. 乘坐动力学

对于交通机械（如汽车、工程机械、舰船等），其结构设计、悬挂设计、座椅设计以及减振设计等都需要引入随机振动理论，是一个广阔且重大的课题。

7. 微机械动力学问题

微机械并非传统意义下的宏观机械的几何尺寸的缩小。当系统特征尺寸达到微米或纳米的量级时，许多物理现象与宏观世界的情况有很大差别。例如，在微机械中，构件材料本身的物理性质将会发生变化；一些微观尺度的短程力所具有的长程效应及其引起的表面效应会在微观领域内起主导作用；在微观尺度下，系统的摩擦问题会更加突出，摩擦力则表现为构件表面间的分子和原子的相互作用，而不再是由载荷的正压力产生，并且当系统的特征尺寸减小到某一程度时，摩擦力甚至可以和系统的驱动力相比拟；在微观领域内，与特征尺寸 L 的高次方成比例的惯性力、电磁力等的作用相对减小，而与特征尺寸的低次方成比例的黏性力、弹性力、表面张力、静电力等的作用相对增大；此外，微构件的变形与损伤机制与宏观构件也不尽相同等。

针对微机械的研究中呈现出的新特征，传统的机械动力学理论与方法已不再适用。微机械动力学研究微构件材料的本构关系、微构件的变形方式和阻尼机制、微机构的弹性动力学方程等主要科学问题，揭示微构件材料的分子（或原子）成分和结构、材料的弹性模量和泊松比、微构件的刚度和阻尼以及微机构的弹性动力学特性等之间的内在联系，从而保证微机电系统在微小空间内实现能量传递、运动转换和调节控制功能，以规定的精度实现预定的动作。因此，机械动力学的研究将会取得多方面的创新成果，这些成果不仅有重要的科学意义和学术价值，而且有很好的应用前景。

第一章 单自由度系统的振动

第一节 概 述

机械振动是工程中常见的物理现象。悬挂在弹簧上的物体在外界的干扰下所作的往复运动就是最简单直观的机械振动。广义地说,各种机器设备及其零部件都可以看成是不同程度的弹性系统。例如,桥梁在车辆通过时产生的振动,汽轮机、发电机由于转子的不平衡引起的振动等。因此,机械振动就是在一定的条件下,振动体在其平衡位置附近所作的往复性的机械运动。

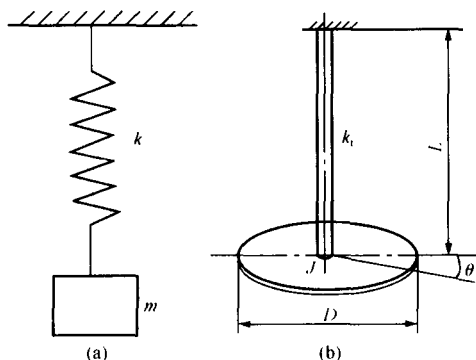


图 1-1 单自由度系统

(a) 简单单自由度系统; (b) 单自由度扭振系统

实际中的振动系统是很复杂的。为了便于分析和运用数学工具进行计算,需要在满足工程要求的条件下,把实际的振动系统简化为力学模型。例如图 1-1 (a) 是个最简单的单自由度系统, m 为振动物体的质量, k 为弹簧刚度。图 1-1 (b) 为单自由度扭振系统, k_t 为“无质量”轴的扭转刚度, J 为“无弹性”圆盘的转动惯量。量块 (m)—弹簧 (k) 系统。

如果实际系统很复杂,要求的精度较高,简化的力学模型也就比较复杂。

振动系统和参数的动态特性,可以用常系数线性微分方程来描述的,称为线性振动。但工程实际中也有很多振动系统是不能线性化的,如果勉强线性化,就会使系统的性质改变,所以这类系统只能按非线性振动系统处理,这将在第十章讨论。

机械振动的分析方法很多。对于简单的振动系统,可以直接求解其微分方程的通解。由于计算机进行数值计算非常方便,所以振动仿真是一种最直接的方法。

由于振动模型中尤其是多自由度振动模型,能很方便地用矩阵微分方程来描述,所以 MATLAB 语言在振动仿真中表现出十分优越的特性。

本章介绍单自由度机械的振动基础,然后介绍仿真计算中的各种计算公式,最后通过 MATLAB 语言来实现仿真计算。

第二节 单自由度系统的振动

一、无阻尼自由振动

图 1-1 (a) 所示的单自由度系统可以用如下的微分方程描述

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1-1)$$

令 $\omega_n^2 = k/m$, 方程的通解为

$$x = a\sin\omega_n t + b\cos\omega_n t \quad (1-2)$$

式(1-2)表示了图1-1(a)中质量块 m 的位置随时间而变化的函数关系,反映了振动的形式与特点,称为振动函数。

式(1-2)中, a 、 b 为积分常数,它们决定于振动的初始条件。

如假定 $t=0$ 时,质量块的位移 $x=x_0$,其速度 $\dot{x}=\dot{x}_0=v_0$,则 $a=v_0/\omega_n$, $b=x_0$,即

$$x = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t \quad (1-3)$$

或写成

$$x = A \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (1-4)$$

其中

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2}, \varphi = \arctan \frac{x_0 \omega_n}{v_0} \quad (1-5)$$

式中: A 为振幅; ω_n 为振动圆频率; φ 为相位角。

$f_n = \omega_n / (2\pi)$ (Hz)称为固有频率。固有频率与外界赋予的初始条件无关,是系统本身所具有的一种重要特性。

【例1-1】 承受集中载荷的简支梁如图1-2(a)所示。梁的跨度 $l=350\text{cm}$,截面尺寸如图1-2(b)所示(单位为mm)。梁的材料为铝,弹性模量 $E=7 \times 10^4 \text{MPa}$,密度 $\rho=2700\text{kg/m}^3$ 。设有一重物 $G_1=2400\text{N}$ 从 $h=2.5\text{cm}$ 的高处落下,落于梁跨度的中点。求梁的固有频率和最大动挠度。

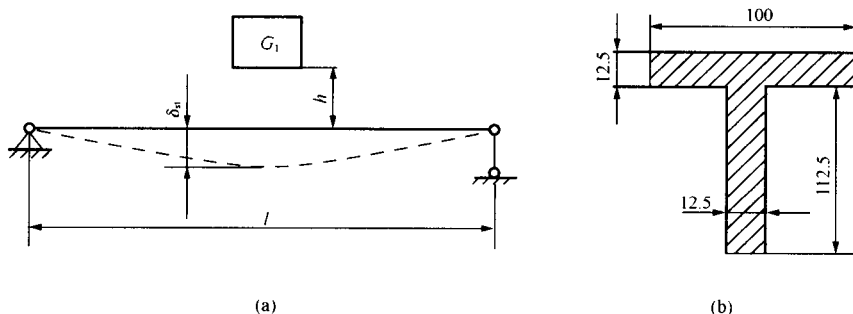


图1-2 简支梁的振动

解:由图1-2(b)可计算出梁的截面面积,从而可算出梁自身的重力为 $G_0=251\text{N}$ 。与重物 G_1 相比,梁的质量可以忽略不计。重物可视为一个集中的质量块,而梁则可视为一个没有质量的弹簧。重物落在梁上以后可将此系统视为一个单自由度的振动系统。用来计算重物振动位移的坐标原点取在其静力平衡位置。那么,梁在重物作用下的静挠度即为这一自由振动的初始位移,而重物下落所获得的速度即为自由振动的初始速度。

根据材料力学可知,简支梁在重物作用下的中点静挠度为

$$\delta_{st} = \frac{G_1 l^3}{48EI}$$

式中: I 为梁的截面惯性矩, $I=406\text{cm}^4$ 。

由此可得出 $\delta_{st}=0.755\text{cm}$ 。

梁的刚度为

$$k = \frac{G_1}{\delta_{st}}$$

固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{G_1/\delta_{st}}{G_1/g}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{980}{0.755}} = 36 \text{ rad/s}$$

重物与梁接触瞬间的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 980 \times 2.5} = 70 \text{ cm/s}$$

系统自由振动的振幅为

$$A = \sqrt{\delta_{st}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{0.755^2 + \left(\frac{70}{36}\right)^2} = 2.09 \text{ cm}$$

梁的最大动挠度为

$$\delta_{\max} = A + \delta_{st} = 2.09 + 0.755 = 2.845 \text{ cm}$$

可以看出动挠度比静挠度大得多, 动挠度与静挠度之比称为放大系数, 用 β 表示, 此处有

$$\beta = \frac{2.845}{0.755} \approx 3.8$$

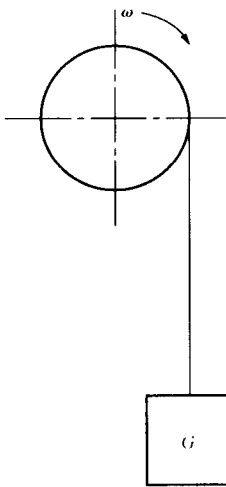


图 1-3 起重机制动状态

【例 1-2】 如图 1-3 所示, 起重机以速度 v_0 使重物 G 下降时, 突然紧急刹车, 求此时提升机构所受的最大拉力。已知: $v_0 = 0.6 \text{ m/s}$, $G = 20000 \text{ N}$, 钢丝绳的截面积 $A = 2.51 \text{ cm}^2$, 长度 $l = 16 \text{ m}$, 弹性模量 $E = 1.78 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。

解: 紧急刹车时, 钢丝绳突然停止, 但此时重物具有速度 v_0 , 从制动的瞬间开始吊在绳上作自由振动。显然, 初始位移 $x_0 = 0$, 初始速度为 v_0 , 由式 (1-5) 可知, 最大位移 $x_{\max} = v_0/\omega_n$, 由此, 钢丝绳最大的拉伸量为

$$\delta_{\max} = \delta_{st} + v_0/\omega_n = G/k + v_0 \sqrt{m/k}$$

式中: k 为钢丝绳刚度。

由材料力学可知

$$k = EA/l = 1.78 \times 10^{11} \times 2.51 \times 10^{-4} / 16 = 2.6673 \times 10^6 \text{ N/m}$$

钢丝绳中最大的拉力为

$$F_{\max} = k\delta_{\max} = k(G/k + v_0 \sqrt{m/k}) = G(1 + v_0 \sqrt{k/Gg}) =$$

$$20000 \times [1 + 0.6 \times \sqrt{2.6673 \times 10^6 / (20000 \times 9.8)}] = 64268 \text{ N}$$

定义动拉力与静拉力之比为动力放大系数 β , 则 $\beta = F_{\max}/G = 64268/20000 = 3.2134$ 。由此可以看出, 当紧急制动时, 起重机钢丝绳中的动拉力是正常提升时的 3.2134 倍。

二、有阻尼自由振动

在图 1-1 (a) 所示的保守系统中, 由于系统的能量守恒, 如果振动一旦发生, 它就会持久地、等幅地一直进行下去。但是, 实际上所有的自由振动都是逐渐衰减而至最终停止的, 即系统存在阻尼。阻尼的存在形式包括相对运动表面的干摩擦阻尼、液体与气体的黏性阻尼、电磁阻尼和结构阻尼等。

图 1-4 所示为考虑了阻尼的单自由度振动系统模型。其运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1-6)$$

令 $c/m = 2n$, $k/m = \omega_n^2$, 则

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1-7)$$

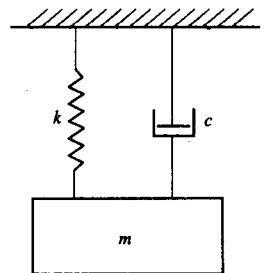


图 1-4 有阻尼的单自由度振动系统

其通解为

$$x = e^{-\eta t} (c_1 e^{t\sqrt{n^2 - \omega_n^2}} + c_2 e^{-t\sqrt{n^2 - \omega_n^2}}) \quad (1-8)$$

式中: c_1 、 c_2 为积分常数, 由振动初始条件确定。

令 $n/\omega_n = \xi$, ξ 称为相对阻尼系数或阻尼率, 则式 (1-8) 可写为

$$x = e^{-\xi\omega_n t} (c_1 e^{\omega_n t\sqrt{\xi^2 - 1}} + c_2 e^{-\omega_n t\sqrt{\xi^2 - 1}}) \quad (1-9)$$

由此可以讨论阻尼对系统的自由振动产生的影响。

当 $\xi < 1$ 时, 称为弱阻尼状态。此时, $\xi^2 - 1$ 为虚数, 式 (1-9) 变为

$$x = e^{-\xi\omega_n t} (c_1 e^{i\omega_n t\sqrt{1 - \xi^2}} + c_2 e^{-i\omega_n t\sqrt{1 - \xi^2}}) \quad (1-10)$$

利用欧拉公式, 式 (1-10) 可写为

$$x = Ae^{-\xi\omega_n t} (b\cos\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + a\sin\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \quad (1-11)$$

式 (1-11) 的括号内为两个简谐振动相加, 则其可写为

$$x = Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) \quad (1-12)$$

式

$$A = \sqrt{\frac{(v_0 + \xi\omega_n x_0)^2 + x_0^2\omega_n^2(1 - \xi^2)}{\omega_n^2(1 - \xi^2)}}, \varphi = \arctan\left(\frac{x_0\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}}{v_0 + \xi\omega_n x_0}\right)$$

由式 (1-12) 可以看出, 弱阻尼自由振动具有如下几种特性: 它是一个简谐振动, 振动的频率为 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, 而 ω_n 为无阻尼时系统的固有频率。一般情况下, ξ 常在 0.1 左右, 因此对固有频率的影响不大, 即认为 $\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \approx \omega_n$ 。振动的振幅为 $Ae^{-\xi\omega_n t}$, 其中 A 、 ξ 、 ω_n 皆为定值。所以振幅随时间变化的规律是一条指数递减曲线, 如图 1-5 所示。

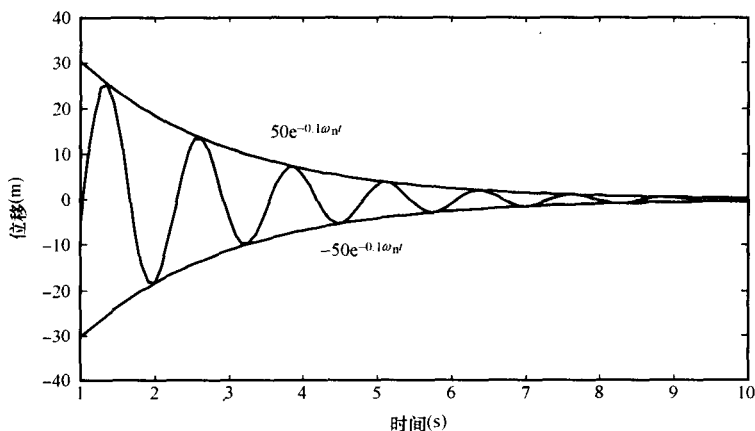


图 1-5 弱阻尼状态响应曲线

当 $\xi > 1$ 时, 称为强阻尼状态。此时, 式 (1-9) 可写成

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + c_2 e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \\ c_1 &= \frac{v_0 + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \\ c_2 &= \frac{-v_0 + (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

由于 $\xi^2 - 1 > 0$, 故式 (1-13) 中的二项指数皆为实数, 又因为 $\xi > \sqrt{\xi^2 - 1}$, 故二项指数皆为负值。所以, 式 (1-13) 所表示的是一条指数递减的曲线。这表示系统将不再产生前面所述的振动, 而是一条按指数规律衰减的曲线。

当 $\xi = 1$ 时, 称为临界阻尼状态。由于 $\xi = n/\omega_n = 1$, $n = \omega_n$, 则有

$$c_c = 2m\omega_n = 2m\sqrt{k/m} = 2\sqrt{km} \quad (1-14)$$

这里 c_c 为临界阻尼状态下的阻尼系数, 称为临界阻尼系数。显然它是系统本身所具有的特性之一。

由 $\xi = n/\omega_n = c/2m\omega_n$ 及 $c_c = 2m\omega_n$, 有 $\xi = c/c_c$ 。也就是说, 相对阻尼系数 ξ (阻尼率) 反映了系统的实际阻尼与临界阻尼的关系。

在临界阻尼状态下, 有

$$x = e^{-\omega_n t} (c_1 + c_2 t) \quad (1-15)$$

$$c_1 = x_0, c_2 = v_0 + \omega_n x_0$$

显然, 在这种状态下不能形成振动。

根据式 (1-12)、式 (1-13)、式 (1-15), 有阻尼自由振动响应的 MATLAB 程序如下:

```
function VTBI(m,c,k,x0,v0,tf)
%VTBI 用来计算单自由度有阻尼自由振动系统的响应
%VTBI 绘出单自由度有阻尼自由振动系统的响应图
%m 为质量;c 为阻尼;k 为刚度;x0 为初始位移;v0 为初始速度;tf 为仿真时间
%VTBI(zeta,w,x0,v0,tf)绘出单自由度有阻尼自由振动系统的响应图
%程序中 z 为阻尼系数 ξ;wn 为固有频率 ωn;A 为振动幅度;phi 为初相位 θ
clc
wn=sqrt(k/m); %固有频率 ωn
z=c/2/m/wn; %阻尼系数 ξ
wd=wn * sqrt(1-z^2); %计算 ωd = √(1-ξ2) ωn
fprintf('固有频率为%. 3g. rad/s. \n',wn);
fprintf('阻尼系数为%. 3g. \n',z);
fprintf('有阻尼的固有频率为%. 3g. rad/s. \n',wd);
t=0;tf/1000:tf;
if z<1
A=sqrt(((v0+z * wn * x0)^2+(x0 * wd)^2)/wd^2);
phi=atan2(x0 * wd,v0+z * wn * x0);
x=A * exp(-z * wn * t). * sin(wd * t+phi);
fprintf('A=%. 3g\n',A);
fprintf('phi=%. 3g\n',phi);
elseif z==1
a1=x0;
a2=v0+wn * x0;
fprintf('a1=%. 3g\n',a1);
```

```

fprintf('a2=%.3g\n',a2);
x=(a1+a2*t). * exp(-wn*t);
else
a1=(-v0+(-z+sqrt(z^2-1))*wn*x0)/2/wn/sqrt(z^2-1);
a2=(v0+(z+sqrt(z^2-1))*wn*x0)/2/wn/sqrt(z^2-1);
fprintf('a1=%.3g\n',a1);
fprintf('a2=%.3g\n',a2);
x=exp(-wn*t). *(a1*exp(-wn*sqrt(z^2-1)*t)+a2*exp(wn*sqrt(z^2-1)*t));
end
plot(t,x),grid
xlabel('时间(s)')
ylabel('位移(m)')
title('位移相对时间的关系')
运行该程序时，只需要给出相应的参数，例如
>>VTB1(1,0.05,1,1,1,100)

```

则显示固有频率为 1rad/s，阻尼系数为 0.03， $A=1.43$ ， $\phi=0.773\text{rad}$ 。其响应曲线如图 1-6 所示。

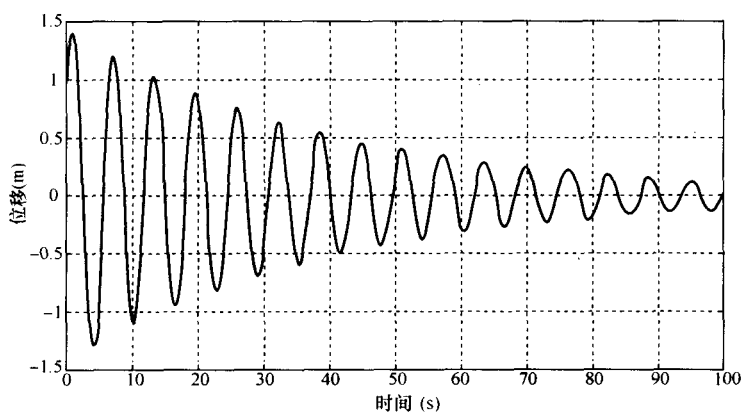


图 1-6 阻尼系数 $\xi=0.03$ 的响应曲线

程序中的 if 语句就是判断 ξ 大小的，即判断是弱阻尼状态、强阻尼状态还是临界阻尼状态。

如果运行 $\gg\text{VTB1}(1, 2, 1, 0.1, 1, 20)$ ，则显示固有频率为 1rad/s，阻尼系数为 1。其响应曲线如图 1-7 所示。如果要想求出振动的速度 \dot{x} ($=\text{xd}$) 和加速度 \ddot{x} ($=\text{xdd}$)，只要对式 (1-12)、式 (1-13)、式 (1-15) 分别进行求导，在程序中加入相应的内容，最后增加 $\text{plot}(t,\text{xd})$ 、 $\text{plot}(t,\text{xdd})$ 语句，即可给出速度和加速度图。

三、有阻尼受迫振动

单自由度有阻尼受迫振动的微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1-16)$$

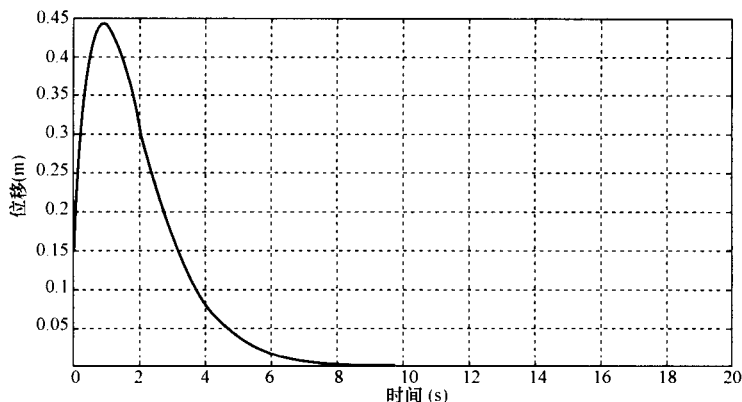


图 1-7 临界阻尼状态响应曲线

式中： $f(t)$ 为外加的激励力。

如果 $f(t) = F_0 \sin \omega t$ ，则称为简谐激励力，其振动称为谐迫振动。此时，式 (1-16) 可写成

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (1-17)$$

式 (1-17) 是一个线性非齐次方程。其响应为

$$x = Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \varphi) + B \sin(\omega t - \phi) \quad (1-18)$$

$$\phi = \arctan \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$B = \frac{\omega_n^2 F_0 / k}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} = \frac{F_0}{k \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}}$$

式中： A 与 φ 仍按式 (1-12) 计算； λ 为频率比； B 为稳态响应的振幅。

谐迫振动的主要特性如下。

(1) 由式 (1-18) 可见，谐迫振动包括瞬态与稳态响应两部分，其中瞬态响应是一个有阻尼的谐振。振动频率为系统固有频率 ω_n ，振幅 A 与初相位角 φ 取决于初始条件，振幅按 $e^{-\xi\omega_n t}$ 的规律衰减。因此，振动持续时间决定于系统的阻尼比 ξ 。

(2) 谐迫振动的稳态响应也是一个简谐振动，其频率等于激励力的频率 ω ，振幅为 B ，相位角为 ϕ 。

(3) F_0/k 是系统在静载荷 F_0 作用下产生的变形，称静态变位。而系统在 $f(t) = F_0 \sin \omega t$ 作用时，产生等幅振动，这个振动实质上是一种动态变位。 $H(\omega) = B/(F_0/k)$ 即为动态变位与静态变位之比，称为动力放大因子。 $H(\omega)$ 随阻尼比 ξ 和频率比 λ 而变化。当 $\lambda \ll 1$ 时， $H(\omega) \approx 1$ ，即 $B \approx F_0/k$ ，说明当激励频率 ω 远小于系统固有频率 ω_n 时，系统可视为静态，振幅也等于静变位。当 $\lambda \gg 1$ 时， $H(\omega) \rightarrow 0$ ，即 $B \rightarrow 0$ ，这是因为激励力频率非常高，系统由于惯性而来不及随之振动。当 $\lambda \approx 1$ 时， B 急剧增大，即发生共振。

单自由度谐迫振动的 MATLAB 计算程序如下：

```
function vtb2(m,c,k,x0,v0,tf,w,f0)
```