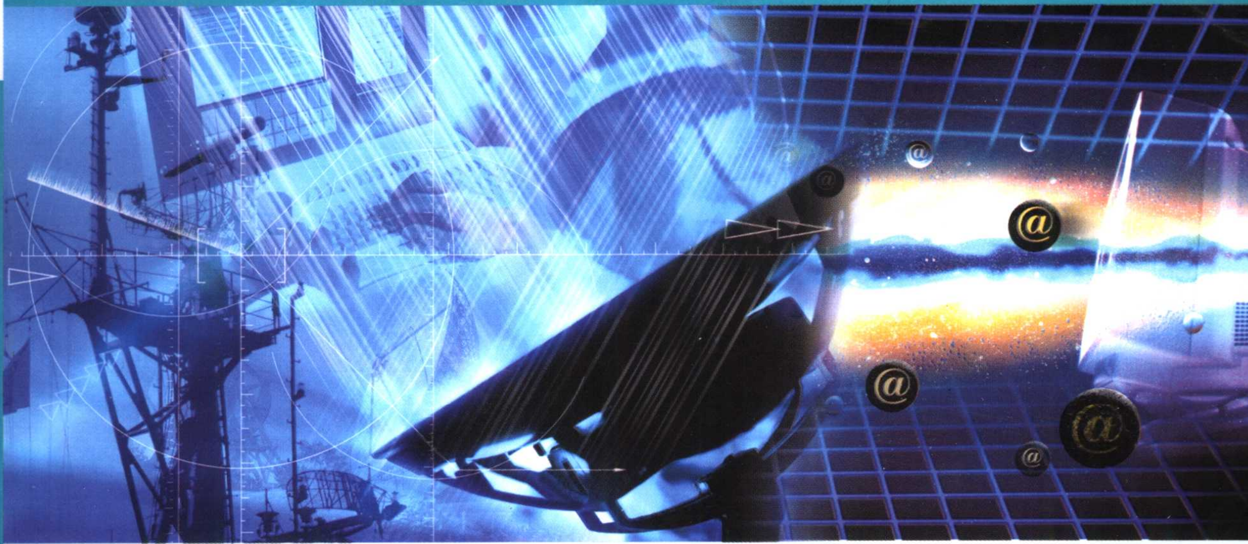

21世纪高等学校规划教材

信号分析与处理

李亚荣 主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪高等学校规划教材

信号分析与处理

中国铁道出版社

北京

内 容 简 介

本书是一本面向测控技术与仪器专业本科生、机械工程专业研究生的专业基础教材。全书共分九章。首先在模拟信号范围内，介绍了信号的基本理论及有关的分析和处理方法，包括信号的基本概念、信号的频域及时域分析、信号与测试系统、随机信号及系统响应。然后在模拟信号基础上介绍了数字信号的基本理论、分析和处理方法，包括离散信号与系统分析基础、离散傅立叶变换与快速傅立叶变换、离散信号相关与谱分析。最后适当介绍了小波分析的基本方法。

学习的重点是模拟信号与数字信号的基本概念、主要特性和常用分析、处理方法。本书的编写取材注重基础和实用。从模拟信号到数字信号内容连贯，层次分明，概念清楚，深入浅出。除了作为测控技术与仪器、机械工程等专业的教科书外，也可以作为自动控制等其他专业研究生和相关工程技术人员的技术参考书。

图书在版编目(CIP)数据

信号分析与处理/李亚荣主编. —北京:中国铁道出版社,2007.3
高等学校规划教材
ISBN 978-7-113-07579-8

Ⅰ.信… Ⅱ.李… Ⅲ.①信号分析—高等学校—教材②信号处理—高等学校—教材 Ⅳ.TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 028189 号

书　　名：信号分析与处理
作　　者：李亚荣　主编
出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街 8 号）
策划编辑：李小军
责任编辑：李小军　杨　哲　**编辑部电话**：51873314
封面设计：马　利
印　　刷：北京市兴顺印刷厂
开　　本：730×988　1/16　印张：15　字数：285 千
版　　本：2007 年 3 月第 1 版　2007 年 3 月第 1 次印刷
印　　数：1～3 000 册
书　　号：ISBN 978-7-113-07579-8/TN·163
定　　价：20.00 元

前　言

随着科学技术的不断发展，人们越来越依赖于仪器设备来观测各种物体、设备的内部状态和运动规律，从而获得有用信息来帮助人们不断地认识客观事物和改造客观世界。专业人员必须能够掌握载体信号的特性、信号的基本分析和处理方法，才能从测得的信号中正确地提取可靠的消息，获取有效的信息。

面对着当今计算机技术迅猛发展的时代，信号分析与处理的方法和手段越来越多，相关的文献资料不计其数。但是作为初学者，总是希望由浅入深，快速、准确地掌握信号的基本概念、定理、特性、基本的分析和处理方法及具体应用。本编写组根据多年“信号分析与处理”课程的教学经验、毕业学生反馈的信息、兄弟学校的相关教材、测试理论的研究、仪器设备的研制和开发经验，编写了本教材。

本书面向测控技术与仪器专业、机械工程专业的本科生及研究生，既可以作为教材使用，也可以作为相关专业工程技术人员的参考书。本书涉及到大量的积分变换、概率统计、微分方程等数学基础知识。读者要首先注意内容的实际物理含义，再进一步了解数学公式表达的含义和应用范围。

本书共有九章，第一章信号的基本概念、第二章信号的频域分析、第三章信号的时域分析、第四章信号与测试系统、第五章随机信号及系统响应为第一学习单元，在模拟信号范围内，介绍了信号的基本概念、基本特性、定理、基本的分析和处理方法，大约需要教学 36 学时。第六章离散信号与系统分析基础、第七章离散傅立叶变换与快速傅立叶变换和第八章离散信号相关与谱分析构成了第二单元，主要是在模拟信号分析的基础上介绍了数字信号的基本理论、分析和处理方法，大约需要教学 36 学时。第九章小波分析介绍了现代故障诊断常用的一种信号分析方法，大约需要 6 学时，使用时可以根据不同的学习对象适当地选用其中的内容和调节授课时间。

参加本书编写工作的有大连交通大学的李亚荣（第六章、第七章、第八章）、李平（第一章～第四章）、费继友（第九章）、大连海事大学毕春娜（第五章）。并由李亚荣任主编、李平任副主编，负责对全书的统稿工作，并对全书进行了认真的审定。大连海事大学房少军教授对全书进行了认真的审阅，并提出宝贵意见，在本书的编写过程中，大连交通大学教务处给予了很大的支持和帮助。在此表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中错误和不足之处在所难免，诚望读者批评指正。

编者

2006 年 6 月

目　　录

第一章　信号的基本概念

第一节　信号及信号分析的目的

一、信号的定义

伴随着工业、农业和科学技术的发展以及商业的兴起，消息（消息的有效成分称为信息）越来越显得重要。传播消息的主要途径是信号（包括文字传播的最终途径）。信号从广义上讲是从一个物体向另一个物体传播的相互作用。例如，当你路过十字路口时会看见交通灯，并根据红、黄、绿的灯光信号决定是否通行。如果采用检测、转换以及信号分析技术的专业语言来表达，交通灯是被检测体，眼睛是传感器，灯光就是信号。

二、信号的性质及特点

信号本身是一个时变量，即随时间变化的量（这个量可以是某种机械量、热工量、电磁量、声学量等）。信号本身含有若干参量，消息就是载在其中某些参量上。例如上面提到的交通灯的灯光，它有三个参量。一是光强（表征了光的亮度），二是光波长（表征了光的颜色），三是初相角。前两个参量的物理意义很明显。交通指令（消息）就是载在光波长上。如果要写出该信号的数学表达式或画出函数图形，这个函数描述的只能是光波长随时间 t 变化的规律。交通指令信号如图 1—1 所示。

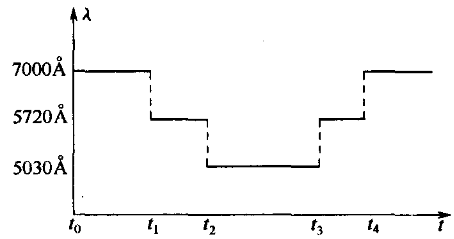

图 1—1　交通指令信号图

三、学习信号分析与处理的目的

信号是消息（信息）的载体。对信号进行研究和分析的目的就是为了有效地传递信号和提取消息（信息）。信号在传播过程中常常受到传播媒质的影响和其他信号的干扰。如果能掌握信号的一些特性，可以利用这些特性，使信号在传播过程中载有消息的参量不受干扰或少受干扰。另一方面，如果掌握了信号的一些特性以及分析、处理的方法，就可以从接收到的信号中除去干扰和提取有用的

消息。

目前，主要的分析方法有两大类，即时域法和频域法。这两种方法在信号分析中占有同等地位。后面章节中将分别介绍。

第二节 信号的分类

要对信号进行研究，首先要对信号的分类有所了解。信号可以按很多方式进行分类。这里讨论几种比较重要的分类法。

一、随机信号、非随机信号(random signal, nonrandom signal)

信号的这种分类方法是以信号是否存在随机性为根据的。随机信号通常是指信号为时间的随机函数，也就是说，信号的某个参量以不可捉摸和不可预知的方式变化。例如马路上的噪声信号，就是一种随机信号。随机信号的随机特性并不只表现在信号幅度这个参量上，还可以载在信号的其他参量上，例如，调频广播的调频信号，其随机性在信号的频率上表现出来。

非随机信号是时间的确定函数，也称为确定信号。几乎在所有的情况下，对它都可以明确地写出数学表达式。

二、周期信号、非周期信号(periodic signal, nonperiodic signal)

这两类信号通常是指对确定信号的进一步分类。周期信号是指经过一段称为周期的时间间隔后，又能准确重复前一周期函数值的信号。更确切地说，如果有一个常数 T，在所有时间 t 内能使 $x(t)$ 满足

$$x(t)=x(t-nT) \quad (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots). \tag{1—1}$$

则信号 $x(t)$ 就是周期信号。满足式(1—1)的最小正数 T 称为周期，它规定了信号变化完整的持续时间。周期信号的基本频率为

$$f=\frac{1}{T} \tag{1—2}$$

非周期信号是一种没有一个 T 可以满足式(1—1)的信号。这是一类非常重要的信号。它包括了所有的实际信号(因为实际信号一定是限定时间开始和终止的)。不过可以证明，即使非周期信号也可以用周期信号表示。因此，从信号的数学表示法的观点来看，周期信号无疑在理论上具有极大的重要性。

周期信号的典型例子是正弦波，这在电力系统中普遍使用，在某些类型系统中进行测试时所采用的也是正弦信号。还有一些周期性重复的非周期信号，例如雷达中采用的矩形脉冲序列和示波器中用做时基的锯齿波等。几乎在所有的情况下，对这些周期信号都可以写出明确的数学表达式。

非周期信号在除去随机分量后，基本上都可以写出明确的数学表达式。

还有一类信号表示了周期信号与非信号之间的边缘情况。这类信号称为准周期信号，它是两个或多个周期不成公倍数的周期信号之和。因为没有一个 T 能满足式(1—1)，所以合成信号是非周期的。但是这类信号有许多周期信号的性质，而且可以用有限个周期信号来表示。

三、能量信号、功率信号(energy signal，power signal)

电系统中的信号通常是电压或电流。电压 $u(t)$ 在已知时间间隔 (t_1, t_2) 内消耗在电阻 R 上的能量为：

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{u^2(t)}{R} \mathrm{d}t \tag{1—3}$$

若用流过电阻 R 的电流 $i(t)$ 表达，消耗的能量为：

$$E = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t) \mathrm{d}t \tag{1—4}$$

在上面每一种情况下，能量都正比于信号平方的积分。

讨论“在一欧姆基础上”的能量常常是方便的，这样，上述两式中的 R 变为 1，因而式(1—3)和式(1—4)就有相同的形式。由于采取这样的规定，习惯上就忽略单位而用下式

$$E = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \mathrm{d}t \tag{1—5}$$

表达任意信号 $x(t)$ 的能量。尽管它在量纲上不明确，但如果记住上式暗含一个带有适当量纲的“1”数时，此方程也不会发生混乱，这种习惯的做法在信号分析领域里通用。

对于时间区间变成无穷大，而式(1—5)的积分结果仍为有限数值的信号，定义其为能量信号。具体地说，如果 $x(t)$ 满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) \mathrm{d}t < \infty \tag{1—6}$$

那么就说 $x(t)$ 具有有限能量，并且叫做能量信号。能量信号的具体例子是指数衰减信号和幅值按指数规律衰减的正弦波信号(在半无限大区间 $t>0$ 内)等。

不过，还有许多的重要信号不满足上式，例如，全部的周期信号，在这种情况下研究信号的平均功率往往更为合适。

例如，与式(1—5)有关的平均功率是

$$p = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \mathrm{d}t \tag{1—7}$$

与式(1—5)一样，这里的功率计算也应理解为在一欧姆基础上进行的。若时间区间变为无限大时，式(1—7)仍然大于零，那么信号就具有有限的平均功率，并

叫做功率信号,更具体地说,一个功率信号满足下述条件

$$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty \tag{1—8}$$

比较式(1—6)和式(1—8)两式,显然可见一个能量信号有平均功率,而一个功率信号有无限大能量。所以,可以把一个信号归入这一类或另一类,但不能属于两者。当然有一些信号不属于两类中任何一类,这是由于它们的能量与平均功率都是无穷大之故。

第三节　奇异函数和冲激函数

一、常用奇异函数

有一类基本信号,它的每一部分都有很简单的数学形式,但是它本身或它的导数不连续。由于这类信号的各阶导数不都是有限值,所以通常把这类信号叫做奇异信号,数学上称为奇异函数。两个最常用的奇异函数是单位斜坡函数(unit ramp function)和单位阶跃函数(unit step function),如图 1—2、图 1—3 所示。

虽然这样的信号是数学的理想化,而且也不会真正出现在任何物理系统中,但对于系统分析来说,这些函数能起到若干有益的作用。首先,当系统中发生开关的操作时,这些信号可作为对实际出现在系统中的信号的良好近似。其次,由于它们的简单的数学形式,使之比那些较复杂信号作用于系统时更容易进行系统分析。而且更重要的是,许多复杂信号可以表示为这些简单信号之和。最后,这些奇异信号在实验中容易被逼近,因此,人们能够用实验的方法确定一个已知系统是否表现出从数学分析中知道的那种形式。

1. 单位斜坡函数

用 $r(t)$表示,如图 1—2 所示。它定义为从 $t=0$ 开始且随后具有单位斜率的时间函数。因此在数学上可表示为

$$r(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t<0\\ t & \text{其他}\end{cases} \tag{1—9}$$

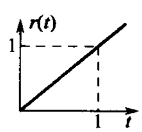

图 1—2　单位斜坡函数

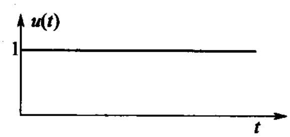

图 1—3　单位阶跃函数

如果要求的斜率不为 1,那么只需要用一个常数去乘 $r(t)$即可。对于 $b>0$,函数 $b\times r(t)$就是具有斜率为 b 的斜坡函数。

2. 单位阶跃函数

表示为 $u(t)$，如图 1—3 所示，它定义为零时刻以前，其值为零，随后其值为 1。数学上可表示为：

$$u(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t<0 \\ 1 & \text{其他}\end{cases}. \tag{1—10}$$

可以指出单位斜坡函数正好是单位阶跃函数的积分，即

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)\mathrm{d}\lambda. \tag{1—11}$$

如下关系除 $t=0$ 处外，对所有其他时间也是正确的，在 $t=0$ 处不存在唯一的导数。

$$u(t)=\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (t\neq 0). \tag{1—12}$$

通过乘一个常数可以得到数值不为 1 的阶跃变化，于是，$cu(t)$ 是幅值为 c 的阶跃变化。

3. 信号的时移

前面讨论过的所有的奇异函数都假定在 $t=0$ 时开始。考虑其他的起始时间也常常是需要的，通过平移时间函数的自变量就可以达到这个要求。这样，只要 $(t-a)$ 是负值时，$u(t-a)$ 为零；而当 $(t-a)$ 为正值时，$u(t-a)$ 是 1，它就代表了在 $t=a$ 处起始的一个阶跃函数。图 1—4 举出了几个被平移的例子。

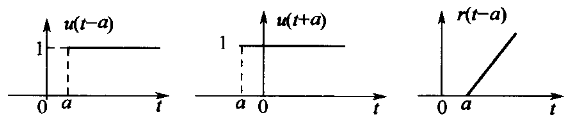

图 1—4 信号的时移

4. 信号的合成

联合使用斜坡和阶跃函数，可以表示许多其他类型的函数。例如，一个宽度为 a 的矩形脉冲可以认为是一个在原点的阶跃函数与一个在 $t=a$ 处起始的阶跃函数之差。图 1—5 说明了这一点。因此单位矩形脉冲 $P_a(t)$ 的数学表达式可以写成

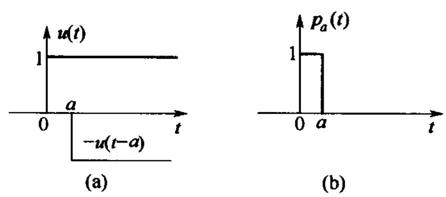

图 1—5 阶跃函数合成单位矩形脉冲 $P_a(t)$

$$P_a(t)=u(t)-u(t-a). \tag{1—13}$$

类似的有

$$cP_a(t)=c[u(t)-u(t-a)] \tag{1—14}$$

是一个幅值为 c 而宽度为 a 的矩形脉冲。

作为另一个例子，考虑表示在图中的有限斜坡函数。图 1—6(b)表示了两个斜坡函数，这两个斜坡函数的合成为有限斜坡函数。于是，这个有限斜坡函数的数学表达式为

$$x(t)=r(t)-r(t-a). \quad (1—15)$$

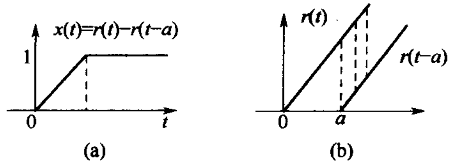

图 1—6 两个斜坡函数的合成

许多规则函数都可以用这样的方法合成。

二、冲激函数

还有一个名叫冲激(impulse)函数或称得儿塔(delta)函数的奇异函数。由于它具有一些独特的性质，使之它在信号分析和系统分析中占有独特的地位。冲激函数无法写出具体的表达式，但是其直观解释为一个理想化了的具有有限面积的极窄脉冲。为了方便起见，这个面积通常取作 1，记作 $\delta(t)$，读作得儿塔函数，也叫做狄拉克—得儿塔函数。虽然阶跃函数的导数在严格的数学意义上是不存在的，但人们在长期的科学实践中证明可以用式(1—16)定义 $\delta(t)$ 函数

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}. \qquad (1—16)$$

冲激函数在信号分析中也称取样函数，因此 δ 函数定义为下列条件的函数：

(1) $\delta(t-t_0)=0 \quad (t\neq t_0).$ (1—17)

(2) $\int_{t_1}^{t_2}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1 \quad (t_1<t_0<t_2).$ (1—18)

(3) $f(t)\cdot\delta(t-t_0)=f(t_0)\cdot\delta(t-t_0).$ (1—19)

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$ （$f(t)$ 在 t_0 处连续）. (1—20)

条件(1)和(2)定义了任意时刻具有单位面积，宽度极窄脉冲。条件(3)和(4)表示了得儿塔函数的抽样特性。

得儿塔函数还有另外一些定义，这里我们不一一叙述。

思 考 题

1. 哪些时变量可以作为信号？哪些不可以？
2. 消息是怎样载在信号上的？
3. 为什么要了解信号分类？
4. 在公式 $0<\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\mathrm{d}t<\infty$ 中 $0<\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\mathrm{d}t$ 将哪部分信号除去了？
5. 得儿塔函数的物理意义是什么？
6. $r(t)$、$\delta(t)$、$u(t)$三个函数之间是什么关系？

第二章 信号的频域分析

第一节 正 弦 信 号

正弦信号是信号分析领域里的一个最基本信号，它的数学表达式为

$$f(t)=A_0\sin(\omega_0 t+\theta_0). \tag{2—1}$$

A_0 为信号的振幅，ω_0 为信号的圆频率，θ_0 为信号的初相角。一个正弦信号如果确定了 A_0、ω_0 和 θ_0，那么这个正弦信号也就确定了，消息就载在这 3 个参量上，由此可知，A_0、ω_0 和 θ_0 为正弦信号的三要素。

正弦信号是一个周期信号，它的周期 T_0、频率 f_0 和角频率 ω_0 的关系为

$$\omega_0=2\pi f_0=2\pi\frac{1}{T_0}. \tag{2—2}$$

正弦信号的频域表示方法主要是在图形方面和时域不同。在时域里信号图形是以时间轴为横坐标，以信号的幅度为纵坐标，相角是通过相位在零时刻的相位移表示的，如图 2—1 所示，图中的 $t_0=\frac{\theta_0}{\omega_0}$。而正弦信号在频域内表示时需要两幅图，一个叫幅度谱，以频率为横坐标，振幅为纵坐标，如图 2—2 所示；另一个叫相位谱，是以频率为横轴，相位为纵轴，如图 2—3 所示。比较一个正弦信号的时域图形和频域图形可见，虽然它们的几何形态不同，但都表示频率值，振幅值和初相角，这样无论哪一种图形都表示了这一正弦信号。

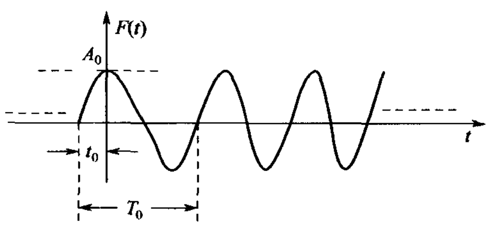

图 2—1 正弦信号的时域图

正弦信号三要素另外的意义是：消息就载在这些参量上。

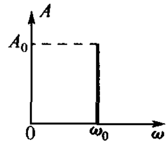

图 2—2 正弦信号的幅值谱图

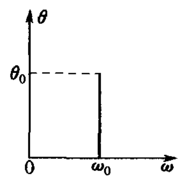

图 2—3 正弦信号的相位谱图

思　考　题

1. 正弦信号的三要素是什么？
2. 正弦信号的时域表示和频域表示有什么不同？
3. 为什么在频域里表示正弦信号要两幅图？

第二节　傅立叶级数

一、基本的傅立叶级数

任一个周期为 T_1 的信号 $f(t)$ 只要满足狄里赫利条件(在一个周期内具有有限个间断点、逐段光滑)都可以展开为傅立叶级数，即

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t + a_2\cos 2\omega_1 t + b_2\sin 2\omega_1 t + \\
&\quad \cdots + a_n\cos n\omega_1 t + b_n\sin n\omega_1 t + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_1 t + b_n\sin n\omega_1 t).
\end{aligned} \tag{2—3}
$$

其中，直流分量
$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2—4}$$

余弦分量的幅度
$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos n\omega_1 t\,\mathrm{d}t, \tag{2—5}$$

正弦分量的幅度
$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t. \tag{2—6}$$

二、单一谐波分量的傅立叶级数

为了方便起见，积分区间 $(t_0 \sim t_0 + T_1)$ 通常为 $(0 \sim T_1)$ 或 $\left(-\frac{T_1}{2} \sim \frac{T_1}{2}\right)$。若将式(2—3)中同频率的分量合并，就可以写成另一种形式

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(n\omega_1 t + \psi_n) \tag{2—7}$$

或
$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\sin(n\omega_1 t + \theta_n). \tag{2—8}$$

比较式(2—3)、式(2—7)和式(2—8)，可以看出傅立叶级数中各个参量关系如下

$$a_0=A_0,$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

$$\mathrm{tg}\psi_n=-\frac{b_n}{a_n},$$

$$\mathrm{tg}\theta_n=\frac{a_n}{b_n}.$$

如果将一个周期函数展开，写成式(2—7)或式(2—8)所示的形式，就比较容易绘出这个周期函数的幅频谱和相位谱。

例：写出图 2—4 所示的周期性矩形波的三角形式傅立叶级数展开式，并绘出频谱图。

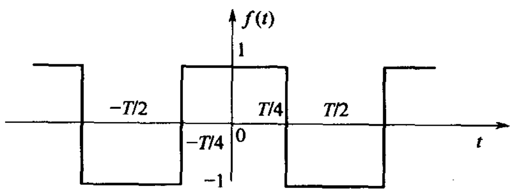

图 2—4　周期性矩形波

解：$f(t)=\begin{cases}1 & \text{当}-T/4<t<T/4\\ -1 & \text{当 } T/4<t<3T/4\end{cases},$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{4}T}^{\frac{3}{4}T}f(t)\mathrm{d}t=0,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{4}T}^{\frac{3}{4}T}f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t=0.$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{4}T}^{\frac{3}{4}T}f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{4}T}^{\frac{1}{4}T}\cos n\frac{2\pi}{T}t\mathrm{d}t-\frac{2}{T}\int_{\frac{1}{4}T}^{\frac{3}{4}T}\cos n\frac{2\pi}{T}t\mathrm{d}t\\&=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\\&=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{4}{n\pi} & \text{当 } n=1,3,5,7,\cdots\\ 0 & \text{当 } n=2,4,6,8,\cdots\end{cases},\end{aligned}$$

于是

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\Big[\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\frac{1}{7}\cos 7\omega_1 t+\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\cos n\omega_1 t+\cdots\Big],$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|a_n|=\frac{4}{n\pi},$$

$$A_0=a_0=0,$$

$$\psi_n=\mathrm{arctg}-\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}0 & a_n>0(n=1,5,9,\cdots)\\ \pi & a_n<0(n=3,7,11,\cdots)\end{cases}.$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}[\cos\omega_1 t+\frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t+\pi)+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t+\frac{1}{7}\cos(7\omega_1 t+\pi)+\cdots],$$

其频谱图如图 2—5 所示。

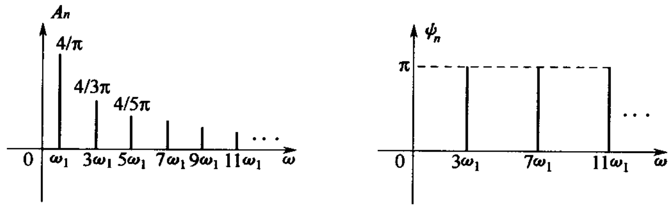

图 2—5 周期性矩形波的频谱图

三、复指数形式傅立叶级数

在信号分析过程中，为了将具有连续频率分量的信号和周期信号的分析方法相联系，利用欧拉公式

$$\cos\omega t=\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}),\tag{2—9}$$

$$\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t},)$$

将傅立叶级数写成复指数形式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_1 t},\tag{2—10}$$

$$c_0=a_0,$$

$$c_{n-}=\frac{a_n+jb_n}{2},n=-1,-2,-3,\cdots,$$

$$c_{n+}=\frac{a_n-jb_n}{2},n=1,2,3,\cdots,$$

或统一记为

$$C_n=\frac{1}{T_1}\int_{\frac{-T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt.\tag{2—11}$$

式(2—11)中的复指数 $e^{jn\omega_1 t}$ 代替了三角傅氏级数表达式中的正弦函数，因此有的

人称 $e^{jn\omega_1 t}$ 为正弦函数，利用这个函数，使后面的数学分析更为简单。

思 考 题

1. 傅立叶级数有哪几种形式，各有什么用途？
2. 傅立叶级数的系数是由谁确定的？怎样确定？

第三节 傅立叶变换

一、傅立叶变换的定义

对于周期函数表达的信号，可以通过傅立叶级数展开的方法来获得每一个频率分量的振幅。但是有些信号并不是周期信号，也不是由几个正弦信号合成的。在信号分析中，人们常常把这样的信号看成是由无数的连续频率分量正弦信号所合成。这种信号以时变量形式表示时，再也不能以级数形式出现，而是以积分形式出现，如式(2—12)所示：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \tag{2—12}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{2—13}$$

公式(2—12)和公式(2—13)称作为傅立叶变换对。式(2—12)称作 $f(t)$ 的傅立叶变换，式(2—13)称为 $F(\omega)$ 的傅立叶逆变换。这两个变换可以用符号表示为

$$F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)], \tag{2—14}$$

$$f(t) = \mathbf{F}^{-1}[F(\omega)]. \tag{2—15}$$

或者以式(2—16)表示 $F(\omega)$ 与 $f(t)$ 是傅立叶变换对

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega). \tag{2—16}$$

$F(\omega)$ 是一个复数，它本身载有信号 $f(t)$ 在频率 ω 处正弦分量的幅度和相位的信息，如果把它改写为

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}. \tag{2—17}$$

显然，$|F(\omega)|$ 表征了幅度信息，称为幅值频谱密度函数，$\theta(\omega)$ 表征了相位信息，称为相位频谱密度函数。

二、傅立叶变换的意义

$F(\omega)$ 的实际意义为：信号 $f(t)$ 在频域内，频率点 ω 处，单位带宽的密度函数。