西安交大 考研

数学135系列

2007版

数学考研典型题

主编 龚冬保

数学三和
数学四

- 500道典型例题 题型全面 方法独特 旁注点睛
- 1000道代表性练习题 今年新增全部详细解答
- 命题专家透彻分析近5年试题 科学预测方向
- 龚冬保教授免费答疑信箱 sx135_J07@126.com

西安交通大学出版社
XI' AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

（2007 版）

数学考研典型题

（数学三和数学四）

主　编　龚冬保

副主编　魏战线　张永怀　魏立线

西安交通大学出版社

·西安·

内容简介

本书自1999年问世以来，2007版是最新修订版，也是本书第8版.由于本书的例题和练习题精典，所以在本书问世后的7年中，每年均以高分覆盖当年考题，深受考生欢迎.例如2000年，书中36道题命中考题中非客观题(大题)27道(次)(数学一，8题49分；数学二，7题44分；数学三，6题41分；数学四，5题44分)；2001年覆盖考题66道(次)332分(数学一68分，数学二90分，数学三83分，数学四91分)；2002年覆盖考题338分(数学一87分，数学二91分，数学三81分，数学四79分)；2003年覆盖考题561分(数学一142分，数学二139分，数学三142分，数学四138分)；2004年覆盖数学一试卷136分；2005年(数学三和数学四分册)覆盖数学三146分，数学四142分；2006年覆盖数学三142分，数学四142分.

本书由四部分组成：第一部分是考卷分析：对新"考试大纲"问世后2004～2006年的数学考研考卷作了列表分析，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了；第二部分是应试对策：讲的是复习备考及身临考场的策略；第三部分是典型题选讲与练习：选了1500余道题，其中500多道例题(包含了往届的考题)，讲解采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了详细解答；第四部分是考题分析：龚冬保教授每年都有一篇专文，深入剖析当年的试题，指出命题的动向.

本书可供准备考研的读者使用，也可供大学数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学考研典型题—2007版(数学三、四)/龚冬保等编著.
—8版.—西安：西安交通大学出版社，2006.5
ISBN 7-5605-1969-5

Ⅰ.数… Ⅱ.龚… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试
-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第025298号

书　　名　数学考研典型题—2007版(数学三和数学四)
编　　著　龚冬保　魏战线　张永怀　魏立线
出版发行　西安交通大学出版社
地　　址　西安市兴庆南路25号(邮编：710049)
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷　西安新视点印务有限责任公司
字　　数　697千字
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　22.625
版　　次　2006年5月第8版　2006年5月第1次印刷
书　　号　ISBN 7-5605-1969-5/O·225
定　　价　34.30元

2007版前言

——从近几年考研数学试题谈起

屈指算来，本书已出到第8版了，由于贴近考研要求，受到了广大考生的欢迎.

每年考研结束后，总有不少考生主动告诉我们，他们复习考试的体会. 今年有一位同学说，在考试中碰到一道大题很熟悉，后来想起来是在本书中看过的一道例题，因此很顺利地做出来了. 有一些考生要我们说说本书的特色以及如何使用它，为此，我们从分析一些考研真题说起.

一、一题六解与六题一法

首先将2006年考研题中的一道大题作为例1，这道题至少可以用6种方法来解.

例1(2006，二、四) 确定 A、B、C 的值使

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

解1 可以把题设等式的右边看作是左边函数的局部泰勒展式：则

$$A=[e^x(1+Bx+Cx^2)]'_{x=0}=1+B \tag{1}$$

$$0=[e^x(1+Bx+Cx^2)]''_{x=0}=1+2B+2C \tag{2}$$

$$0=[e^x(1+Bx+Cx^2)]'''_{x=0}=1+3B+6C \tag{3}$$

由(2)、(3)解得 $B=-\frac{2}{3}$，$C=\frac{1}{6}$；代入(1)得 $A=\frac{1}{3}$.

解2 将 e^x 用泰勒公式展开：$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. 这样做：

$$\begin{aligned}e^x+Bxe^x+Cx^2e^x&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+Bx+Bx^2+\frac{B}{2}x^3+Cx^2+Cx^3+o(x^3)\\&=1+(1+B)x+(\frac{1}{2}+B+C)x^2+(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C)x^3+o(x^3)\\&=1+Ax+o(x^3)\end{aligned}$$

比较 x、x^2、x^3 项的系数，同解1，得 $A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{2}{3}$，$C=\frac{1}{6}$.

解3 等式变形后，由 $e^x(1+Bx+Cx^2)-1=Ax+o(x^3)$.

得
$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+Bxe^x+Cx^2e^x}{x}=1+B$$

以 $A=1+B$ 代入题设等式，得 $e^x-1-Bxe^x-x-Bx+e^xCx^2=o(x^3)$.

故
$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+Bxe^x-x-Bx+e^xCx^2}{x^2}\\&=C+\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+Be^x-B+Bxe^x}{2x}=C+\frac{1}{2}+B.\end{aligned}$$

$\therefore$ $C=-\frac{1}{2}-B$. 代入题设等式得

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+Bxe^x-x-Bx-\frac{1}{2}x^2e^x-Bx^2e^x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+B(e^x-1)-Bxe^x-xe^x-\frac{1}{2}x^2e^x-Bx^2e^x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-3Bxe^x-2xe^x-\frac{1}{2}x^2e^x-Bx^2e^x}{6x}=-\frac{3B+2}{6}\end{aligned}$$

$\therefore\quad B=-\dfrac{2}{3},A=\dfrac{1}{3},C=\dfrac{1}{6}.$

以下的解 4、5、6 与解 1、2、3 相对应，不过将所给等式作个简单变形，请读者比较.

解 4 由题设等式两边同乘 e^{-x} 得

$$1+Bx+Cx^2=e^{-x}+Axe^{-x}+o(x^3)$$

$$B=(e^{-x}+Axe^{-x})'\Big|_{x=0}=-1+A$$

$$C=\frac{1}{2}(e^{-x}+Axe^{-x})''\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}(1-2A)$$

$$0=\frac{1}{6}(e^{-x}+Axe^{-x})'''\Big|_{x=0}=\frac{1}{6}(-1+3A)$$

$\therefore\quad A=\dfrac{1}{3},B=-\dfrac{2}{3},C=\dfrac{1}{6}.$

比较解 4 与解 1，由于对 $(e^{-x}+Axe^{-x})$ 求导比对 $e^x(1+Bx+Cx^2)$ 求导简单，故解 4 计算量比解 1 少，既省时间又不易出错.

解 5 将解 4 中第 1 个等式右边中的 e^{-x} 用泰勒公式展开，得

$$1+Bx+Cx^2=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+Ax-Ax^2+\frac{A}{2}x^3+o(x^3)$$

比较等式两端 x^3 的系数可得 $\dfrac{A}{2}-\dfrac{1}{6}=0$，由此 $A=\dfrac{1}{3}$，代入后再比较 x、x^2 的系数得

$B=-\dfrac{2}{3},C=\dfrac{1}{6}.$

解 6 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+Bx+Cx^2-e^{-x}-Axe^{-x}}{x}=0$ 得 $B=A-1$

代入后得 $$\lim_{x\to0}\frac{1+Ax-x+Cx^2-e^{-x}-Axe^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{A(1-e^{-x})-1+e^{-x}+Axe^{-x}}{2x}+C$$

$$=A+C-\frac{1}{2}=0.$$

以 $C=\dfrac{1}{2}-A$ 代入，由 $$\lim_{x\to0}\frac{1+Ax-x+\frac{1}{2}x^2-Ax^2-e^{-x}-Axe^{-x}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{A-1+x-2Ax+e^{-x}-Ae^{-x}+Axe^{-x}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-2A-e^{-x}+2Ae^{-x}-Axe^{-x}}{6x}=\frac{1-3A}{6}=0.$$

同样得 $A=\dfrac{1}{3},B=-\dfrac{2}{3},C=\dfrac{1}{6}.$

一题多解是本书“典型题”的涵义之一：精选一些有代表性的题，一题多解，一题多变（参见本书 2.3 节）；题不解则已，解就解透. 因此读者在用本书时，要把例题当习题来做，不会时，再看解答；学会解题后再参考书中的旁注，总结一些解题方法. 通过这样做一道题，吃透一道题，扎扎实实练，“考研时就不会有难题”了.

例 2 是选自近几年考研试卷中的 6 道“难题”.

例 2(1) (98，二) 设 $x\in(0,1)$，证明

① $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$； ② $\dfrac{1}{\ln2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}.$

(2) (99，一) 设 $x>0$，证明 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

(3) (02，二) $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\quad(0<a<b).$

(4) (04，一、二) 设 $e<a<b<e^2$. 证明 $\ln^2b-\ln^2a>\dfrac{4}{e^2}(b-a).$

(5) (05，三、四) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0,f'(x)\geqslant0,g'(x)\geqslant0$. 证明对任意 $a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1).$$

(6) (06,二、三、四) 证明当 $0<a<b<\pi$ 时，

$$b\sin b+2\cos b+\pi b > a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

解 这六道题看似很不相同，但它们却可以用相同的方法来做：即，先作辅助函数，再利用导数讨论其单调性与极值，从而获得相关不等式的证明.

下面示范性地做出其中的(3)和(5)两题. 其余几题留给读者作练习.

(3)证明左边不等式(即，$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$)比较简单，只要用拉氏中值公式即可：

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{a+\theta(b-a)}>\frac{1}{b}=\frac{a}{ab}>\frac{2a}{a^2+b^2}$$

下面来分析右边不等式(即，$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$). 为了求导方便，先将不等式变形并移项，只要证明

$$\sqrt{ab}(\ln b-\ln a)-(b-a)<0 \quad (b>a>0)$$

为此作辅助函数：$f(b)=\sqrt{ab}(\ln b-\ln a)-(b-a)$，$b\in[a,+\infty)$(这里 b 是变量)

则 $f(a)=0$，$f'(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(\ln b-\ln a)+\sqrt{\frac{a}{b}}-1$， $f'(a)=0$，$f''(b)=-\frac{\sqrt{a}}{4b^{3/2}}(\ln\frac{b}{a})<0$

因此 $f'(b)$单调减，$f'(b)<f'(a)=0$；故 $f(b)$单调减，从而有 $f(b)<f(a)=0$. 即为所要证明的结论.

(5) 令 $F(a)=\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(a)g(1) \quad a\in[0,1]$.

则 $F(1)=\int_0^1[g(x)f'(x)+f(x)g'(x)]\mathrm{d}x-f(1)g(1)=f(x)g(x)\Big|_0^1-f(1)g(1)=0.$

$$F'(a)=g(a)f'(a)-f'(a)g(1)=f'(a)[g(a)-g(1)]=f'(a)g'(\xi)(a-1)\leqslant 0.$$

$\xi\in(a,1)$. 故 $F(a)$不增，即 $F(a)\geqslant F(1)=0$. 便得所要证明的结论.

这样，“6 道难题”从解题的思路、方法，甚至步骤来看，它们竟没有区别！这是本书“典型题”的又一层涵义(见本书的 2.4 节). 在书中，我们归纳了不少类似的重要解题方法，读者如果掌握了这些方法，并且自己在解题中再发掘出一些好的解题方法与技巧，“考研就没有难题”了.

二、关于一些其它书上不大有的方法

研究生入学考试是具有选拔功能的水平考试，因此试题要比一般常规考试略难些. 经过我们对历年试卷的分析和研究，总结了一些其它书上不多见，而又是做考研题的有效方法，这是本书的突出特点. 比如例 1，六种解法都来自无穷小分析的基本方法. 通过分析，本书更突出“泰勒公式法”、“等价无穷小替换法”等方法，而泰勒公式法在求斜渐近线及许多证明题也都有简捷和巧妙的用法. 即使数学四未将泰勒公式列为考试要求，但在考试中照样可能涉及，若会用泰勒公式解就很简便. 例如，今年数学一、二、三、四的第(7)题都是完全相同的题，若用泰勒公式法来解就很简便，这里将其作为例 3.

例 3(06,一、二、三、四) 设 $y=f(x)$二阶可导，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量在 x_0 点的增量，Δy、$\mathrm{d}y$ 是相应函数的在 x_0 点增量和微分，若 $\Delta x>0$，则( ).

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$ (B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$ (C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$ (D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

解 1(泰勒公式法) $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi)\Delta x^2 \quad \xi\in(x_0,x)$

由 $f'(x_0)>0$，$f''(\xi)>0$ 及 $\Delta x>0$ 便易知应选(A).

若不会用泰勒公式，便只好用微分中值定理来解.

解 2(微分中值定理法) $\mathrm{d}y>0$ 是显然的

$$\begin{aligned}\Delta y-\mathrm{d}y&=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\\&=[f'(x_0+\theta_1(x-x_0))-f'(x_0)](x-x_0)\\&=f''(\xi)\theta_1(x-x_0)^2>0 \text{ 其中 } \theta_1\in(0,1),\xi\in(x_0,x_0+\theta_1(x-x_0)).\end{aligned}$$

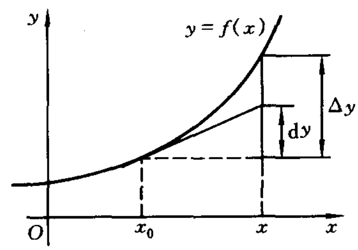
用两次拉氏中值公式方能选到(A).

巧妙的方法还有例 2 中提到的作辅助函数的方法，还有形数结合法，或代数、几何、分析结合的方法，等等. 这些方法掌握起来有一定的难度，通常一般书上不介绍，但是在解较为复杂的考研题时特别有效，往往可以化繁为简，节约解题时间，减少运算量，降低出错率. 所以，同学们在使用本书时，一定要反复练习，反复使用，努力掌握这些方法.

三、基本性与灵活性相结合

本书第 2 章介绍了"应试对策"，特别强调"**凡是基本题都会做，凡是会做的题都不错**"是考研的基本对策，因此强调加强基本训练；同时又强调在基本功训练基础上的灵活性的训练. 比如，前面的例 3，还可以有另两种灵活的解法.

例 3　解 3　由函数图像性态与导数的关系，可用图解. 由 $f'(x)>0$ 及 $f''(x)>0$ 知 $f(x)$ 单增向上凹. 如图便可知 $\Delta y>\mathrm{d}y>0$；



例 3 解 3 图

例 3　解 4　更灵活一点，可令 $y=x^2$，$x_0=1$，则当 $x>1$ 有

$\Delta y=x^2-1=(x+1)(x-1)$，$\mathrm{d}y=2(x-1)$，明显有$\Delta y>\mathrm{d}y>0$.

对于非客观题，也会有灵活的、简捷的方法. 例如今年的一道线性代数题.

例 4(2006，一、二、三、四)　设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；（Ⅱ）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解　我们只介绍灵活方法

（Ⅰ）由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，知 $r(\boldsymbol{A})=1$，0 是其二重的特征值，立即知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. 故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 和 $\lambda_3=3$ 是所求的特征值.

（Ⅱ）又 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)\perp\boldsymbol{\alpha}_1$，因此相应于特征值 0 的两正交单位特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2=(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$. 那么对应 $\lambda_3=3$ 的单位特征向量可用"叉乘积"

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1\times\boldsymbol{\beta}_2=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})^{\mathrm{T}}$$

故 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\2/\sqrt{6}&0&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$. 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(读者不妨多做一个练习，即验证 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

为了帮助本书读者复习备考，我们在网上开通了一个答疑信箱(Email:kysx135_07@126.com)，由本书作者义务为读者答疑. 另外应读者要求，在本书 2007 版中我们为本书的练习题作了详细解答.

龚冬保

2006 春于西安交大

第1版前言

每当我们上了数学考研辅导课后，总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书. 在考生朋友不断地鼓励和期盼下，我们终于写成了此书，希望它能成为众多考生的一个好朋友，陪伴着他们去数学考场“潇洒走一回”.

通过目录，读者可以了解到本书的特点：第一部分(第1章)是考卷分析. 新的“考试大纲”是1997年开始执行的，数学一是工学类代表，数学三是经济类的代表. 我们对1997至1999三年的六份考卷一一作了列表分析. 通过这些表格，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了. 只要看看六张表格中的数字，就能知道每套考卷主要考些什么. 比如在数学能力方面，计算题基本上要占50分以上；在认知水平上，要求“理解”水平的题在一半左右；在难易程度上，中档题占一半左右，等等. 这样，您看了本书第1章应当对数学考试“心中有数”了. 进一步，如果您藉助我们设计的表格，按照自己的水平，去独立分析一两套试卷，那么就知道应当如何去准备这场考试了. 因此，第1章是作复习前准备必不可少的. 第二部分(第2章)是应试对策，讲的是复习迎考及身临考场的策略. 在有一定数学水平的基础上，能不能考出理想成绩，就要看您的发挥了，如何能发挥好，应试策略是关键. 而“策略”又是最容易被人们忽视的. “考试又不是打仗，讲什么策略”? 岂不闻考场如战场，策略往往是成败的关键. 我们写这一章也是个尝试，希望能引起考生对策略问题的重视. 其实，对策是人们干什么事都应考虑的，所谓“优化运筹”不就是要寻找最优对策吗? 有了好的复习迎考对策，在此基础上，订一个切实可行的计划，就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩. 第三部分(第3～12章)是典型题的选讲与练习，这是本书的主要部分. 我们选了1 500多道题，其中500道例题，采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了答案与提示. 要想考个好成绩，关键是提高解题能力. 我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的. 我们不主张单纯“猜题”，认为只要内容覆盖面全，主要方法都练到了，就能考好，比“猜题”更稳妥，而且有利于提高数学素养；第四部分(第13章)是模拟题，数学一和数学三各两套. 在复习时，请先不要看模拟题，复习完临考前再用这两套题来进行两次“热身”. 用三小时做一套题，看看自己究竟如何，最后找找差距、值得说明的是，本书中模拟题也有特色，它是以“从难、从严、从实战”出发设计的. 每套试卷比正式考卷更难些，综合题、应用题多些，读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成，并能获得60分以上的平均成绩，那么，上了考场，正常发挥也一定能考60分以上. 但您如果提前看过了题目，再去做效果就不好了.

以上是我们编写本书的主要想法，但总觉得编写仓促，书中可能会有不少的问题和漏洞，恳切地希望读者多多批评指正.

感谢西安交通大学出版社的支持，使这本书能以面世，感谢关心与鼓励我们的朋友们!

编者

1999.5 于西安交大

(因龚冬保教授主编的《数学考研模拟考试试卷》已单独出版，故本书第四部分取消. ——出版者注)

目　录

第 1 章

考卷分析

依据教育测量学理论，本章对以往一些典型试题作了深入剖析，又对 2003、2004 年以及 2005 年的经济类考卷共 6 份进行了定量分析，以使考研同学较深入了解考研试卷的主要特征.

1.1 分析的必要性

为什么要分析已考过的试卷?不少考生甚至觉得刚考过的题肯定不会再考了，对分析已考过试卷的必要性持怀疑态度，因此，我们先简单说一下分析的必要性.

考试是一种心理测量，一份考卷好比一杆“秤”. 比如您上集市买菜，总要先看看秤一样，您准备考研究生，就得先分析考卷，看看在考试内容、考试难度、考题份量、认知和能力层次等等在每份考卷中是如何体现的，摸一摸近几年考卷的底，然后再制订适合自己的应试策略，从而减少复习迎考的盲目性.

对于考研试卷分析的方法，我们分为“微观分析”和“宏观分析”两种. 所谓“微观分析”，就是对试卷中每道试题都要认真作，边作边分析这道题的考点，解这个题的思路及主要方法是什么，这一类题在考研中的地位等等. 在“微观分析”的基础上进一步作“宏观分析”，我们的做法是，给每份试卷有一个表格，将这份试卷中的每道题的属性用数量表示在相应的空格之中，一份试卷一张表，只要看到表格中的数据，不必看具体的试卷本身，就可以了解这份试卷的考点分布、题型结构及整卷难度等等.

本章对试题和试卷的分析，不仅仅是将分析结果告诉读者，更重要是希望读者学会本书介绍的分析方法，结合自己的实际，针对性更强地去独立分析自己准备投考的那一类考卷. 分析过去是为了预测未来作到对数学考研“心中有数”.

1.2 微观分析举例

例 1.1 我们试比较 2004 年工学和经济学的两道相似的试题：

(1)(2004，一、二) 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使( ).

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 单调增.　　(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 单调减.

(C) 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.　　(D) $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(2)(2004，三、四) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是( ).

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$.　　(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$.　　(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)=0$.

解 (1) 选(C) 由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，知存在 $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 有 $f(x)-f(0)>0$. 故(C) 正

确.

(2) 选(D),(A)(B) 的正确性即是(1) 之选项(C). 至于(C) 的正确性可用连续函数的介值定理;故只有(D) 的结论是不对的,故选(D).

比较这两道题(1) 中仅有一点的导数 $f'(0) > 0$ 的假设;(2) 中设 $f'(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,而(2) 中的选项(A),(B) 均可用到(1) 的概念,即只要对导数概念清楚就行了. 在(1) 中若假设 $f'(x)$ 在 0 点连续,那么选项(A) 也是对的. 证明是这样. 由 $f'(x)$ 连续,且 $f'(0) > 0$ 故存在 $\delta > 0$,在$(0,\delta)$ 上 $f'(x) > 0$,因此 $f(x)$ 在$(0,\delta)$ 上单调增. 因此(2) 的假设太强:用 $f'(x)$ 的连续性由 $f'(a) > 0$ 知存在 $\delta_1 > 0$,在$(a,a+\delta_1)$ 上 $f(x)$ 单增. 当然有 $f(x_0) > f(a)$;由 $f'(b) < 0$ 知存在 $\delta_2 > 0$,在$(b-\delta_2,b)$ 上 $f'(x) < 0$,$f(x)$ 单调减,有 $f(x_0) > f(b)$ 十分简单. 因此(1) 题要难些,且选项(A) 有迷惑性,作这样的题要求概念清楚,并直接证明(C) 的正确性;而(2) 较简单,用排除法较好因为(A)、(B)、(C) 正确的结论容易证明.

顺便指出如将(2) 题的假设改成 $f'(x)$ 在$[a,b]$ 上存在. 其它不变那么选项(A)、(B)、(C) 中结论的正确性正是本书例 4.34(达布中值定理) 的证(1). 读者不妨查读一下,是完全一样的.

至于(2) 的选项(D) 的结论未必正确可以看一个很简单的例子:设 $f(x) = 2 - x^2$. 在$[-1,1]$ 上,$f'(-1) = 2 > 0$,$f'(1) = -2 < 0$,但在$[-1,1]$ 上 $f(x) \geqslant 1 > 0$,不存在 0 点.

在考场上作这两个题用不了几行,但剖析起来,尤其是对照剖析,使我们对极限、导数及连续性、单调性都有更深刻的领会,甚至变化一下(2) 题,还可引领到"达布中值定理"这就是举一反三,触类旁通的意思,只线于会不会做这两道题去做题,就不会有多大的收获. 这是我们说的微观分析的方法.

例 1.2　(2001,一)　设 $f(0) = 0$,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

解　选(B). 本题是概念性较强的题. 只要对导数的定义有透彻理解,就能容易用排除法排除不正确选项. 如,由定义知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$. 而选项(A)、(C) 中,相当于 x 的因式是 h^2,只能取正数趋于 0,不能作导数存在充要条件;而选项(D) 中的极限存在与 $f(0)$ 的取值无关. 也不能作可导充要条件. 因而只有(B) 是正确的选项. 不必举反例,也不要会证明选项(B) 的正确性.

作为平时的练习,深入分析本题,则可以有许多启发. 首先,我们来举反例否定三个不正确选项. 对(A)、(C),可用同一反例:$f(x) = |x|$,满足 $f(0) = 0$,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h^2} = \dfrac{1}{2}$ 存在及 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sinh)}{h^2} = 0$ 存在,但 $f(x)$ 在 0 点不可导,说明(A)、(C) 选项均不对;对于(D),令 $f(x) = \begin{cases}1, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$ 也有 $f(0) = 0$,$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h} = 0$ 存在,而 $f(x)$ 在 0 点间断,故不可导. 因此(D) 也被排除. 仿此,读者还可自己举出与上面不同的反例. 顺便提及,本书的第 4 章之例 4.3、4.4、4.5 及其注释,与本题的考点及分析问题方法以及在那里我们列举的反例,均与本题是一致的. 由于导数概念的重要性,此书的每一版都保留了这几个题. 读者可对比着看,以加深对导数概念及其存在的充分条件. 必要条件及充要条件的理解.

其次,我们来证明选项(B) 的正确性.

必要性. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h} = -f'(0)$ 存在.

充分性. 对任意 $x \to 0$,取 $|x| < 1$,令 $1-e^h = x$. 或 $h = \ln(1-x)$. 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1-x)}$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = -\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在即 $f'(0)$ 存在.

细心的读者会问　由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{1-\cosh}\cdot\dfrac{1-\cosh}{h^2}$ 令 $1-\cosh = x$,则 $x \to 0$. 不是也有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{2}$ 存在吗. 不是同样证明了选项(A) 也是正确的吗?! 问题在哪里?! 原来,令 $1-\cosh = x$,由 $h \to 0$,只能有 $x \to 0^+$. 因此,我们知道,选项(A) 是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处右导数存在的充要条件,因此,我们举反

例只要举 $f(x)$ 在 $x=0$ 点右导数存在而导数不存在的例子；进一步看选项(C)，我们知道当 $h\to 0$ 时，$h-\sin h$ 是与 h^3 同阶的无穷小，因而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}$. 只要当 $h\to 0$ 时，$h\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 的极限存在. $f'(0)$ 可以是无穷大量. 于是令 $f(x)=x^{2/3}$. 显然 $f(0)=0$，$f'(0)=\infty$ 不存在. 但 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-\sin h)^{2/3}}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{h-\sin h}{h^3}\right)^{2/3}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2/3}$ 存在.

至于选项(D)，如果我们令 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是有理数}\\ 1, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$，那么，总有 $f(0)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在，但 $f(x)$ 处处间断！

像这样去分析一道题，必定能作到举一反三、触类旁通，做一个题胜似做一类题.

例 * 1.3① (2002,一) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ (　　)

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 收敛性由所给条件不能判定.

解 选(C). 本题值得分析之处在于不少考生以为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 是交错级数，且 $\dfrac{1}{u_n}$ 与 $\dfrac{1}{n}$ 是等价无穷小，由莱布尼茨判别法它收敛，如加绝对值则发散. 故选(C). 这是不对的，理由是设 $a_n=\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}$，由已知条件，无法证明 a_n 单调减. 而用莱布尼茨法则这一条是不可少的. 沿这个思路去想这个题，反倒是学习好的学生会选(D)，因为他无法证明 a_n 的单调性.

其实要证明此级数收敛，应当用部分和：

$$S_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_n}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}$$

故 $\lim\limits_{h\to\infty}S_n=\dfrac{1}{u_1}$ 存在，从而级数收敛，且其和为 $\dfrac{1}{u_1}$.

因此，此题如改成下面两种题更好.

其一，仍是选择题，只要改为“设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{u_n}$(　　)”仍为原题的 4 个选项. 那么正确答案是(D)，而不是(C).

为了排除选项(C)，我们可令 $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n+3)}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，但

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+3)},$$

前一个和式收敛，后一个和式发散，故发散. 这样一改对学习好的学生有利. 而且选项(C) 有迷惑性.

其二，“设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛，并求其和.

改为这样的非客观题，应当是较有水平的一道好题.

分析以往的试题，主要应从其考点，解题的思路与方法方面作深入的探讨，这样会发现，以往考题有许多是相同的.

例 1.4 (1) (2000,二) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\6&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$ ________.

(2) (2001,一) 设 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

① 注：带“ * ”号的题或章、节，表示数学四不考的内容.

(3) (2002,二)　已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵,且 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$.

(i) 证明 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆;

(ii) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$.

解　我们只要做第(3)题,读者可仿此做(1)(2)两题.

(3) (i) 证.用 $\boldsymbol{A}$ 左乘所给等式两边得　$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{E}$.　$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}=0$,要证 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆,故设法分出 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$ 的因式即得　$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E}$.　或 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E}$.

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆,且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$.

(ii) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}$,用分块矩阵的方法易得

$$8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

而 2003 年数学四和数学二、2004 年数学一、二又考了三道类似题.

例 1.5　(1) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 及 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 及 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 且 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

解　(3) 由 $|\boldsymbol{A}|=3$,将已知等式两边右乘以 $\boldsymbol{A}$ 得　$3\boldsymbol{AB}=6\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.　$3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.

取行列式得 $3^3\,|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$,$|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{9}$.

(2) 题请读者自行完成.

像这样从考点、思路、方法去分析,可将许多看似不一样的题归之为同一类的题.

再看几道考点、思路、方法相同的高数题.

例 1.6　(2001,三、四与 1991,一、二)

(1) (2001,三)　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\ (k>1)$,证明存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

(2) (2001,四)　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=3\int_0^{1/3}e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$,证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

(3) (1991,一、二)　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 内可导,且 $3\int_{2/3}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$.证明存在 $c\in(0,1)$ 使 $f'(c)=0$.

解　这三道题从考点、思路、解法上也是一样的题.我们只要解其中一题,其余两题读者一定能做.

(1) 由 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$,便知其第一步用积分中值定理.由积分中值定理得,存在 $\eta\in[0,\dfrac{1}{k}]$.使 $f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$.再从要证明的结果知,将用罗尔定理,区间是 $[\eta,1]\subseteq[0,1]$,辅助函数便是　$F(x)=xe^{1-x}f(x)$.$F(x)$ 显然在 $[\eta,1]$ 上连续,在 $(\eta,1)$ 可导,且 $F(1)=f(1)=F(\eta)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$.故由罗尔定理知.存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使 $F'(\xi)=0$.而

$$F'(x)=e^{1-x}f(x)-xe^{1-x}f(x)+xe^{1-x}f'(x)$$

于是 $F'(\xi)=0$　即 $\xi f'(\xi)-(\xi-1)f(\xi)=0$，也就是

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

例 1.7　(2003，三)　设 $f(x)$ 在$[0,3]$连续，$(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$. 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

证　由已知 $\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$，及 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，故 $f(x)$ 在$[0,2]$上有最大值和最小值 M 和 m，从而有 $m\leqslant\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1\leqslant M$，同介值定理知，存在 $\eta\in[0,2]$，使 $f(\eta)=f(3)=1$. 于是 $f(x)$ 在$[\eta,3]$上满足罗尔定理条件，由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$ 使 $f'(\xi)=0$.

与例 1.6 比较之(1) 设 $f(1)=\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\Big/\dfrac{1}{k}$，本题是 $f(3)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}$，它们都是一个端点的值等于函数在某区间的平均值. 积分中值定理本质上就是平均值定理，因此，理解透了，这两题也是相同的. 这就是我们作微观分析的一种主要方法.

1.3　宏观分析

我们用下面的表格，将考卷的一些特征数量化，通过一些简单的统计，就可以了解每套考卷的特点和各套考卷的共性. 值得说明的是，我们这种分析不是考后的统计分析，考后的统计分析能评价试卷的“好与差”，主要提供考试管理人员、命题教师参考，当然，也可以提供考生参考. 但那种分析要有足够的样本，才可以作到分析的客观性. 我们的这种分析是根据自己的教学经验，对考生水平的估计而作出的. 虽说主观，却能结合考生实际，来解释试卷的特征.

先对数据各项目作个简单说明.

各课程的章目是按考研大纲所列内容的次序排列的，我们将章名限制在四个字以内，有的章不能用四个字概括则略写. 现在把略写的章名用括号说明如下：

函数极限(连续)；随机事件(和概率)；随机变量(概率分布)；多维(随机变量及其概率) 分布；其余的章目估计不会引起误会，就不作说明了. 如大数定律一章自然也包含中心极限定理等等. 读者如有不清楚的可参看“考研大纲”.

认知层次一栏中的“简用”是指简单应用，表示能将有关知识在另一个新环境中进行应用；“应用”是指复杂应用，表示能将有关知识在两个以上新环境中进行应用.

“期望”是指整卷的难度期望分，其计算方法见表 1.1 后面的难度分析. 表格中的“分值”填写的是试卷中各章内容在各个类别中所占的分数.

(1) 2004 年数学三试卷

从表 1.1 看出：

1. 内容分布　覆盖面较广.
2. 数学能力　概念题增多，综合题少些.
3. 认知层次　较集中，分布不太好.
4. 难度　期望分这样算：从易到难各档的期望分分别为 90%、75%、60%、35% 和 20%. 因此，本卷期望分为 $90\%\times8+75\%\times8+60\%\times74+35\%\times52+20\%\times8=78$ 分，估计实际达 70 分左右.

(2) 2004 年数学四试卷

从表 1.2 看出：

1. 内容分布　覆盖面尚好，积分题略少些.
2. 数学能力　推理题少了，综合题多.
3. 认知层次　分布尚可.
4. 难度　期望分 85.4. 估计平均分也在 72 分左右.

表 1.1　2004 年数学三试卷分析统计表

课程	分值＼类别 章目	数学能力					认知层次					难度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
微积分	函数极限	8	12					20				4	4	8	4		20
	一元微分	4				13		4	13					9	8		17
	一元积分		4	8				4	8					4		8	12
	多元微积		12					8	4					4	8		12
	无穷级数	4			4			4	4					4	4		8
	微分方程				5				5						5		5
线性代数	行列式																
	矩　阵	4					4					4					4
	向　量																
	方程组		13	4				4	13					13	4		17
	特征向量		13						13						13		13
	二次型	4						4					4				4
概率统计	随机事件																
	随机变量		4						4					4			4
	二维分布		6					6							6		6
	数字特征		7						7					7			7
	大数定律																
	统计概念	8						8						8			8
	参数估计		13					13						13			13
	假设检验																
	合计	32	84	12	9	13	4	75	71			8	8	74	52	8	期望 78

表 1.2　2004 年数学四试卷统计分析表

课程	分值＼类别 章目	数学能力					认知层次					难度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
微积分	函数极限	8	12		2			18	4				8	10	4		22
	一元微分	4	4		5	13		8	18				4	14	8		26
	一元积分		4		6			6	4					6	4		10
	多元微积		8		4			8	4						8	4	12
	微分方程				4				4							4	4
线性代数	行列式																
	矩　阵	4	4	4			4	4	4			4	4	4			12
	向　量																
	方程组		13						13					13			13
	特征向量		13							13					13		13
概率论	随机事件																
	随机变量		4					4						4			4
	二维分布		4		18			4	18					22			22
	数字特征		4		8			8	4					12			12
	大数定律																
	合计	16	70	4	47	13	4	60	73	13		4	16	85	37	8	期望85.4

(3) 2005 年数学三试卷

表 1.3　2005 年数学三试卷分析统计表

课程	分值 类别 / 章目	数学能力					认知层次					难度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
微积分	函数极限		12					12				4	8				12
	一元微分		8	4	6			4	14					4	8	6	18
	一元积分				2				2							2	2
	多元微积	4	21					21	4				4	12	9		25
	无穷级数	4	9					13						13			13
	微分方程		4					4				4					4
线性代数	行列式																
	矩　阵	4			8			4	8					4	8		12
	向　量	4						4					4				4
	方程组		13					13							13		13
	特征向量		4					4							4		4
	二次型				5				5						5		5
概率统计	随机事件	2	4				2			4		2		4			6
	随机变量			4				4						4			4
	二维分布		11						11					11			11
	数字特征		11						11					11			11
	大数定律																
	统计概念																
	参数估计	4	2				4		2			4		2			6
	假设检验																
	合计	22	99	8	21		6	83	57	4		14	16	65	47	8	期望 84.9

从表 1.3 看出：

1. 内容分布　一元函数积分题太少，多元函数积分题多.
2. 数学能力　还是突出了计算能力，综合题不算多.
3. 认知层次　分布尚好.
4. 难度　期望分 84.9，计算量大. 估计平均分在 64 分左右.

(4) 2005 年数学四试卷

从表 1.4 看出：

1. 内容覆盖　一元函数积分题少，但多元函数积分题多.
2. 数学能力　计算题多，综合题也不少.
3. 认知层次　以理解的题为主.
4. 难度　期望分 83.5，较前两年难些. 估计平均分是 63 分左右.

(5) 2006 年数学三试卷

从表 1.5 看出：

1. 内容分布　除一元函数积分学的题少之外，分布较好.
2. 数学能力　应用题少了点.
3. 认知层次　一般.