

高等学校计算机专业规划教材

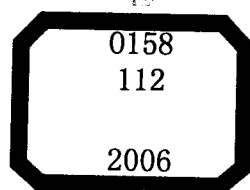
离散数学

刘书家 左 敏 编著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>



高等学校计算机专业规划教材

离散数学

刘书家 左 敏 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书分4篇,共11章。第1篇是集合论,内容包括集合、关系、映射、无限集合及其势;第2篇是近代代数,内容包括代数系统,半群、独异点及群,环、体、域,以及格与布尔代数;第3篇是图论;第4篇是数理逻辑,内容包括命题逻辑和谓词逻辑。附录中给出了离散数学在计算机类专业课中的应用。

本书语言简洁,对知识的归纳总结精辟,有利于培养学生的抽象思维和逻辑思维能力。为了教学方便,作者可为选用本书作为教材的教师免费提供习题解答。

本书可作为普通高等学校计算机及相关专业本科层次的教材,也可供研究生参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/刘书家,左敏编著. —北京:电子工业出版社,2006.10

高等学校计算机专业规划教材

ISBN 7-121-03275-9

I. 离... II. ①刘... ②左... III. 离散数学—高等学校—教材 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 119527 号

策划编辑:何 雄

责任编辑:何 雄 王 纲

印 刷:北京季蜂印刷有限公司

装 订:三河市鹏成印业有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:15 字数:384 千字

印 次:2006 年 10 月第 1 次印刷

印 数:5000 册 定价:19.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077;邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前言

“离散数学”不是一个数学分支的名称,而是大学计算机专业的一门课程名称。由于计算机科学的发展和计算机应用领域的日益广泛,迫切需要一些适当的数学工具,来描述和解决计算机科学各个领域中的提出的有关离散量的理论问题。这些数学工具涉及多个数学分支,将其中与计算机科学与技术有关的内容汇集成一门课程,而这些内容又都是以研究离散量为主的,故称这门课程为“离散数学”。该课程最早于 1976 年在美国开设,现已成为大学计算机专业主干课程之一。

该课程的内容有三个最突出的特点:一是以集合论为基础,所有的概念都是用集合来描述的;二是高度的抽象性;三是推理的严密性。这些也正是 20 世纪以来数学的突出特点。现代大学教学的首要任务是培养学生独立分析问题和解决问题的能力,而本课程非常有利于学生抽象思维和逻辑思维能力的培养。

尽管本课程介绍的内容主要是数学知识,但并非无限度地追求深度和广度。随着计算机科学的飞速发展,其内容也应适当地扩充。但是课时在不断压缩,这要求内容的选择应紧紧围绕计算机科学与技术的需求,并且选取那些最基本的、使用量较多的内容,显然,这种取舍是很难的。

作者曾于 1994 年出版过一本《离散数学》,在其后十多年的教学中,迫切希望能对原书的不足之处加以修改。另外,由于高等教育大众化,不仅推动了教育思想及高等教育理念的变革,而且在具体的教学中,教学目标及质量标准的变化,学生人数及水平的变化,多媒体教学设施的利用,都促使教学内容和教学方法的更新。本书的编写就是基于上述考虑提出和实施的。

本书在编写上突出了以下特点。

(1) 知识的广度。尽管学界已存在多部离散数学的教材,但各有短长,而本书力求对基本内容进行较全面的介绍,并根据计算机专业课程及研究的新需求,适当增加部分知识的简介。

(2) 抽象能力的培养。新概念的引出均以实际例子来说明,这样不仅有利于解决本课程的高度抽象性给学生带来的困难,而且有助于培养学生由具体实例产生数学模型的抽象思维能力。

(3) 语言精炼。该课程教学的更高层次追求是加强学生的数学修养,提高学生独立分析问题和解决问题的能力。特别是对离散数学的特点,能有所接受和体会。本书力求内容阐述精炼和严谨。

(4) 加强基础练习。本书介绍的内容毕竟是数学内容,不做大量的练习题难以掌握,故在各节后都附有练习题。这些题难度适中,便于给学生留作业。

(5) 该课程的内容高度抽象,学生在不了解所学知识用处的情况下,很容易失去学习的积极性。因此本书在附录中给出了所学内容在各专业课中的应用简介。

本书内容包括 4 篇:集合论、近世代数、图论和数理逻辑,共分为 11 章。全部内容的讲授共需 120 学时(包括加 * 号的章节),对加“*”号的章节进行适当取舍,可满足不同课时的教学

需要。练习题中也有一些加“*”号的,这些题可选做。

本书中常用的一些符号有: $\forall$ 代表“任意的”, $\exists$ 代表“存在”, $\ast$ 代表“证毕”。

本书的第1章、第2章、第3章和第9章由左敏编写,其余各章由刘书家编写。

为教学方便,本书可为选用本书作为教材的教师免费提供习题解答,欢迎通过 E-mail 与编者联系:liusj@th. btbu. edu. cn。

本书在编写过程中得到北京理工大学吴裕树教授和北京工商大学姜同强副教授的指导和帮助,在此诚表谢意。

由于编者水平有限,书中难免存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 篇 集 合 论

第 1 章 集合	2
1.1 集合的概念与表示法	2
1.1.1 集合的概念	2
1.1.2 特殊集合	2
1.1.3 集合的表示法	3
习题 1.1	3
1.2 集合之间的关系	4
1.2.1 包含关系与子集	4
1.2.2 相等关系	4
1.2.3 真包含与真子集	4
1.2.4 幂集	5
1.2.5 集族与总族	5
1.2.6 一种辅助分析集合与集合元素之间关系的有效方法	5
习题 1.2	5
1.3 集合的运算	6
1.3.1 基本运算	6
1.3.2 文氏图	7
1.3.3 运算性质	7
1.3.4 对运算定律的否定的证明方法	10
习题 1.3	10
1.4 笛卡儿积	11
1.4.1 序对	11
1.4.2 笛卡儿积(叉积)	11
1.4.3 运算性质	11
习题 1.4	13
1.5 有限集合的基数	13
习题 1.5	14
* 1.6 数学归纳法与自然数	15
1.6.1 归纳定义	15
1.6.2 自然数	16
1.6.3 归纳证明	17

习题 1.6	19
* 1.7 语言上的运算	19
1.7.1 串及其运算	20
1.7.2 语言及其运算	20
1.7.3 语言的闭包及其性质	22
习题 1.7	23
第 2 章 关系	24
2.1 二元关系	24
2.1.1 关系的概念	24
2.1.2 关系的特例	25
2.1.3 关系的域	25
2.1.4 关系矩阵与关系图	25
习题 2.1	26
2.2 具有特殊性质的关系	27
2.2.1 自反性	27
2.2.2 反自反性	27
2.2.3 对称性	28
2.2.4 反对称性	28
2.2.5 传递性	28
习题 2.2	29
2.3 复合关系与逆关系	30
2.3.1 复合关系	30
2.3.2 复合运算的矩阵实现及图解	31
2.3.3 复合幂运算的图解	32
2.3.4 逆关系	32
2.3.5 复合运算和逆运算与集合运算的关系	33
习题 2.3	34
2.4 关系的闭包运算	35
2.4.1 闭包的概念	35
2.4.2 闭包的性质	35
2.4.3 闭包的复合	38
习题 2.4	40
2.5 等价关系与集合的划分	40
2.5.1 等价关系	41
2.5.2 集合的划分	41
2.5.3 等价关系与集合划分的联系	42
习题 2.5	43
2.6 相容关系与覆盖	43
2.6.1 覆盖	43

2.6.2 相容关系	44
2.6.3 极大相容类的求法	44
2.6.4 相容关系与覆盖之间的联系	46
习题 2.6	47
2.7 序关系	47
2.7.1 拟序关系(半序、准序)	48
2.7.2 偏序关系(部分序)	48
2.7.3 哈斯图	48
2.7.4 元素的大小与子集的界	49
2.7.5 全序与良序	50
习题 2.7	50
第 3 章 映射	52
3.1 映射的基本概念	52
3.1.1 映射的概念	52
3.1.2 单射、满射和双射	54
3.1.3 两映射相等	54
3.1.4 规范映射	55
3.1.5 f 诱导的等价关系	55
3.1.6 二元运算	55
习题 3.1	56
3.2 映射的复合和逆	57
3.2.1 映射的复合	57
3.2.2 逆映射	58
习题 3.2	59
* 3.3 归纳定义映射	60
习题 3.3	61
3.4 变换和置换	62
3.4.1 基本概念	62
3.4.2 置换的性质	62
3.4.3 轮换(循环置换)	63
3.4.4 轮换的性质	63
习题 3.4	63
* 3.5 特征函数与模糊子集	64
3.5.1 集合的特征函数	64
3.5.2 模糊子集	65
习题 3.5	66
* 第 4 章 无限集合及其势	67
4.1 无限集合及其势简介	67
4.1.1 有限集与无限集	67

4.1.2 势与等势	67
习题 4.1	68
4.2 可数集	68
习题 4.2	70
4.3 势比较与连续统假设	71
4.3.1 不可数集的存在及连续统	71
4.3.2 势比较	71
4.3.3 势的无限性和连续统假设	73
习题 4.3	74
4.4 势算术	75
习题 4.4	76

第2篇 近世代数

第5章 代数系统	80
5.1 运算及运算律	80
5.1.1 运算	80
5.1.2 运算律	80
5.1.3 特殊元素	81
5.1.4 特殊元素的性质	82
习题 5.1	83
5.2 代数系统	83
5.2.1 代数系统(代数结构)	83
5.2.2 子代数系统	83
习题 5.2	84
5.3 同态与同构	84
5.3.1 同类型的代数系统	84
5.3.2 同态与同构的概念	84
5.3.3 同态性质	85
习题 5.3	86
5.4 同余关系	87
习题 5.4	88
5.5 商代数与积代数	88
习题 5.5	89
5.6 自然同态与同态三角形	90
习题 5.6	92
第6章 半群、独异点和群	93
6.1 半群	93
6.1.1 半群	93
6.1.2 子半群	94

6.1.3 循环半群	94
6.1.4 半群同态	94
习题 6.1	95
6.2 独异点	95
6.2.1 独异点	95
6.2.2 子独异点	96
6.2.3 循环独异点	96
6.2.4 独异点同态	96
习题 6.2	97
6.3 群	97
6.3.1 群的概念	97
6.3.2 群的性质	98
6.3.3 群的阶及元素的阶	99
6.3.4 低阶实际群	99
习题 6.3	100
6.4 子群	101
习题 6.4	101
6.5 变换群、置换群和循环群	101
6.5.1 变换群	101
6.5.2 置换群	102
6.5.3 循环群	103
习题 6.5	103
6.6 群同态与同构	103
6.6.1 群同态	103
6.6.2 群同构	104
6.6.3 同态核	105
习题 6.6	105
6.7 陪集及拉格朗日定理	106
习题 6.7	107
6.8 正规子群及群同态三角形	107
6.8.1 正规子群	108
6.8.2 商群	109
6.8.3 群同态三角形	110
习题 6.8	110
第 7 章 环、体、域	111
7.1 环	111
7.1.1 环的基本概念	111
7.1.2 环的性质	112
7.1.3 子环	113

习题 7.1	113
7.2 环同态、理想和商环	114
7.2.1 环同态	114
7.2.2 同余关系与理想	114
7.2.3 商环	115
7.2.4 环同态三角形	115
习题 7.2	116
7.3 体和域	117
7.3.1 体和域的概念	117
7.3.2 体和域的简单性质	117
7.3.3 商体和商域	118
习题 7.3	119
第 8 章 格与布尔代数	120
8.1 格	120
8.1.1 格的概念	120
8.1.2 格的基本性质	121
8.1.3 低阶实际格	122
8.1.4 格——代数系统	122
习题 8.1	125
8.2 特殊格	125
8.2.1 有界格	125
8.2.2 有补格	126
8.2.3 分配格	126
习题 8.2	127
8.3 布尔代数	128
8.3.1 布尔代数的概念及基本性质	128
8.3.2 子布尔代数	130
8.3.3 布尔环	130
习题 8.3	133
8.4 布尔同态	134
8.4.1 布尔同态的概念及简单性质	134
8.4.2 布尔代数表示定理	135
习题 8.4	137
8.5 布尔表达式与布尔函数	137
8.5.1 布尔表达式的基本概念	137
8.5.2 布尔表达式的范式及分类	138
8.5.3 布尔函数	139
8.5.4 如何求范式	141

第3篇 图 论

第9章 图论	144
9.1 基本概念	144
习题 9.1	146
9.2 子图与同构	147
习题 9.2	148
9.3 路与回路	149
习题 9.3	151
9.4 可达与连通	152
习题 9.4	153
9.5 图的矩阵表示	154
习题 9.5	158
9.6 欧拉图与汉密尔顿图	159
习题 9.6	162
9.7 二分图与匹配	163
习题 9.7	166
9.8 平面图	166
习题 9.8	168
9.9 对偶图与着色	169
习题 9.9	170
9.10 无向树	171
习题 9.10	175
9.11 有向树	175
习题 9.11	178

第4篇 数理逻辑

第10章 命题逻辑	182
10.1 命题及联结词	182
10.1.1 命题	182
10.1.2 联结词	183
习题 10.1	184
10.2 命题公式与恒等公式	185
10.2.1 命题公式	185
10.2.2 恒等公式	186
习题 10.2	187
10.3 联结词的扩充与归约	188
10.3.1 联结词的扩充	188
10.3.2 联结词的归约	188
习题 10.3	189

10.4 永真式与蕴含式	189
10.4.1 永真式及其性质	189
10.4.2 恒等式的性质	190
10.4.3 蕴含式	190
习题 10.4	192
10.5 代入与置换、对偶	193
10.5.1 代入规则	193
10.5.2 置换规则	193
10.5.3 用代入和置换规则证明的实例	194
10.5.4 对偶原理	194
习题 10.5	195
10.6 范式	196
10.6.1 范式的概念	196
10.6.2 范式的性质	197
10.6.3 如何求主范式	198
习题 10.6	198
10.7 推理规则及证明方法	198
10.7.1 推理理论	198
10.7.2 证明方法	199
10.7.3 演绎证明原理	200
10.7.4 演绎证明的具体方法	201
习题 10.7	204
第 11 章 谓词逻辑	205
11.1 谓词与量词	205
11.1.1 谓词	205
11.1.2 量词	206
11.1.3 个体域	207
11.1.4 如何将一个具体命题符号化	209
习题 11.1	209
11.2 谓词公式及变元的约束	210
11.2.1 谓词公式	210
11.2.2 变元的约束	210
习题 11.2	211
11.3 谓词演算的恒等式、永真式和蕴含式	211
11.3.1 谓词演算的恒等式	211
11.3.2 谓词演算的永真式及蕴含式	213
11.3.3 实例	214
习题 11.3	214
* 11.4 谓词逻辑的代入与置换规则	215

11.4.1 代入规则	215
11.4.2 置换规则	216
11.4.3 对偶原理	216
11.5 前束范式和 Skolem 范式	216
11.5.1 前束范式	216
11.5.2 Skolem 范式	217
习题 11.5	218
11.6 谓词逻辑的推理规则	218
11.6.1 术语“ $A(x)$ 对 y 是自由的”的意义	218
11.6.2 谓词逻辑中的推理规则	219
11.6.3 实例	221
习题 11.6	222
附录 A “离散数学”在其他课程中的应用列表	224
参考文献	227

第 1 篇 集 合 论

集合论(set theory)的创始人是德国数学家康托(G. Cantor, 1845—1918 年),他在 1873 年 11 月与戴德金的通信中已经提出了有理数集合是可数的。他又在 1873 年 12 月 7 日写给戴德金的信中说,他已能成功地证明实数的“集体”是不可数的了,戴德金祝贺了康托取得的成功,这一天可以看成是集合论的诞生日。1874 年,康托发表了集合论的第一篇论文《论所有实代数的集合的一个性质》,直至 1897 年他发表了有关集合论的最后一篇论文,其间共发表了十多篇有关论文,奠定了集合论的基础。

1897 年 3 月 28 日,布拉里·福蒂第一个提出了集合论中存在悖论,后来罗素悖论的提出以其简单明确震动了整个数学界,造成了第三次数学危机。1908 年,策墨罗采用了把集合论公理化的方法来消除悖论,随后又经过多人的努力,公理化集合论已成为数学中发展最为迅速的一个分支。

现在,集合论不但是整个数学的基础,而且也是计算机科学工作者必不可少的基础知识。计算机科学领域中的大多数基本概念和理论,几乎均采用集合论的有关术语来描述和论证。我们无法在本课中过细地展开策墨罗的公理化系统,但我们总是要加以一定的限制条件来避免悖论的出现。

集合论这一篇包含 4 章,第 1 章集合是基础,第 2 章关系和第 3 章映射是重点,第 4 章无限集合及其势要求一般了解。

第1章 集 合

1.1 集合的概念与表示法

1.1.1 集合的概念

集合的描述:一类不同的、确定的对象的全体称为集合(set)。这些对象称为集合的元素(element)。常用大写字母表示集合,用小写字母表示元素。

说明:(1) 由于集合的概念是集合论中最原始的概念,以至于无法用更原始的概念来定义它,因此只能给出这个概念的一般性描述,这正如几何学中的“点”的概念一样,无定义而只能给出描述或说明。

(2)“确定的”对象是指一个对象对于一个指定的集合,或者是该集合的元素,或者不是该集合的元素,二者必居其一,且仅居其一。

一个对象 a 对于一个集合 A ,若 a 是 A 中的元素,则记为 $a \in A$,称为 a 属于 A ;否则记为 $a \notin A$,称为 a 不属于 A 。

(3)“不同的”是指同一集合中元素必须是互异的,不允许一个元素重复出现于同一集合中。

(4) 集合中的元素是无序的。数学上常常将若干无序的对象用花括号括起来,以表示无序,如 $\{a, b, f\}$ 。而用圆括号括起来则表示有序,如 (a, b, f) 。由于集合元素的无序性,所以 $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{2, 3, 1\}$ 是同一集合。

(5) 在集合的描述中,除了“不同的”和“确定的”约束外,无其他约束,故集合的元素,既可以是具体的事物,也可以是抽象的概念,集合也可作为另一集合的元素。但我们排除一个集合作为自身的元素,因为这样会引出集合悖论。

1.1.2 特殊集合

(1) 一些常用的集合符号定义

自然数集 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$;

整数集 $\mathbf{I} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$; 正整数集 $\mathbf{I}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$;

有理数集 $\mathbf{Q}$; 正有理数集 $\mathbf{Q}_+$; 实数集 $\mathbf{R}$; 正实数集 $\mathbf{R}_+$; 素数(质数)集 $\mathbf{P}$; 复数集 $\mathbf{C}$;

偶数集 $\mathbf{E} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$; 正偶数集 $\mathbf{E}_+ = \{2, 4, 8, \dots\}$;

奇数集 $\mathbf{O} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$; 正奇数集 $\mathbf{O}_+ = \{1, 3, 5, \dots\}$;

$[a, b]$ 表示 $a \sim b$ 闭区间上的所有实数构成的集合; $\mathbf{N}_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ 。

(2) 有限集与无限集

含有有限个元素的集合称为有限集,否则称为无限集。

注:有限集与无限集的概念,在后面还将给出更严格的定义。

(3) 有限集合的基数

有限集合 A 的元素的个数称为该集合的**基数**(cardinality), 记为 $|A|$ 。

(4) 空集

没有元素的集合称为空集(empty set), 记为 $\emptyset$, 或记为 $\{\}$ 。

(5) 全集

包括所考虑的目标内的所有元素的集合称为全集(universal set), 常记为 U 。

例如, 我们所考虑的所有集合都是涉及自然数的, 则我们可取全集 $U = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 。

对于全集, 要注意两点: 一是“全”不是绝对的, 而是相对的; 二是全集常省略其表示。

(6) 单元素集

单元素集是仅含有一个元素的集合(singleton set)。

例如, 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的所有实根构成的集合 S 。由于方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个根都为 1, 但集合中元素不能有重复, 故 S 实际上是一个单元素集 $\{1\}$ 。 $\{\emptyset\}$ 也是一个单元素集。

1.1.3 集合的表示法

枚举法(列举法):将集合的元素逐一枚举出来, 列写在一对花括号中, 并用逗号加以间隔, 这称为集合的枚举法表示。

[例 1.1] 集合 A 是阿拉伯数字字符构成的集合, 则 A 可表示为 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 。

显然, 这种表示法对有限集(元素个数为有限)且元素个数不多时最为有效。对元素个数较多的有限集, 这种方法原则上可行, 但实际上很难将其元素全部列写出来。

对于元素数目较多的有限集和某些无限集, 如果列出几个元素后, 就可以看出组成该集合的其他元素的规律时, 可采用“...”来配合枚举法表示。例如, 26 个英文小写字母构成的集合就可表示为 $\{a, b, c, \dots, x, y, z\}$, 自然数集可写为 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 。

性质描述法:用集合中元素的共同性质来刻画集合。其格式为 $\{x \mid x \text{ 具有某种性质}\}$ 。例如, 正偶数集合 A 可表示为 $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{I}_+\}$, 又如 $[0, 1]$ 上所有连续函数所构成的集合可表示为 $\{f(x) \mid f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上连续}\}$ 。

上述两种表示法是常用的, 但毕竟只是集合的表示方法而已。原则上, 能简单、准确且易于被大家所公认表示方法都是可以使用的。如 $[0, 1]$ 闭区间上的所有实数构成的集合, 我们就可简单地用 $[0, 1]$ 来表示。

习 题 1.1

1.1.1 用枚举法表示下列集合。

(1) 小于 20 的质数集合

(2) 构成单词“evening”的英文字母的集合

(3) $\{x \mid x^2 + x - 6 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

(4) $\{x \mid x^2 + 2x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

(5) $\{x \mid x^3 - x^2 - 4 = 0, x \in \mathbb{C}\}$

(6) $\{x \mid x^2 + x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

(7) $x^6 - 1$ 的整系数因式集

1.1.2 用性质描述法表示下列集合。

(1) $\{1, 2, 3, \dots, 79\}$

(2) 奇整数集合

(3) 能被 5 整除的整数集合